Journées Équations aux dérivées partielles

Jean-Michel Coron
Haïm Brézis

Une deuxième surface à courbure moyenne prescrite s'appuyant sur une courbe donnée

Journées Équations aux dérivées partielles (1983), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1983____A5_0>

Conférence n° 5

UNE DEUXIEME SURFACE A COURBURE MOYENNE

PRESCRITE S'APPUYANT SUR UNE COURBE DONNEE

par J.M. CORON

0 - INTRODUCTION -

Cet exposé porte sur un travail fait en collaboration avec H. Brézis ([2], [3]).

Soit Γ une courbe de Jordan "régulière" dans $\mathbb{R}^3$. On suppose que $\Gamma \subset B(0,R)$ où $B(0,R)$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon R. Soit H un réel strictement positif. On montre (théorème 2) que si

(1) $$H\,R < 1$$

alors il existe au moins deux surfaces à courbure moyenne H en tout point "régulier" s'appuyant sur Γ.

On montrera avant un théorème (théorème 1) qui nous servira pour la démonstration du théorème 2.

Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + y^2 < 1\}$.

Soit γ une application de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^3$. On suppose que

(2) $$\gamma \in H^{1/2}(\partial\Omega \; ; \; \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\partial\Omega \; ; \; \mathbb{R}^3)$$

et on pose $||\gamma||_\infty = R$.

On cherche des fonctions u de $H^1(\Omega \; ; \; \mathbb{R}^3)$ satisfaisant le système

(3) $$\Delta u = 2\,H\,u_x \wedge u_y$$

et une des deux conditions suivantes.

Condition de Dirichlet :

(4) $\quad u = \gamma$ sur $\partial\Omega$

Condition de Plateau : (on supposera dans ce cas γ injective)

$$(5) \quad \begin{cases} |u_x|^2 - |u_y|^2 = u_x . u_y = 0 \\ u(\partial\Omega) = \gamma(\partial\Omega) \\ \gamma^{-1} \circ u \text{ est croissante.} \end{cases}$$

On montre les deux théorèmes.

Théorème 1 : (Problème de Dirichlet)
Si (1) et

(6) $\quad \gamma$ n'est pas une application identiquement constante,

alors il existe au moins deux fonctions distinctes satisfaisant (3) et (4).

Théorème 2 : (Problème de Plateau)
Si (1) et si

(7) $\quad \gamma$ est continue et injective,

alors il existe au moins deux solutions géométriquement continues sur $\overline{\Omega}$ de (3) et (5).

Remarques : 1 - Si u vérifie (3) alors $u \in C^\infty(\Omega ; \mathbb{R}^3)$. Ce résultat est dû à H. Wente [12].

2 - Soit u une fonction vérifiant (3) et (5) alors en tout point x de Ω tel que $\nabla u(x) \neq 0$ la courbure moyenne de la surface $u(\Omega)$ au point x est H. On sait en outre que les points x de Ω tels que $\nabla u(x) = 0$ sont isolés si $u \not\equiv C$.

3 - Si $\gamma \equiv C$ alors $u \equiv C$ est la seule solution du problème de Dirichlet (comme du problème de Plateau). Ce résultat est dû à H. Wente [13].

4 - Rellich avait conjecturé (voir [7]) que sous les hypothèses

(1) et (7) il existe alors $H^* > 0$ tel que si $0 < H < H^*$ alors le problème de Plateau admet au moins deux solutions distinctes ; le théorème 2 démontre donc la conjecture de Rellich et précise que l'on peut prendre $H^* = 1/R$. K. Steffen avait montré dans [9] qu'il existe une suite H_n ; $H_n > 0$; $H_n \to 0$, tel que pour $H = H_n$ le problème de Plateau a au moins deux solutions.

5 - Si $\gamma(\partial\Omega)$ est un cercle centré en O et si $H R > 1$ alors le problème de Plateau n'a pas de solution. Ce résultat est dû à E. Heinz [5].

6 - L'existence d'au moins une solution pour le problème de Dirichlet comme pour le problème de Plateau (sous les hypothèses de ces théorèmes) est dûe à S. Hildebrandt [6] ; (1) pouvant d'ailleurs alors être remplacé par $H R \leqslant 1$.

7 - La démonstration du théorème 1 repose sur une méthode analogue à celles utilisées dans [1] et [4].

