Sigeru Mizohata

# Équations d’évolution à grand paramètre

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1979), p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A4_0>

Conférence n° 4

## EQUATIONS D'EVOLUTION A GRAND PARAMETRE

par S. MIZOHATA

J'ai parlé au séminaire de l'Ecole Polytechnique sur le théorème de Cauchy-Kowalewsky (avril 1979). Le résultat est le suivant : il s'agit du problème de Cauchy pour les équations à coefficients holomorphes :

$$(1) \qquad \partial_t^m u(t,x) - \sum_{j=1}^{m} a_j(t,x;\partial_x)\partial_t^{m-j}u(t,x) = 0$$

avec les données holomorphes $\partial_t^i u(0,x)$ $(0 \leq i \leq m-1)$. Alors pour que la conclusion du theorème de Cauchy-Kowalewsky soit vraie, il est nécessaire et suffisant qu'on ait :

$$(K) \qquad \text{ordre } a_j(t,x;\zeta) \leq j.$$

Le raisonnement est une extension de celui de l'article : some remarks on the Cauchy problem, J. Math. University of Kyoto, 1962. On localise l'opérateur (1) dans l'espace $(x,\xi)$, c'est-à-dire qu'on définit deux fonctions de tronquature $\beta(x)$, $\alpha_n(\xi)$ de la classe $(1+\varepsilon)$ de Gevrey, où $\varepsilon$ est un nombre positif assez petit. Pour éclaircir notre raisonnement, j'explique un peu les points essentiels de la méthode.

En 1938, Petrowsky a publié un article fondamental sur l'équation d'évolution :

$$(2) \qquad \partial_t^m u(t,x) - \sum_{j=1}^{m} a_j(t;\partial_x)\partial_t^{m-j}u = f(t,x)$$

dans la classe $\mathcal{B}$ ou plutôt dans $H^\infty$ (on note ici que (2) n'est pas nécessairement kowalewskien).

Il a proposé la méthode par "ondes planes". Plus précisément, on considère des solutions de la forme

$$u_\xi = e^{ix\xi}\, v_\xi(t)$$

où $v_\xi(t)$ est la solution de

$$v_\xi^{(m)}(t) + \Sigma\, a_j(t;i\xi) v_\xi^{(m-j)}(t) = 0. \tag{3}$$

Il a montré que la condition nécessaire et suffisante pour que (2) soit bien posé est que la matrice fondamentale (on considère toujours le cas où la donnée initiale est donnée sur $t=0$)

$$\Phi_\xi(t) = (v_{ij}(t;\xi))_{1\le i,j\le m}$$

est majorée par un polynôme fixe si T est fixé :

$$|v_{ij}(t;\xi)| \le P(|\xi|)\ , \quad 0 \le t \le T\ . \tag{$*$}$$

Notre raisonnement est une extension directe de la méthode de Petrowsky. Pour fixer l'idée, considérons le cas kowalewskien. Alors en désignant la partie homogène de $a_j$ par $k_j$, on suppose que l'équation caractéristique a la propriété suivante :

$$\exists\ \xi_o \in \mathbf{R}^\ell \ \text{ tel que l'équation } \lambda^m - \Sigma k_j(0;\xi_o)\lambda^{m-j} = 0$$

a au moins une racine $\lambda_1$ telle que $\operatorname{Im}\lambda_1 < 0$ .

Alors on peut montrer l'existence de solutions $v_n$ (ou plutôt $v_{n\xi_o}$ ) ayant les propriétés suivantes :

i) $\{v_n^{(i)}(0)\}$ sont restés bornés $(0 \le i \le m-1)$,

ii) $|v_n(t)| \ge \exp(\delta n t)$ $(\delta > 0,\ t > 0)$, si n est assez grand.

Or, dans le cas où les $a_j$ dépendent aussi de x, on peut démontrer l'existence des solutions ayant presque les mêmes propriétés . On effectue cette extension par localisation de l'opérateur L. En effet, on a

$$L\,(\alpha_n(0)\beta(x)u_n) = f_n\ ,$$

où L est supposée être l'opérateur localisé à grand paramètre n. L'équation d'évolution localisée à grand paramètre se traite presque de la même manière que l'équation différentielle ordinaire. Notre méthode n'exige nullement la construction explicite des solutions approchées. On peut donc économiser la considération, parfois ingénieuse, du développement asymptotique. Mais, en compensation, on est obligé de considérer les estimations, parfois pénibles, du terme reste $f_n$. Si $f_n$ a de bonnes propriétés, je dis que cet opérateur est localisable. Je note que, jusqu'à maintenant, on a exclusivement considéré des opérateurs localisables. Voici un exemple du type non localisable dû à Takeuti. On considère l'équation d'évolution du type Schrödinger

$$\partial_t u(t,x) = i\partial_x^2 u(t,x) + ib(t,x)\partial_x u(t,x) \tag{4}$$

où $b(t,x)$ est à valeurs réelles. Alors, vu que la condition $(*)$ est nécessaire , on est tenté de considérer que la condition

$$b(x) \equiv 0$$

est nécessaire. Or cela n'est nullement vrai. En effet, si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |b(x)|\,dx < +\infty$$

est vérifié (on suppose évidemment que $b(x) \in \mathcal{B}$), on voit que (4) est bien posé. On le voit de la manière suivante :
on pose $u = \Phi(x)v$. Alors on a :

$$\partial_t v = i\partial_x^2 v + i[2\Phi'/\Phi + b]\partial_z v + (\Phi'' + ib\Phi')/\Phi^v .$$

On prend alors $\Phi$ de manière que

$$\Phi'/\Phi = -b/2 ,$$

c'est-à-dire

$$\Phi(x) = \exp(-\frac{1}{2}\int^x b(\xi)d\xi),$$

ce qui prouve notre assertion.

Revenons maintenant à l'équation localisée :

$$L(\alpha_n \beta u_n) = f_n ,$$

où $f_n$ est

$$n \sum_{|p|\geq 1} \frac{(-1)^{|p|}}{p!} \sum_{i} a_j^{(p)}(t,x;i\xi')n^{j-1}\partial_t^{m-j}(\beta(p)u_n)$$

$$+ n \sum_{p\geq o} \frac{(-1)^{|p|}}{p!} \sum_{j} [\alpha_n, a_j^{(p)}]n^{j-1}\,\partial_t^{m-j}(\beta(p)u_n)\ ,$$

où $\xi' = \xi/n$, et $a_j^{(p)} = \partial_{\xi}^{p}\{a_j(t,x;i\xi')\}$.

Le cas localisable n'est pas défini précisément. Ce cas est en gros le cas où $f_n$ est petit ou négligeable en un certain sens. Mais cette propriété dépend aussi des données initiales des $u_n$ .

***