Jean Duchon

Raoul Robert

Évolution d’une interface par capillarité et diffusion de volume. Estimations a priori et résultats d’existence

Journées Équations aux dérivées partielles (1984), p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1984____A9_0>

EVOLUTION D'UNE INTERFACE PAR CAPILLARITE ET DIFFUSION DE VOLUME. ESTIMATIONS A PRIORI et RESULTATS D'EXISTENCE.

Jean DUCHON et Raoul ROBERT

I.M.A.G.
B.P. n° 68
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
FRANCE

INTRODUCTION

Nous considérons le problème d'évolution d'interface suivant : à l'instant t , Ω_t est un domaine du plan dont la frontière Γ_t se déplace à une vitesse (mesurée suivant la normale extérieure ν) égale à $-\frac{\partial K}{\partial \nu}$, dérivée normale d'une fonction harmonique dans Ω_t dont la valeur au bord est égale à la courbure K de Γ_t . Ceci est un modèle du phénomène de corrosion par capillarité et diffusion de volume (cf. [1], [5]).

Nous nous proposons, d'une part d'établir des estimations a priori sur la solution dans le cas où Γ_t est un graphe de fonction (estimations impliquant notamment que pour une condition initiale convenable, le maximum $m(t)$ de la pente de Γ_t reste borné au cours du temps) ; d'autre part de monter l'existence d'une solution (globale ou locale en temps) lorsque la donnée initiale est une courbe corde-arc vérifiant une certaine condition de régularité (courbes appelées "2-smooth" par S. Semmes [6]).

La technique de démonstration consiste à faire apparaître la solution comme point fixe d'un opérateur contractant à partir d'une formulation intrinsèque de l'équation d'évolution. Pour ce faire, on ramène l'étude de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \nu}$ à celle de noyaux associés à l'interface Γ_t .

Nous remercions Michel Zinsmeister pour ses références et sa conversation agréable et instructive.

§ 1. ECRITURE DE L'EQUATION ET NOTATIONS.

Nous ne considèrerons que des courbes rectifiables que nous supposerons paramétrées par l'abscisse curviligne :

$$\Gamma = \{z(s) : s \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C} .$$

Nous supposerons que ces courbes vérifient la condition corde-arc, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$|s-\sigma| \leq \gamma |z(s) - z(\sigma)| .$$

On notera

$$z'(s) = e^{i\varphi(s)} .$$

Si Γ est le graphe d'une fonction lipschitzienne, on a $|\varphi(s)| \leq \alpha < \pi/2$ et Γ est corde-arc avec $\gamma = \frac{1}{\cos \alpha}$.

Notons Ω l'ouvert situé à gauche de Γ , $\tau = e^{i\varphi}$ le vecteur unitaire tangent, $\nu = - ie^{i\varphi}$ le vecteur normal sortant et $n = -\nu$.

Nous désignerons par $\frac{\partial f}{\partial \nu}(s)$ la trace dérivée normale, convenablement définie, au point $z(s)$ de Γ , de la solution U du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega , \\ U(z(s)) = f(s) . \end{cases}$$

Enfin pour Γ suffisamment régulière, on notera $K(s) = \varphi'(s)$ la courbure de Γ au point $z(s)$, de sorte que :

$$\frac{d\tau}{ds} = Kn .$$

Décrivons maintenant l'évolution de l'interface.

Nous supposerons l'interface infinie Γ_t donnée par la représentation paramétrique régulière $\tilde{z}(t,\sigma)$, σ étant une abscisse curviligne sur Γ_t .

Nous allons montrer qu'on peut se ramener à prendre à chaque instant l'origine de l'abscisse curviligne sur une même trajectoire orthogonale aux Γ_t . Cela revient à chercher une fonction $h(t)$ telle qu'en effectuant le changement de variable admissible $(t,\sigma) \to (t,s)$, $s = \sigma - h(t)$, la nouvelle représentation paramétrique $z(t,s) = \tilde{z}(t,s+h(t))$ vérifie :

$$(0) \qquad \frac{\partial z}{\partial t}(t,0) \cdot \frac{\partial z}{\partial s}(t,0) = 0 \ , \qquad \forall t \geq 0 \ ,$$

et donc :

$$\frac{dh}{dt}(t) = - \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}(t,h(t)) \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \sigma}(t,h(t)) \ .$$

Cette équation différentielle assure l'existence d'une solution locale unique $h(t)$ pour toute donnée initiale. Nous supposerons désormais Γ_t paramétrée par une telle représentation $z(t,s)$.

