

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

SERGE ALINHAC

Évolution d'une onde simple pour des équations non-linéaires générales

Journées Équations aux dérivées partielles, n° 1 (1985), p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1985__1_A10_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EVOLUTION D'UNE ONDE SIMPLE POUR DES EQUATIONS NON-LINEAIRES GENERALES.

par S. ALINHAC

Univ. de Paris Sud, Orsay.

Introduction et présentation du résultat.

Nous considérons des solutions u d'une équation non-linéaire générale d'ordre m (ou d'un système) :

$$F(y, u, \dots, \partial_y^\alpha u, \dots) = 0, \quad |\alpha| \leq m, \quad y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

dans une région où u ne présente pas de chocs.

(C'est-à-dire, ici, $u \in H_{loc}^{s+m}(\Omega)$, $s > n/2$).

On s'intéresse à une situation d'évolution : on suppose $y = (t, x)$, $0 \in \Omega$, et les deux hypothèses suivantes :

i) L'opérateur $P = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}(\dots) \partial_y^\alpha$ linéarisé de F sur

$u(u^{(\alpha)} = \partial_y^\alpha u = \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial y^\alpha} u)$ est strictement hyperbolique par rapport aux

surfaces $t = \text{cte}$ dans Ω .

ii) L'ouvert Ω_+ est un domaine d'influence de Ω_- .

($\Omega_+ = \{y \in \Omega, t \geq 0\}$), c'est-à-dire que toute caractéristique

réelle de P issue d'un point de Ω_+ atteint un point de Ω_- .

Le problème est de décrire les singularités de u dans Ω_+ , connaissant ces singularités dans Ω_- .

Bien entendu, on désire que ces singularités ne soient pas trop nombreuses, par exemple qu'elles restent confinées au-dessus d'un nombre fini de surfaces caractéristiques (u étant C^∞ en dehors de ces surfaces) : on dira alors qu'on décrit l'évolution et les interactions de plusieurs ondes simples (ou progressives).

Les résultats obtenus à ce jour concernent deux cas :

a) $n = 2$; les travaux de Rauch-Reed [8], [9] donnent une description assez complète des phénomènes.

b) L'équation est semi-linéaire, de la forme :

$$P(y, D_y) u + G(y, u, \dots, u^{(\alpha)}, \dots) = 0, \quad |\alpha| \leq m-1,$$

P satisfait toujours i) et ii).

Les théorèmes généraux d'interaction d'au plus deux ondes sont dus à Bony [5] [6], tandis que des situations plus complexes ont été étudiées lorsque $P = \square$ (opérateur des ondes) par Bony [6], Melrose-Ritter [7], M. Beals [3].

Nous abordons ici l'étude du cas général complètement non-linéaire dans le cas le plus simple de l'évolution d'une seule onde progressive.

Rappelons d'abord la définition des distributions conormales à une surface régulière Σ (cf. [5]) : $v \in H^{s,k}(\Sigma)$ ($s \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$) si, pour tout $\ell \leq k$, $Z_{i_1} \dots Z_{i_\ell} v \in H^s$, les Z_j étant des champs C^∞ tangents à Σ .

On suppose ici qu'il existe une surface S , caractéristique pour P , d'équation $x_1 = \varphi(t, x')$ dans Ω , $x = (x_1, x')$, $\varphi(0,0) = 0$, $\varphi \in H_{loc}^\sigma$, telle que :

(H) Pour $t < 0$, S est C^∞ , et $u \in H^{s+m,\infty}(S)$.

En particulier, u est C^∞ , dans le passé, hors de S , avec seulement des singularités normales à S : c'est l'onde simple.

Nous allons esquisser la démonstration du théorème suivant :

Théorème : Soient $s > (n/2) + (7/2)$, $\sigma > (n/2) + (3/2)$, et supposons donnée une solution u de l'équation satisfaisant i), ii) et (H).

Alors S est C^∞ dans Ω , et $u \in H^{s+m,\infty}(S)$ dans tout Ω .

Le théorème montre que u n'a de singularités que sur S dans le futur, mais aussi que S est C^∞ , fait remarquable du à la grande régularité tangentielle de u dans le passé.

