Masaki Kashiwara
Pierre Schapira

Variété caractéristique de la restriction d'un module différentiel

Journées Équations aux dérivées partielles (1981), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1981____A17_0>

VARIETE CARACTERISTIQUE DE LA RESTRICTION D'UN MODULE DIFFERENTIEL

par M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA

Soit X une variété analytique complexe, T^*X son fibré cotangent, π la projection de T^*X sur X, $T^*_X X$ la section nulle de T^*X, $\dot{T}^*X$ l'espace $T^*X \setminus T^*_X X$.

Soit Y une sous-variété de X, et soit ρ l'application naturelle de $T^*X \underset{X}{\times} Y$ sur T^*Y associée à l'immersion $Y \hookrightarrow X$. Notons Λ l'intersection $T^*_Y X \cap \dot{T}^*X$, où $T^*_Y X$ désigne le fibré conormal à Y dans X. L'application lisse $\Lambda \to Y$ définit l'immersion :

$$T^*Y \underset{Y}{\times} \Lambda \hookrightarrow T^*\Lambda$$

Soit H l'isomorphisme symplectique de T^*T^*X sur TT^*X. L'application H induit un isomorphisme de $T^*\Lambda$ sur $T_\Lambda T^*X$, ce dernier espace désignant le fibré normal à Λ dans T^*X, et un isomorphisme de $T^*Y \underset{Y}{\times} \Lambda$ sur $T_\Lambda(T^*X \underset{X}{\times} Y)$. On note $\tilde{\rho}$ et $\check{\rho}$ les applications naturelles de $T^*Y \underset{Y}{\times} \Lambda$ et $T_\Lambda(T^*X \underset{X}{\times} Y)$ sur T^*Y :

$$\begin{tikzcd}
 & T^*Y \underset{Y}{\times} \Lambda \arrow[r, hook] \arrow[dl, "\tilde{\rho}"'] \arrow[dd, "\wr"] & T^*\Lambda \arrow[dd, "\wr"] \\
T^*Y & & \\
 & T_\Lambda(T^*X \underset{X}{\times} Y) \arrow[r, hook] \arrow[ul, "\check{\rho}"] & T_\Lambda T^*X
\end{tikzcd}$$

Si l'on choisit un système de coordonnées (y,t) sur X, $(y,t;\eta,\tau)$ sur T^*X, Y étant définit par $\{t = 0\}$, on obtient :

$$\Lambda = \{(y;\tau)\}$$

$$T^*\Lambda = \{(y,\tau;\langle\tilde{\eta},dy\rangle - \langle\tilde{t},d\tau\rangle\}$$

$$T_\Lambda T^*X = \{(y,\tau;\langle\tilde{\eta},\frac{\partial}{\partial\eta}\rangle + \langle\tilde{t},\frac{\partial}{\partial t}\rangle)\}$$

$$T^*Y \underset{Y}{\times} \Lambda = \{(y,\tau;\tilde{\eta},\tilde{t})\,;\ \tilde{t} = 0\}$$

$$\tilde{\rho}(y,\tau;\tilde{\eta},0) = (y,\tilde{\eta})$$

Soit S une partie de T^*X. Le cône $C(S,\Lambda)$ de TT^*X est défini dans une carte locale par :

$$\theta \in C_x(S,\Lambda) \subset T_xT^*X \iff \text{il existe une suite } (x_p, x'_p, c_p) \text{ dans } S \times \Lambda \times \mathbb{C} \text{ avec}$$

$$x_p \to x\ ,\ x'_p \to x\ ,\ c_p(x_p - x'_p) \to \theta\ .$$

On note $C_\Lambda(S)$ l'image de $C(S,\Lambda)$ dans le fibré normal $T_\Lambda T^*X$ et on dit que $C_\Lambda(S)$ est le cône normal à S le long de Λ .

Notons $\dot{T}_\Lambda T^*X$ le fibré $T_\Lambda T^*X$ privé de sa section nulle Λ . L'application

$$(\dot{T}^*X \underset{X}{\times} Y \setminus \Lambda) \cup (\dot{T}_\Lambda(T^*X \underset{X}{\times} Y)) \to \dot{T}^*Y$$

définit en passant aux fibrés projectifs une application :

$$(P^*X \underset{X}{\times} Y \setminus \Lambda) \cup (P_\Lambda(P^*X \underset{X}{\times} Y)) \to P^*Y$$

en notant encore Λ le fibré P^*_YX, et cette dernière application est holomorphe et propre quand on munit le premier espace de sa structure d'éclatée de Λ dans $P^*X \underset{X}{\times} Y$. La première partie du lemme ci-dessous en résulte.