L'équation d'évolution de Γ_t s'écrit alors :

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t,s) \cdot \nu(t,s) = - \frac{\partial K}{\partial \nu}(t,s) \ .$$

Calculons $\dfrac{\partial z}{\partial t} \cdot \tau$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial t} \cdot \tau\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} \cdot \tau + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot K n = K \frac{\partial K}{\partial \nu}$$

(car $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} \cdot \tau = \dfrac{\partial \tau}{\partial t} \cdot \tau = 0$), ce qui, avec (0) , donne :

$$\frac{\partial z}{\partial t} \cdot \tau = \int_0^s K \frac{\partial K}{\partial \nu} \, d\sigma$$

d'où $z(t,s)$ vérifie :

$$(E\,z)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = -\dfrac{\partial K}{\partial \nu}\nu + \left(\displaystyle\int_0^s K\,\frac{\partial K}{\partial \nu}\,d\sigma\right)\tau \ , \\ z(0,s) = z_0(s) \ . \end{cases}$$

Dérivant cette équation par rapport à s (en remarquant que $\dfrac{\partial \nu}{\partial s} = K\tau$), on obtient :

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \left(-\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial K}{\partial \nu} - K\int_0^s K\frac{\partial K}{\partial \nu}\,d\sigma\right)\nu \ ,$$

or $\quad \dfrac{\partial \tau}{\partial t} = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\nu$, on obtient donc l'équation en φ :

$$(E\,\varphi)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial s}\dfrac{\partial K}{\partial \nu} = K\displaystyle\int_0^s K\frac{\partial K}{\partial \nu}d\sigma \quad , \quad K = \dfrac{\partial \varphi}{\partial s} \ , \\ \varphi(0,s) = \varphi_0(s) \ . \end{cases}$$

Les paragraphes suivants sont consacrés à l'étude de cette équation. Il nous arrivera fréquemment de désigner par D l'opérateur de dérivation par rapport à s .

§ 2. ESTIMATIONS A PRIORI.

Afin d'éviter des justifications fastidieuses, les manipulations qui suivent pour obtenir les estimations sont à prendre formellement (elles n'ont de sens qu'en supposant la solution du problème d'évolution suffisamment régulière et plate à l'infini).

On suppose donc pour la suite de ce paragraphe que $z(t,s)$ est une solution ad hoc.

Estimation 1.

Notons $L(\varphi) = \int (1-\cos\varphi(t,s))ds$, $L(\varphi)$ mesure "l'allongement" de la courbe Γ_t par rapport à l'axe réel. Calculons :

$$\frac{dL}{dt} = \int \sin\varphi\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}ds \ ,$$

soit, en utilisant $(E\varphi)$ et en intégrant par parties en remarquant que $\sin\varphi K = \frac{\partial}{\partial s}(1-\cos\varphi)$:

$$\frac{dL}{dt} = -\int K\frac{\partial K}{\partial \nu}ds .$$

D'où

$$(1) \qquad \frac{dL}{dt} + E = 0 ,$$

en posant $E = \int K\frac{\partial K}{\partial \nu}ds = \int_{\Omega_t}(\nabla C)^2 dx$, où $C(t,x)$ désigne la fonction harmonique sur Ω_t dont la valeur au bord sur Γ_t est $K(t,s)$ (cf. par exemple [2] pour un cadre convenable pour ce problème de Dirichlet).

(1) implique $\frac{dL}{dt} \leq 0$ d'où L décroit avec le temps.