Le cas de l'interaction de deux ondes simples (ou du problème de Cauchy avec données singulières à travers une surface) fera l'objet d'une publication ultérieure; la situation géométrique y est plus complexe, les surfaces caractéristiques issues de l'arête T n'étant alors C^∞ qu'en dehors de Γ .

I. ETAPES DE LA PREUVE DU THEOREME :

Il y en a trois, que l'on peut décrire succinctement comme suit :

1^{ère} étape : Redressement de S par transport / paralinéarisation de l'équation.

On considère le difféomorphisme $\chi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega$ défini par :

$$\chi(x_1, t, x') = (x_1 + \rho(t, x'), t, x'),$$

tel que $\chi^{-1}(S) = \Sigma = \{x_1 = 0\}$.

Ce difféomorphisme est, en général, de classe au mieux $H^{s-(1/2)}$, en sorte qu'on ne peut même pas envisager un tel changement de variables dans l'équation, qui est d'ordre m .

On est donc amené à transporter l'équation par un "paradifféomorphisme" χ^* associé à χ , d'une façon qu'on va expliquer plus loin (partie II).

On obtient alors une équation paradifférentielle :

$T_{p^*} \chi^* u = R$, où p^* est un symbole différentiel hyperbolique, transporté du symbole p de P par χ , et donc nul sur le conormal de Σ , et où R est un reste assez régulier. (pour tout ce qui concerne les paradifférentiels, voir Bony [4]).

2^{ème} étape : Etablissement d'un calcul symbolique d'opérateurs à coefficients $C^{\rho, k}(\Sigma)$.

Au cours de la preuve, on va montrer, par récurrence sur k , qu'en fait :

$$\chi^* u \in H^{s+m, k}(\Sigma), \text{ et } \varphi \in H^{s-(1/2)+k}.$$

Les coefficients de p^* , qui dépendent de u , ne sauraient avoir de meilleure régularité qu'une régularité conormale de type $C^{\rho, k}(\Sigma)$, pour un certain $\rho > 0$.

Pour établir la régularité de $\chi^* u$ à partir d'une information dans le passé, il est nécessaire de commuter à l'opérateur T_{p^*} les champs $Z \in C^\infty$ tangents à Σ , et donc de disposer du calcul symbolique correspondant.

3^{ème} étape : Régularité de S en fonction de u .

Il s'agit de montrer qu'au fur et à mesure que l'on gagne de la régularité conormale sur $\chi^* u$, on gagne de la régularité (classique) sur φ et χ : cela découle de l'équation de S , qui lie φ à u , et des formules de linéarisation des fonctions composées que l'on va rappeler (prop. 2 ci-dessous).

II. UN BREF RAPPEL SUR LA PARACOMPOSITION : (voir [1] , [2]) .

Etant donné un difféomorphisme $\chi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ de classe $C^{\rho+1}$ ($\rho > 0$), on lui associe un isomorphisme $\chi^* : \mathcal{D}'(\Omega_2) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega_1)$, qui fonctionne comme la composition usuelle $u \mapsto u \circ \chi$, mais tel que :

$$\chi^* : H_{loc}^s(\Omega_2) \rightarrow H_{loc}^s(\Omega_1), \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

L'idée en est simplement la suivante (pour $n = 1$) on veut χ^* tel que l'opérateur $(\chi^*)^{-1} \frac{d}{dx} \chi^*$ soit non pas $(\chi' \circ \chi^{-1}) \frac{d}{dy}$ (comme en serait le cas pour le changement de variables habituel $y = \chi(x)$), mais $T_{(\chi' \circ \chi^{-1})} \frac{d}{dy}$, le produit étant remplacé par un paraproduit, pour lequel la régularité (C^ρ) de $\chi' \circ \chi^{-1}$ compte peu.

On obtient en effet la propriété suivante :

Propriété 1 : si $h \in \sum_{\alpha}^m$ (classe de symboles classiques d'ordre m à régularité C^α des coefficients de la partie principale, cf., Bony [4]),

$$\chi^* T_h = T_{h^*} \chi^* + R, \text{ où } h^* \in \sum_{\varepsilon}^m, \text{ et}$$

R est $\varepsilon - m$ régularisant ($\varepsilon = \inf(\alpha, \rho)$).