<u>Lemme 1</u> : Soit S un ensemble analytique fermé conique de T^*X . Alors

$$\rho^{\#}(S) \underset{\text{def}}{=} \rho(S \cap T^*X \underset{X}{\times} Y \setminus \Lambda) \cup \check{\rho}\,(C_\Lambda(S) \cap T_\Lambda(T^*X \underset{X}{\times} Y))$$

est un ensemble analytique fermé conique de T^*Y. De plus dans les coordonnées $(y,t;\eta,\tau)$ définies plus haut on a :

$$(y,\eta) \in \rho^{\#}(S) \iff \text{il existe une suite } (y_p, t_p; \eta_p, \tau_p) \text{ dans S avec}$$
$$(y_p,\eta_p) \to (y,\eta),\ t_p \to 0,\ \ |t_p|\ |\tau_p| \to 0\ .$$

Soit $\mathcal{E}_X$ le faisceau sur T^*X des opérateurs microdifférentiels holomorphes d'ordre fini (cf.[8]), $\mathcal{E}_X(k)$ le sous-faisceau des opérateurs d'ordre $\leqslant$ k. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent sur un ouvert de T^*X. On note $SS(\mathcal{M})$ le support de $\mathcal{M}$ et on dit que $SS(\mathcal{M})$ est la variété caractéristique de $\mathcal{M}$. Si Λ est une variété lagrangienne de T^*X, le cône $C_\Lambda(SS(\mathcal{M}))$ est noté $C_\Lambda(\mathcal{M})$ et s'appelle la variété microcaractéristique de $\mathcal{M}$ le long de Λ [5].

Cet ensemble n'est pas assez précis pour le calcul que nous avons en vue et nous introduisons suivant [7] la variété 1-microcaractéristique de $\mathcal{M}$ le long de Λ (cf.[6] pour une autre construction).

Soit $\mathcal{J}_\Lambda = \{P \in \mathcal{E}_X(1)\,;\ \sigma_1(P)|\Lambda = 0\}$, $\sigma_1(P)$ désignant le symbole d'ordre 1 de l'opérateur P d'ordre $\leqslant 1$. On identifie l'anneau

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{m \geqslant 0} (\mathcal{J}_\Lambda^m / \mathcal{E}_X(-1)\,\mathcal{J}_\Lambda^{m+1} + \mathcal{J}_\Lambda^{m-1})$$

à une sous-algèbre de $\tau_* \mathcal{O}_{T_\Lambda T^*X}$ τ désignant la projection de $T_\Lambda T^*X$ sur Λ . Si $\mathcal{N}_o$ est un sous-$\mathcal{E}_X(0)$-module de $\mathcal{N}$ de type fini qui engendre $\mathcal{N}$, on définit $C^1_\Lambda(\mathcal{N})$ la variété 1-microcaractéristique de $\mathcal{N}$ le long de Λ comme étant le support dans $T_\Lambda T^*X$ du faisceau :

$$\mathcal{O}_{T_\Lambda T^*X} \otimes_{\tau^{-1}\mathfrak{a}} \tau^{-1}(\bigoplus_{m \geqslant 0} \mathcal{J}_\Lambda^m\ \mathcal{N}_o / \mathcal{J}_\Lambda^{m+1}\ \mathcal{E}_X(-1)\mathcal{N}_o + \mathcal{J}_\Lambda^{m-1}\ \mathcal{N}_o)$$

C'est un ensemble analytique fermé de $T_\Lambda T^*X$, ne dépendant que de $\mathcal{N}$, cônique pour les deux actions de $\mathbb{C}^\times$ sur $T_\Lambda T^*X$, et cet ensemble contient $C_\Lambda(\mathcal{M})$ (cf.[7]).

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent on l'identifiera au $\mathcal{E}_X$-module $\mathcal{N} = \mathcal{E}_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1}\mathcal{M}$ sur T^*X .

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent à gauche. Le $\mathcal{O}_Y$-module $\mathcal{M}_Y \underset{\text{def}}{=} \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{D}_Y$-module à gauche. Si Y est non caractéristique pour $\mathcal{M}$, i.e. si la projection ρ est propre (donc finie) sur $T^*X \times_X Y \cap SS(\mathcal{M})$, il est bien connu ([2],[8]) que $\mathcal{M}_Y$ est cohérent et que

$$SS(\mathcal{M}_Y) \subset \rho(T^*X \times_X Y \cap SS(\mathcal{M}))$$

(en fait on a même égalité).

Dans le cas général $\mathcal{M}_Y$ est réunion (localement) d'une suite croissante de $\mathcal{D}_Y$-modules cohérents $\mathcal{L}_k$, et l'on posera :

$$SS(\mathcal{M}_Y) \underset{\text{def}}{=} \bigcup_k SS(\mathcal{L}_k) \quad .$$

<u>Théorème 2</u> : Soit comme précédemment Y une sous-variété de X, $\Lambda = T^*_Y X \cap \dot{T}^*X$, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent. Alors $SS(\mathcal{M}_Y)$ est contenu dans :

$$\rho(SS(\mathcal{M}) \cap (T^*X \times_X Y \setminus \Lambda)) \cup \check{\rho}(C^1_\Lambda(\mathcal{M}) \cap T_\Lambda(T^*X \times_X Y))$$

et ce dernier ensemble est analytique fermé conique dans T^*Y.