<u>Estimation 2.</u>

On calcule

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla C)^2 dx - \int(\nabla C)^2\frac{\partial K}{\partial \nu}ds .$$

On a :

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla C)^2 dx = 2\int_{\Omega_t}\nabla C \cdot \nabla\frac{\partial C}{\partial t}dx = 2\int\frac{\partial K}{\partial \nu}\frac{\partial C}{\partial t}ds .$$

Calculons $\frac{\partial C}{\partial t}$ sur Γ_t :

sachant que $K(t,s) = C(t,z(t,s))$, on obtient

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial t} + \nabla C.\frac{\partial z}{\partial t} .$$

En utilisant l'équation (Ez) , l'équation en K obtenue en dérivant $(E\varphi)$ par rapport à s et l'égalité $(\nabla C)^2 = \left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial \nu}\right)^2$ sur Γ_t , on obtient finalement :

$$(2) \qquad \frac{dE}{dt} + 2Q = 2\int\left(K\frac{\partial K}{\partial \nu}\right)^2 ds + \int\left(\frac{\partial K}{\partial \nu}\right)^3 ds - \int\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)^2\frac{\partial K}{\partial \nu}ds ,$$

où on note $Q = \int\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial K}{\partial \nu}\right)^2 ds$.

Exploitation des estimations (1) et (2).

En supposant que $z(t,s)$ est une solution "convenable" du problème d'évolution pour $t \in [0,T]$, on pose $m(t) = |\operatorname{tg} \varphi(t,.)|_\infty$, où $|f|_p$ désigne la norme d'une fonction f dans L^p, $1 \leq p \leq \infty$.

On va montrer que si $m(0)$, $L(0)$, $E(0)$ sont assez petits, $m(t)$, $L(t)$, $E(t)$ restent bornés sur $[0,T]$.

Dans ce but, on va majorer les termes de droite de l'estimation (2) à l'aide des quantités m, L, E, φ. La lettre c désignera diverses constantes et $c(m)$ diverses fonctions de m continues et croissantes.

Examinons le premier terme :

$$\int \left(K \frac{\partial K}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma \leq \left|\frac{\partial K}{\partial \nu}\right|_\infty^2 |K|_2^2 .$$

Par interpolation, on a :

$$|K|_2 \leq |\varphi|_2^{1/3} |\Lambda^{1/2} K|_2^{2/3} ,$$

où Λ^s est défini par transformation de Fourier :

$$\widehat{\Lambda^s f}(\xi) = |2\pi\xi|^s \hat{f}(\xi) .$$

Comme on a, d'après [2], $|\Lambda^{1/2} K|_2^2 \leq (m+\sqrt{1+m^2})E$ et $|\varphi|_2 \leq c L^{1/2}$, il vient $|K|_2^2 \leq c(m) L^{1/3} E^{2/3}$.

D'autre part :

$$\left|\frac{\partial K}{\partial \nu}\right|_\infty \leq \left|\frac{\partial K}{\partial \nu}\right|_2^{1/2} \left|\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial K}{\partial \nu}\right|_2^{1/2} .$$

Introduisons maintenant K^*, trace sur Γ_t de C^* fonction harmonique conjuguée de C, on a $\dfrac{\partial K}{\partial \nu} = \dfrac{\partial K^*}{\partial s}$

et $$\left|\frac{\partial K^*}{\partial s}\right|_2 \leq |\Lambda^{1/2} K^*|_2^{2/3} \left|\frac{\partial^2}{\partial s^2} K^*\right|_2^{1/3} .$$

Or on a également, d'après [2],

$$|\Lambda^{1/2} K^*|_2^2 \leq (m+\sqrt{1+m^2})E ,$$

d'où $\quad \left|\dfrac{\partial K}{\partial \nu}\right|_\infty \leq c(m)E^{1/6}Q^{1/3}$,

et $\quad \displaystyle\int \left(K\frac{\partial K}{\partial \nu}\right)^2 ds \leq c(m)L^{1/3}Q^{2/3}$.

