Journées Équations aux dérivées partielles

Lamberto Cattabriga

Quelques résultats sur la résolubilité analytique des équations linéaires à coefficients constants

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A18_0>

QUELQUES RESULTATS SUR LA RESOLUBILITE ANALYTIQUE DES EQUATIONS LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS

par L. CATTABRIGA

L'existence d'une solution analytique réelle dans R^n de l'équation $P(D)u = f$, avec f analytique réelle dans $\mathbb{R}^n$ et $P(D)$ un polynôme différentiel à coefficients constants, est apparemment liée à la possibilité de construire des solutions élémentaires pour $P(D)$ qui soient analytiques dans certaines régions (voir [1], [3], [5]). L'existence de telles solutions élémentaires est garantie lorsque certaines conditions sur les zéros du polynôme $P(\zeta)$ sont satisfaites. Ici nous donnons des conditions qui sont plus faibles que celles qui, en [3] ont permis d'établir l'existence d'une solution élémentaire appartenant à un dual d'un espace de Gevrey et qui en plus est analytique dans un demi-espace. Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème : Soit $P(D) = \sum_{j=0}^{m} a_j(D')D_n^j$, $D' = (D_1,\dots,D_{n-1})$, un opérateur différentiel linéaire dans R^n à coefficients constants, avec $a_m(D') \not\equiv 0$. Soit $A = \{\xi' \in R^{n-1};\ \sum_{j=0}^{m} |a_j(\xi')| = 0\}$ et $H = \{x \in R^n; x_n \geq 0\}$. Supposons qu'il existe $\rho > 1$ et deux constantes positives c_1, c_2 telles que si

$$(\text{C})\qquad \begin{aligned} &(\xi',\tau) \in (R^{n-1}\setminus A) \times \mathbb{C},\ |\xi'| > k,\ P(\xi',\tau) = 0, \text{ alors} \\ &\text{ou bien } \operatorname{Im}\tau \geq -c_1|\xi'|^{1/\rho}, \text{ ou bien } \operatorname{Im}\tau \leq -c_2(|\xi'| + |\operatorname{Re}\tau|)\,. \end{aligned}$$

Nous choisirons, ce qui est toujours possible, k, c_1, c_2 telles que :

$$2^{-1}c_2 k > c_1 k^{1/\rho} + 1,$$

$$k > (4c_1)^{\rho/(\rho-1)}\ ,\ c_2 < 2\ .$$

Dans ces conditions il existe une solution élémentaire E pour P(D) telle que :

i) $E \in \mathcal{D}'(R;\gamma_0^{(\rho)'}(R^{n-1}))$;

ii) sing supp $E \subset H$;

iii) il existe deux constantes $c > 0$ et $a \geq -1$ telles que pour tout $x \in \complement H$ et tout $\alpha \in N^n$ on a

$$|D^\alpha E(x)| \leq \nu c^{|\alpha|+1} \alpha! |x_n|^{-(n+a)-m-|\alpha|} \quad ,$$

où ν est le plus grand nombre des racines distinctes de l'équation en τ $P(\xi',\tau) = 0$, satisfaisant la seconde inégalité dans l'hypothèse (C) et $\gamma_0^{(\rho)'}$ désigne le dual de l'espace de Gevrey $\gamma_0^{(\rho)}$;

iv) supp $E \subset \complement H$ si toutes les racines de l'équation $P(\xi',\tau) = 0$ satisfaisant la seconde inégalité dans (C).

La démonstration de ce théorème est obtenue suivant la même méthode utilisée en [3] où $A \subset \{\xi' \subset R^{n-1} ; |\xi'| \leq k\}$, en adaptant à la présente situation le raisonnement développé par A. Enqvist [4].

A l'aide des résultats obtenus, on peut prouver les théorèmes d'existence d'une solution analytique pour l'équation $P(D)u = f$, donnée en [2] sous des conditions plus faibles pour l'opérateur P(D).

[1] K. G. Andersson : Global solvability of partial differential equations in the space of real analytic functions, Coll. on Analysis, Rio de Janeiro 1972.

[2] L. Cattabriga : Fundamental solutions with singular support contained in a cone or in a half space. Applications. Conferenze Sem. Mat. di Bari , 151 (1978).

[3] L. Cattabriga, E. De Giorgi : Soluzioni di equazioni differenziali a coefficienti costanti appartenenti in un semispazio a certe classi di Gevrey, Boll. Un. Mat. Ital. (4) 12 (1975).

[4] A. Enqvist : On tempered fundamental solutions supported by a convex cone, Ark. Mat. 14 (1976).

[5] T. Kawai : On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations (I). J. Math. Soc. Japan, 24 (1972).