8 - Une application h de $\partial\Omega$ dans $\partial\Omega$ est dite croissante si il existe une application g croissante de $[\theta, 2\Pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$h(e^{i\theta}) = e^{ig(\theta)}$$

$$\text{et} \quad g(2\Pi) - g(o) = 2\Pi.$$

9 - Si q est un difféomorphisme conforme de $\overline{\Omega}$ dans $\overline{\Omega}$ et $q|_{\partial\Omega}$ est croissant (de $\partial\Omega$ dans $\partial\Omega$ - voir remarque 8), alors si u est une solution du problème de Plateau, u o q est solution du problème de Plateau et

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{4H}{3} \int_\Omega u.u_x \Lambda u_y = \int_\Omega |\nabla(uoq)|^2 + \frac{4H}{3} \int_\Omega (uoq).[(uoq)_x \Lambda (uoq)_y].$$

On dira que deux solutions u_1 et u_2 sont géométriquement distinctes s'il n'existe pas un tel difféomorphisme avec $u_2 = u_1$ o q.

Alors que ces résultats étaient annoncés dans [2], nous avons appris que M. Struwe [11] avait obtenu indépendamment des résultats partiels dans la même direction. Il a prouvé que les problèmes de Plateau et Dirichlet pour une certaine famille de fonctions γ "admissibles" ont deux solutions si

$H < H^*$ où H^* est une constante non explicitement donnée mais qui est inférieure à 1/2 R. K. Steffen [9] a ensuite montré que tout γ vérifiant (2) (et (7) pour le problème de Plateau) est admissible.

Nous remercions S. Hildebrandt et L. Nirenberg qui ont attiré notre attention sur ce problème.

Notations :

On notera H_o^1 pour $H_o^1(\Omega ; \mathbb{R}^3)$, L^∞ pour $L^\infty(\Omega ; \mathbb{R}^3)$ etc... ;

On notera $\int$ pour $\int_\Omega$, et on posera

$$Q(v) = \int v.v_x \wedge v_y$$

$$E(u) = \int |\nabla u|^2 + \frac{4H}{3} Q(u).$$

I - ESQUISSE DE DEMONSTRATION DU THEOREME 1 -

Elle se divise en 4 étapes. (Pour les détails voir [3]).

Etape 1 :

On rappelle les grandes lignes de la démonstration de S. Hildebrandt [6] pour l'existence d'au moins une solution $\underline{u}$.

Etape 2 :

On esquisse une démonstration du lemme

lemme 1 :

$\underline{u}$ étant la solution de l'étape 1,

$\exists\ \delta > 0$ tel que

$$\int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u}.v_x \wedge v_y \geqslant \delta \int |\nabla v|^2 \ \forall\ v \in H_o^1.$$

Etape 3 :

On définit $Q(V) = \int v.\ v_x \wedge v_y$ pour $v \in H_o^1$ et on montre que

$$J = \operatorname*{Inf}_{\substack{v \in H^1_o \\ Q(v) = 1}} \int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u}.\, v_x \wedge v_y < \operatorname*{Inf}_{\substack{v \in H^1_o \\ Q(v) = 1}} \int |\nabla v|^2$$

Etape 4 :

On montre que J est atteint pour un certain v^o et que $\overline{u} = \underline{u} - \frac{J}{2H} v^o$ est une autre solution du problème de Dirichlet.

Etape 1 :

Soit R' > R avec H R' < 1 et soit

$$K = \{u \in H^1 \;;\; u = \gamma \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } ||u||_\infty \leqslant R'\}$$

On montre qu'il existe $\underline{u} \in K$ tel que

(8) $$E(\underline{u}) \leqslant E(V) \quad \forall\, v \in K$$

On vérifie ensuite à l'aide du principe du maximum que $||\underline{u}||_\infty \leqslant R$, puis que $\underline{u}$ est solution du problème de Dirichlet.