Le deuxième terme est alors immédiat :

$$\left|\int\left(\frac{\partial K}{\partial \nu}\right)^3 ds\right| \leq \left|\frac{\partial K}{\partial \nu}\right|_\infty \left|\frac{\partial K}{\partial \nu}\right|_2^2 \leq c(m)E^{5/6}Q^{2/3} .$$

Et le troisième terme se traite grâce à l'inégalité de Payne-Weinberger (cf. [4]) :

$$\left|\frac{\partial K}{\partial s}\right|_2 \leq \left(m+\sqrt{m^2+\sqrt{1+m^2}}\right)\left|\frac{\partial K}{\partial \nu}\right|_2 ,$$

et on obtient :

$$\left|\int\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)^2 \frac{\partial K}{\partial \nu} ds\right| \leq \left|\frac{\partial K}{\partial \nu}\right|_\infty \left|\frac{\partial K}{\partial s}\right|_2^2 \leq c(m)E^{5/6}Q^{2/3} .$$

D'où finalement (2) donne :

$$\frac{dE}{dt} + 2Q \leq c(m)\left[L^{1/3}EQ^{2/3} + E^{5/6}Q^{2/3}\right] ,$$

soit en appliquant l'inégalité de Young :

$$\frac{dE}{dt} + 2Q \leq c(m)(E+2Q)[E^{1/2}+E+L] .$$

Posons $M = L+E$ et additionnons cette inégalité avec (1), il vient :

$$\text{(3)} \qquad \frac{dM}{dt} \leq [c(m)(M+M^{1/2})-1](E+2Q) .$$

Par ailleurs, on a :

$$|\varphi|_\infty \leq |\varphi|_2^{1/2}\,|K|_2^{1/2} ,$$

d'où il vient :

$$|\varphi|_\infty \leq c(m+\sqrt{1+m^2})^{1/6}M^{1/2}$$

et comme $m = \operatorname{tg}|\varphi|_\infty$, on a :

$$\text{(4)} \qquad \frac{\operatorname{Arctg} m}{(m+\sqrt{1+m^2})^{1/6}} \leq cM^{1/2} .$$

On déduit facilement de (3) et (4) que si la condition initiale est choisie telle que :

$$\begin{cases} m_0 < m^* , \\ c(m^*)(M_0+M_0^{\frac{1}{2}}) < 1 , \\ c\, M_0^{\frac{1}{2}} < \dfrac{\operatorname{Arctg} m^*}{(m^*+\sqrt{1+m^{*2}})^{1/6}} , \end{cases}$$

où m^* est la valeur où la fonction $\dfrac{\operatorname{Arctg} m}{(m+\sqrt{1+m^2})^{1/6}}$ atteint son maximum ;

alors sur $[0,T]$, on a $m(t) \leq m^*$ et $M(t) \leq M_0$.

§ 3. RESULTATS D'EXISTENCE.

On note $V^{\frac{1}{2}} = V^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions u localement intégrables telles que $\dfrac{u(\sigma)-u(s)}{\sigma - s} \in L^2(ds\, d\sigma)$. On vérifie facilement que $V^{\frac{1}{2}}$ est l'espace des distributions tempérées u telles que $\hat{u'}$ soit localement intégrable avec $\int |\xi|^{-1} |\hat{u'}|^2 d\xi < +\infty$. Et on notera

$$|u|_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{u(\sigma)-u(s)}{\sigma - s} \right|_{L^2(ds\, d\sigma)} = |\Lambda^{\frac{1}{2}} u|_2 .$$

THEOREME 1 (existence locale). - Pour toute courbe corde-arc Γ_0 avec $\varphi_0 \in V^{\frac{1}{2}}$, il existe $T > 0$ et $\varphi(t,s) \in L^\infty(0,T; V^{\frac{1}{2}}) \cap C([0,T] ; \mathcal{D}')$ avec $t^{\frac{1}{2}} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \in L^\infty(0,T; L^2)$, solution de $(E\varphi)$.

THEOREME 2 (existence globale). - Il existe $\mu > 0$ tel que si $|\varphi_0|_{\frac{1}{2}} \leq \mu$, il existe $\varphi(t,s) \in L^\infty(0,\infty ; V^{\frac{1}{2}}) \cap C([0,\infty[; \mathcal{D}')$ avec $t^{\frac{1}{2}} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \in L^\infty(0,\infty ; L^2)$, solution de $(E\varphi)$.