Ce théorème est particulièrement utile quand $C^1_\Lambda(\mathcal{M}) = C_\Lambda(\mathcal{M})$ d'après le lemme 1.

Corollaire 3 : Supposons que $C^1_\Lambda(\mathcal{M}) = C_\Lambda(\mathcal{M})$. Alors dans les coordonnées $(y,t;\eta,\tau)$ on a

$$SS(\mathcal{M}_Y) \subset \{(y,\eta) \in T^*Y \ ; \ \exists \text{ une suite } (y_p,t_p;\eta_p,\tau_p) \text{ de } SS(\mathcal{M}) \text{ avec } (y_p,\eta_p) \to (y,\eta)\ ,\ t_p \to 0\ ,\ |t_p||\tau_p| \to 0\}.$$

Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{D}_X$-modules à gauche. On définit le $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ produit de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ par restriction à la diagonale Δ de $X \times X$ du $\mathcal{D}_{X\times X}$-module $\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N}$.
On obtient

Corollaire 4 : Supposons que $C^1_\Lambda(\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N}) = C_\Lambda(\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N})$, avec $\Lambda = \dot{T}^*_\Delta(X \times X)$. Alors $SS(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})$ est contenu dans $\{(x,\xi) \in T^*X \ ; \ \exists$ une suite (x_p,ξ_p) dans $SS(\mathcal{M})$, une suite (x'_p,ξ'_p) dans $SS(\mathcal{N})$ avec $x_p \to x$, $x'_p \to x$, $\xi_p + \xi'_p \to \xi$, $|x_p - x'_p|\ |\xi_p| \to 0\}$.

Ce résultat est à comparer à celui obtenu par D. Iagolnitzer qui étudiait le support singulier du produit de deux distributions [1].

Remarque et exemple : M. Kashiwara a démontré (non publié) que si $\mathcal{M}$ est un système holonome S.R. [4], $C^1_\Lambda(\mathcal{M}) = C_\Lambda(\mathcal{M})$ pour toute variété lagrangienne Λ.

Soit alors $f_1,\dots,f_\ell$ des fonctions holomorphes sur X, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, et

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}_X\Big(\prod_j f_j^{\lambda_j}\Big)$$

sur $X \times \mathbb{C}^\ell$ on considère le module

$$\mathcal{N} = \mathcal{D}_{X\times\mathbb{C}^\ell}\Big(\prod_j (t_j + f_j)^{\lambda_j}\Big)$$

dont la restriction à $X \times \{0\}$ vaut $\mathcal{M}$.

On obtient ainsi en appliquant le corollaire 3 que $SS(\mathcal{M})$ est contenu dans la réunion pour I partie de $\{1,\dots,\ell\}$ des fermés S_I :

$$(x,\xi) \in S_I \iff \text{il existe une suite } (x_p, a_{j,p})_{j\in I} \text{ dans } X \times \mathbb{C}^I$$
$$\text{telle que } x_p \to x,\ \sum_{j\in I} a_{j,p}\, df_j(x_p) \to \xi,\ a_{j,p} f_k(x_p) \to 0$$
$$\forall j \in I\ ,\ \forall k \in I\ .$$

Ce dernier résultat est à comparer à celui de [3].

REFERENCES

[1] IAGOLNITZER, D. : Essential support of the product of two distributions at "u = O points". Sem. Goulaouic-Schwartz 1978-79.

[2] KASHIWARA, M. : Algebraic study of partial differential equations. Thesis, Univ. of Tokyo 1971.

[3] KASHIWARA, M., KAWAI, T. : On holonomic systems for $\prod_{\ell=1}^{N} (f_\ell + \sqrt{-1}\ 0)^{\lambda_\ell}$ Publ. RIMS Kyoto Univ. 15 (1979) 551-575.

[4] KASHIWARA, M., KAWAI, T. : On holonomic systems of micro-differential equations III, Systems with regular singularities. Publ. RIMS, 1979, preprint.

[5] KASHIWARA, M., SCHAPIRA, P. : Probmème de Cauchy pour les systèmes micro-différentiels dans le domaine complexe. Inventiones Math. 46, 1978, pp.17-38.

[6] LAURENT, Y. : Double microlocalisation et problème de Cauchy dans le domaine complexe, in Proc. Les Houches Colloquium, Lecture Notes in Physics 126, 1980, Springer.

[7] MONTEIRO-FERNANDES, T. : Variété 1-microcaractéristique pour les $\mathcal{E}_X$-modules cohérents, C. R. Acad. Sc. Paris, t.290, 1980, pp. 787-790.

[8] SATO, M., KASHIWARA, M., KAWAI, T. : Microfunctions and pseudo differential equations, Lecture Notes in Math. 287, 1973, pp. 265-529.

* * * *