Etape 2 :

Il s'agit de montrer le

Lemme 1 :

Soit $\underline{u} \in K$ tel que $E(\underline{u}) \leqslant E(v) \quad \forall\, v \in K$ alors :

(9) $$\exists\, \delta > 0 \text{ tel que } \int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u}.\, v_x \wedge v_y \geqslant \delta \int |\nabla v|^2, \; \forall\, v \in H^1_o.$$

Démonstration :

On voit facilement, à l'aide d'intégrations par parties, que :

(10) $$E(\underline{u} + v) = E(\underline{u}) + E(v) + 4H \int \underline{u} \,.\, v_x \wedge v_y, \; \forall\, v \in H^1_o\,.$$

Soit $v \in H^1_o \cap L^\infty$; comme $||\underline{u}||_\infty \leqslant R$, $\underline{u} + t\, v \in K$ pour t assez petit ; en utilisant alors (10) et (8) on a

(11) $$\int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u}.v_x \wedge v_y \geqslant 0.$$

Par densité (11) reste vrai pour tout v dans H^1_o on montre ensuite (voir [3]) que, en fait

(12) $$\int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u}.v_x \wedge v_y > 0 \quad \forall\, v \in H^1_o \;,\; v \neq 0.$$

On en déduit alors (9) en raisonnant par l'absurde.

<u>Etape 3</u> :

Soit $v \in H^1_o$, $v_x \wedge v_y \in L^1$ mais $v \notin L^\infty$ donc l'intégrale $Q(v) = \int v.\, v_x \wedge v_y$ n'a (à priori au moins) pas de sens. Mais on a le lemme suivant qui va nous permettre de donner un sens à $Q(v)$ pour $v \in H^1_o$:

<u>Lemme 2</u> :

(13) $$|Q(v)|^{2/3} \leqslant \frac{1}{S} \int |\nabla v|^2 \quad \forall\, v \in H^1_o \cap L^\infty$$

où $S = (3\; 2\Pi)^{1/3}$ est la meilleure constante.

Ce lemme est dû à H. Wente [12].

A l'aide du lemme 2 on voit facilement qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

(14) $$|Q(v) - Q(w)| \leqslant C\,||v-w||_{H^1_o}\left(||v||^2_{H^1_o} + ||w||^2_{H^1_o}\right) \quad \forall\, v \in H^1_o \cap L^\infty \quad \forall\, w \in H^1_o \cap L^\infty.$$

Cette inégalité permet d'étendre Q par continuité à H^1_o.

On a :

<u>Lemme 3</u> :

(15) $$J = \operatorname*{Inf}_{Q(v)=1} \int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u}.v_x \wedge v_y < S$$

Pour établir ce lemme on s'inspire des méthodes de [1] et [4]. C'est ici qu'intervient l'hypothèse (6). Pour une démonstration voir [3].

Etape 4 :

Montrons que J est atteint. Soit v^n une suite minimisante. On a donc :

$$Q(v^n) = 1 \text{ et } \int |\nabla v^n|^2 + 4H \int \underline{u}.v_x^n \wedge v_y^n = J + o(1). \tag{16}$$

Utilisant le lemme 1 et (16) on voit que $(v^n)_n$ est bornée dans H_o^1 ; quitte à extraire une sous-suite $v^n \rightharpoonup v$ faiblement dans H_o^1 ; soit $w^n = v^n - v$.

On a facilement (à l'aide d'intégrations par parties) avec (16) :

$$1 = Q(v^n) = Q(v) + Q(w^n) + o(1)$$

et

$$\int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u}.v_x \wedge v_y + \int |\nabla w_n|^2 = J + o(1).$$

D'où

$$J|Q(v)|^{2/3} + \int |\nabla w_n|^2 < J|Q(v)|^{2/3} + J|Q(w_n)|^{2/3} + o(1)$$

A l'aide des lemmes 2 et 3 on conclut alors que $w^n \to 0$ dans H_o^1 et donc v réalise l'infimum J.

On montre ensuite facilement que, J étant atteint en v,

$$-\Delta v + 2H(\underline{u}_x \wedge v_y + v_x \wedge \underline{u}_y) = J\, v_x \wedge v_y$$

et, par simple calcul, que $\overline{u} = \underline{u} - \frac{J}{2H} v$ est solution du problème de Dirichlet.

Remarque :

On vérifie aisément que

$$E(\overline{u}) = E(\underline{u}) + \frac{J^3}{12H^2} \tag{17}$$

d'où $E(\overline{u}) > E(\underline{u})$.

II - ESQUISSE DE DEMONSTRATION DU THEOREME 2 -

On ne donnera que les grandes lignes ; voir les détails dans [3].