On met $(E\varphi)$ sous la forme $\mathcal{T}\psi = \psi$, où

$\mathcal{T}\psi(t) = \int_0^t N_{t-\theta} * F(\varphi(\theta))d\theta$ avec $\hat{N}_t(\xi) = e^{-t|2\pi\xi|^3}$, $\varphi(t) = N_t * \varphi_0 + \psi(t)$

et $F(\varphi) = K \int_0^s K \dfrac{\partial K}{\partial \nu} ds + D\left(\dfrac{\partial}{\partial \nu} - \Lambda\right) K$, $K = D\varphi$.

On montre que $\mathcal{T}$ est contractant sur une boule de l'espace W_T des fonctions $\psi(t,s)$ telles que ψ et $D^2\psi$ appartiennent à $C(]0,T[\,;L^2)$ avec $|\psi(t)|_2 \leq ct^{1/6}$ et $|D^2\psi(t)|_2 \leq ct^{-\frac{1}{2}}$, muni de la norme

$$\|\psi\| = \sup_{0<t<T} \max\left\{t^{-1/6}|\psi(t)|_2 \,,\, t^{\frac{1}{2}}|D^2\psi(t)|_2\right\} \quad ;$$

$T>0$ assez petit pour l'existence locale , $T=+\infty$ pour l'existence globale.

Pour cela, on estime $\|\mathcal{T}\psi\|$ et $\|\mathcal{T}\psi_1 - \mathcal{T}\psi_2\|$ suivant

$$|D^j\mathcal{T}\psi(t)|_2 \leq \int_0^t |D^jN_{t-\theta}|_1 \, |F(\varphi(\theta))|_2 d\theta \ ,$$

$$|D^j(\mathcal{T}\psi_1(t) - \mathcal{T}\psi_2(t))|_2 \leq \int_0^t |D^jN_{t-\theta}|_1 \, |F(\varphi_1(\theta)) - F(\varphi_2(\theta))|_2 d\theta$$

en remarquant que

$$|D^jN_{t-\theta}|_1 = a_j(t-\theta)^{-j/3} \ .$$

D'autre part, on a :

PROPOSITION 1. - <u>Pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe</u> $\rho > 0$ <u>tel que l'on ait</u>

(I) $|F(\varphi)|_2 \leq \varepsilon R^{5/3}$ <u>dès que</u> $|\varphi|_{\frac{1}{2}} \leq \rho$ <u>et</u> $|D^2\varphi|_2 \leq R$,

(II) $|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)|_2 \leq \varepsilon(R^2|\varphi_1-\varphi_2|_2 + R^{2/3}|D^2(\varphi_1-\varphi_2)|_2)$

<u>si</u> φ_1 et φ_2 <u>sont comme</u> φ <u>ci-dessus avec en outre</u> $\varphi_1 - \varphi_2 \in L^2$.

PROPOSITION 2. - <u>Soit</u> Γ_0 <u>une courbe corde-arc avec</u> $\varphi_0 \in V^{\frac{1}{2}}$. <u>Il existe</u> c <u>et</u> $\rho > 0$ <u>tels que l'on ait</u> :

(I') $|F(\varphi)|_2 \leq cR^{5/3}$ <u>si</u> $|\varphi-\varphi_0|_{\frac{1}{2}} \leq \rho$ <u>et</u> $|D^2\varphi|_2 \leq R$,

(II') $|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)|_2 \leq c(R^2|\varphi_1-\varphi_2|_2 + R^{2/3}|D^2(\varphi_1-\varphi_2)|_2)$.

<u>Si</u> φ_1 <u>et</u> φ_2 <u>sont comme</u> φ <u>ci-dessus avec en outre</u> $\varphi_1 - \varphi_2 \in L^2$.