Soit $$\varepsilon = \left\{ \alpha \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha \in C(\partial\Omega\, ;\, \mathbb{R}^3) \cap H^{1/2}(\partial\Omega\, ;\, \mathbb{R}^3),\ \alpha(\partial\Omega) = \gamma(\partial\Omega) \\ \gamma^{-1} \circ \alpha \text{ est croissante et laisse invariants les} \\ 3 \text{ points } e^{i\theta} \text{ avec } \theta = 0,\ \theta = \pm \frac{2\Pi}{3}. \end{array} \right\}$$

$\varepsilon \neq \emptyset$ car $\gamma \in \varepsilon$; soit $R' > R$ avec $H\,R' < 1$ et soit

$$\operatorname{Inf}\, \{E(v) \;|\; v \in H^1,\ \|v\|_\infty \leqslant R' \text{ et } v|_{\partial\Omega} \in \varepsilon\}.$$

On peut montrer (résultat dû à S. Hildebrandt [6], [7]) que cet Inf est atteint en au moins une fonction $\underline{u}_p$ qui est alors solution du problème de Plateau.

Soit maintenant $\alpha \in \varepsilon$ et soit $K_\alpha = \{u \in H^1 | u = \alpha \text{ sur } \partial\Omega$ et $\|u\|_\infty \leqslant R'\}$. On sait (voir II - étape 1) qu'il existe $\underline{u}^\alpha$ tel que

(18) $$\underline{u}^\alpha \in K_\alpha \text{ et } E(\underline{u}^\alpha) \leqslant E(v),\ \forall\, v \in K_\alpha$$

On peut montrer qu'un tel $\underline{u}^\alpha$ est unique.

Soit $$J(\alpha) = \operatorname*{Inf}_{Q(v)=1} \int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u}^\alpha . (v_x \wedge v_y)$$

et $$A(\alpha) = E(\underline{u}^\alpha) + \frac{J(\alpha)^3}{12\, H^2}$$

On montre qu'il existe $\alpha^o \in \varepsilon$ tel que :

$$A(\alpha^o) \leqslant A(\alpha) \quad \forall\, \alpha \in \varepsilon.$$

Soit alors $\overline{v} \in H^1_o$ réalisant $J(\alpha^o)$ et soit

$$\overline{u} = \underline{u}^{\alpha^o} - \frac{J(\alpha^o)}{2\,H}\, \overline{v} \text{ ; alors}$$

$E(\overline{u}) > E(u^{\alpha^o}) \geqslant E(\underline{u}_p)$ et on montre que $\overline{u}$ est solution du problème de Plateau.

REFERENCES

[1] : Th. AUBIN : "Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire". J. Math. Pures et Appl. 55 (1976), p. 269-296.

[2] : H. BREZIS - J.M. CORON : "Sur la conjecture de Rellich pour les surfaces à courbure moyenne prescrite". C.R. Acad. Sc. 295 (1982) I p. 615-619.

[3] : H. BREZIS - J.M. CORON : "Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture". Comm. Pure Appl. Math. (à paraître).

[4] : H. BREZIS - L. NIRENBERG : "Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents". A paraître.

[5] : E. HEINZ : "On the nonexistence of a surface of constant mean curvature with finite area and prescribed rectifiable boundary". Archive Rat. Mech. Anal. 35 (1969), p. 249-252.

[6] : S. Hildebrandt : "On the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature". Comm. Pures Appl. Math. 23 (1970), p. 97-114.

[7] : S. Hildebrandt : "Nonlinear elliptic systems and harmonic mappings". Proc. Beijing Symp. Diff. Geom. and Diff. Eq. Beijing. A paraître.

[8] : C. MORREY : "Multiple integrals in the calculus of variations". Springer (1966).

[9] : K. STEFFEN : "Flächen constanter mittlerer krümmung mit vorgegebenem volumen öder flächeninhalt". Archive Rat. Mech. Anal. 49 (1972), p. 99-128.

[10] : K. STEFFEN : "On the nonuniqueness of surfaces with prescribed mean curvature spanning a given contour". A paraître.

[11] : M. STRUWE : "Nonuniqueness in the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature". A paraître.

[12] : H. WENTE : "An existence theorem for surfaces of constant mean curvature". J. Math. Anal. Appl. 26 (1969), p. 318-344.

[13] : H. WENTE : "The differential equation $\Delta x = 2H(x_u \wedge x_y)$ with vanishing boundary valeus". Proc. A.M.S. 50 (1975), p. 131-137.