Appliquant la proposition 1, on obtient le théorème 2. En effet, on a :

$$\varphi(t) = N_t * \varphi_0 + \psi(t) ,$$

d'où $\quad |\varphi(t)|_{\frac{1}{2}} \le c|\varphi_0|_{\frac{1}{2}} + |\psi(t)|_2^{3/4} \, |D^2\psi(t)|_2^{1/4} \le c|\varphi_0|_{\frac{1}{2}} + r$

si $\quad \|\psi\| \le r \quad ;$

et $\quad |D^2\varphi(t)|_2 \le |\Lambda^{\frac{1}{2}}\varphi_0|_2 \, |\Lambda^{3/2}N_t|_1 + |D^2\psi(t)|_2 \le (c|\varphi_0|_{\frac{1}{2}} + r)t^{-\frac{1}{2}} .$

Il est alors facile de trouver $r > 0$ tel que la boule de rayon r de W_∞ soit conservée par $\mathcal{J}$, avec en outre $\|\mathcal{J}\psi_1 - \mathcal{J}\psi_2\| \le \delta\|\psi_1 - \psi_2\|$, $\delta < 1$.

Pour l'existence locale, on applique la proposition 2, en remarquant que $N_t * \varphi_0 \to \varphi_0$ dans $V^{\frac{1}{2}}$. D'autre part, utilisant la densité de $\mathcal{D}$ dans $V^{\frac{1}{2}}$, on a $|D^2(N_t * \varphi_0)|_2 = 0(t^{-\frac{1}{2}})$. Alors $\mathcal{J}$ devient contractant sur la boule de rayon r de W_T pour r et T assez petits.

La preuve des propositions repose sur une expression de $\frac{\partial}{\partial\nu} - \Lambda$ à l'aide d'opérateurs intégraux :

$$\frac{\partial}{\partial\nu} - \Lambda = (Y - HX)(\tfrac{1}{2}H + X)^{-1}D ,$$

où H est la transformation de Hilbert et X et Y sont donnés par les parties réelle et imaginaire du noyau

$$Z(s,\sigma) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\sigma - s} - \frac{z'(s)}{z(\sigma) - z(s)}\right) .$$

Pour une courbe corde-arc avec $\varphi \in V^{\frac{1}{2}}$, ce noyau appartient à $L^2(ds\,d\sigma)$: on peut le voir par exemple en posant $\sigma = s + h$, prenant la transformée de Fourier de $z(s+h) - z(s) - hz'(s)$, et appliquant Plancherel. L'opérateur Z défini par $Zf(s) = \int Z(s,\sigma)f(\sigma)d\sigma$ est donc compact, donc aussi X et Y .

On obtient l'expression de $\frac{\partial}{\partial\nu} - \Lambda$ en étudiant le potentiel de simple couche de densité $g \in L^2(\Gamma)$:

$$\mathcal{S}g(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{Log}\left|\frac{z(\sigma)-\zeta}{z(\sigma)-\zeta_0}\right| g(\sigma)d\sigma ,$$

calculant

$$\lim_{\zeta\to z(s)} \nabla \mathcal{S}g(\zeta).\nu(s) = -\frac{1}{2}g(s) + Yg(s)$$

(limite non tangentielle dans Ω), ainsi que

$$\frac{d}{ds}\mathcal{S}g(z(s)) = \frac{1}{2}Hg(s) + Xg(s) .$$

La solution U du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & \text{dans } \Omega , \\ U(z(s)) = f(s) , \end{cases}$$

si $Df \in L^2$, s'écrit $U = \mathcal{S}g + c$ où $g = (\frac{1}{2}H+X)^{-1}Df$. L'existence de $(\frac{1}{2}H+X)^{-1}$ résulte de l'alternative de Fredholm.

La majoration des différents termes de $|F(\varphi)|_2$ et $|F(\varphi_1)-F(\varphi_2)|_2$ dans les propositions 1 et 2, nécessite une estimation de la constante corde-arc pour φ voisin de 0 ou de φ_0 dans $V^{\frac{1}{2}}$ (calcul simple).

D'autre part, il faut estimer $(\frac{1}{2}H+X)^{-1}$, ce qui se fait par perturbation au voisinage de $(\frac{1}{2}H+X_0)^{-1}$ en écrivant

$$(\frac{1}{2}H+X)^{-1} = (I+(\frac{1}{2}H+X_0)^{-1}(X-X_0))^{-1}(\frac{1}{2}H+X_0)^{-1}$$

et en majorant $\|X-X_0\|_{op}$ pour $|\varphi-\varphi_0|_{\frac{1}{2}}$ petit :

LEMME 1. - <u>Si</u> Γ_0 <u>et</u> Γ <u>sont corde-arc de constantes</u> γ_0 , γ <u>avec</u> $\varphi-\varphi_0 \in V^{\frac{1}{2}}$, <u>alors</u>

$$\|Z-Z_0\|_{op} \le c\gamma\gamma_0|\varphi-\varphi_0|_{\frac{1}{2}} .$$

Pour le démontrer, on écrit

$$2\pi(Z-Z_0)(s,s+h) = \frac{h}{z(s+h)-z(s)}\cdot\frac{h}{z_0(s+h)-z_0(s)}\int_0^1 T_\lambda(s,h)d\lambda$$

où $$T_\lambda = \frac{1}{h}\left(e^{i\varphi(s+\lambda h)}e^{i\varphi_0(s)} - e^{i\varphi(s)}e^{i\varphi_0(s+\lambda h)}\right) ,$$

et on estime $|T_\lambda|_{L^2(ds\,dh)}$ en fonction de $|\varphi-\varphi_0|_{\frac{1}{2}}$.

Les estimations (I) et (I') résultent alors d'une majoration de $\|DZ\|_{op}$:

LEMME 2. - *Soit* Γ *corde-arc de constante* γ *avec* $\varphi \in V^{\frac{1}{2}}$ *et* $D\varphi \in V^{\frac{1}{2}} \cap L^\infty$. *Alors*

$$\|DZ\|_{op} \leq \left|\frac{\partial Z}{\partial s}\right|_{L^2(ds\,d\sigma)} \leq c(\gamma)|D\varphi|_{\frac{1}{2}} + c(\gamma)|D\varphi|_\infty |\varphi|_{\frac{1}{2}}.$$

Pour les estimations (II) et (II'), il faut en outre majorer $\|DZ_1 - DZ_2\|_{op}$:

LEMME 3. - *Soit* Γ_1 *et* Γ_2 *corde-arc de constante* $\leq \gamma$ *avec* $\varphi_1, \varphi_2 \in V^{\frac{1}{2}}$ *de norme* $\leq \beta$, $D^2\varphi_1, D^2\varphi_2 \in L^2$ *de norme* $\leq R$ *et* $\varphi_1 - \varphi_2 \in L^2$. *Alors*

$$\|DZ_1 - DZ_2\|_{op} \leq c(\gamma,\beta)(R|\varphi_1-\varphi_2|_2 + R^{-1/3}|D^2(\varphi_1-\varphi_2)|_2),$$

où $c(\gamma,\beta)$ *tend vers* 0 *avec* β.

Certains détails paraîtront dans [3], où l'existence locale est prouvée pour une courbe initiale Γ_0 lipschitzienne ($|\varphi_0|_\infty < \frac{\pi}{2}$) avec $\varphi_0, D^2\varphi_0 \in L^2$.

REFERENCES.

[1] L. COUDURIER, N. EUSTATHOPOULOS, J.C. GJOUD, P. DESRE, Corrosion intergranulaire du cuivre par le plomb liquide sous l'effet des forces capillaires. Journal de Chimie physique, 3, 1977, p. 289-294.

[2] J. DUCHON, R. ROBERT, Quelques inégalités pour les potentiels sur un domaine lipschitzien. A paraître.

[3] J. DUCHON, R. ROBERT, Evolution d'une interface par capillarité et diffusion de volume, I existence locale en temps. A paraître, Ann. I.H.P., Analyse non linéaire.

[4] Y. MEYER, Théorie du potentiel dans les domaines lipschitziens d'après G.C. Verchota. Séminaire GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ, 1982-83, n° 5.

[5] W.W. MULLINS, Grain boundary grooving by volume diffusion. Transactions of the metallurgical society of AIME, 218, 1960, p. 354-361.

[6] S.W. SEMMES, The Cauchy integral and related operators on smooth curves. Thèse, Washington Univ., Saint Louis, 1983.

[7] C. POMMERENKE, Univalent functions, Vanderhoech and Ruprecht, Göttingen, 1975.