Par ailleurs, on obtient naturellement une formule de linéarisation des fonctions composées :

Propriété 2 : Si $u \in C^\infty$ ($\sigma > 1$),

$$u \circ \chi = \chi^* u + T_{u' \circ \chi} \chi + R,$$

$$\text{où } R \in C^{\rho+1+\theta}, \quad \theta = \inf(\sigma - 1, \rho + 1)$$

(et une version H^s analogue).

L'opérateur χ^* est construit comme un opérateur intégral de Fourier "exotique", et est pseudo-local.

III. LES DEUX PREMIERES ETAPES DE LA PREUVE :

On se place dans la situation du I, et l'on montre d'abord qu'en fait, $\varphi \in H^{s-(1/2)}$

On fait alors l'hypothèse :

$$(H_k) \quad \chi^* u \in H^{s+m,k}(\Sigma) \quad \text{et} \quad \varphi \in H^{s-(1/2)+k}.$$

Bien sûr, (H_0) est vérifiée, et le but ultime de la preuve est de montrer

$$(H_k) \implies (H_{k+1}).$$

Les deux premières étapes permettront de montrer que $(H_k) \implies \chi^* u \in H^{s+m,k+1}(\Sigma)$ tandis que la troisième étape donnera $\chi^* u \in H^{s+m,k+1}(\Sigma) \implies \varphi \in H^{s-(1/2)+k+1}$.

1) L'étape 1) est fondée sur la formule :

$$\chi^* G(v) = T_{G'(v \circ \chi)} \chi^* v + R,$$

où χ est de classe $H^{s-(1/2)+k}$, $v \in H^s$, $\chi^* v \in H^{s,k}$, G est C^∞ , $s > \frac{n}{2} + \frac{3}{2}$,
et $R \in H^{2s-(n/2)-(3/2),k}$.

Cette formule, appliquée avec $G = F$, $v = (y, \dots, u^{(\alpha)}, \dots)$; a ceci d'agréable que l'équation $F(y, \dots, u^{(\alpha)}, \dots) = 0$ se trouve à la fois transportée et paralinéarisée : on obtient

$$T_{p^*} \chi^* u = R, \quad \text{et} \quad R \in H^{s+1,k+1} \quad \text{si} \quad s > \frac{n}{2} + \frac{7}{2}.$$

2) Deux propositions typiques de calcul symbolique dont on a vu la nécessité à l'étape 2) sont les suivantes (nous les donnons à titre d'illustration) :

Proposition : Si Z désigne l'un des champs $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$, ∂_t ou ∂_{x_j} ($j \geq 2$) (tangents à Σ), on a, pour $a \in C^{\rho,k}(\Sigma)$, $v \in H^{s,k}(\Sigma)$,

$$Z T_a v = T_{Za} v + T_a Zv + R, \quad R \in H^{s+\rho,k}(\Sigma).$$

Proposition : Soient $a, b \in C^{\rho,k}(\Sigma)$. Alors :

$$T_a T_b - T_{ab} \text{ applique } H^{s,k} \text{ dans } H^{s+\rho,k}.$$

Ces propositions, et d'autres analogues, permettent d'établir une formule convenable pour le crochet $[Z^I, T_{p^*}]$, que nous épargnerons au lecteur.

En combinant cela avec 1), on obtient, pour

$$|I| = k + 1, \quad T_{p^*} Z^I \chi^* u \in H^{s+1},$$

d'où $Z^I \chi^* u \in H^{s+m}$ par propagation de Ω_- à Ω_+ , selon Bony [4],
c'est-à-dire $\chi^* u \in H^{s+m,k+1}$.

IV. REGULARITE DE S :

Si $\lambda = \lambda(y, u^{(\alpha)}, \xi)$ est la racine réelle (C^∞ de ses arguments) de l'équation en τ

$$p_m(y, \xi, \tau) = 0, \text{ correspondant à la surface } S, \text{ on a :}$$

$$\varphi_t = \lambda(\varphi(t, x'), t, x', u^{(\alpha)}(\varphi, t, x'), -1, \varphi_{x'})$$

(on est ici dans les coordonnées d'origine dans Ω).

Proposition : Soit $s > \frac{n}{2} + 3$, $\sigma > \frac{n}{2} + \frac{3}{2}$. Alors :

i) $\varphi \in H^{s-(1/2)}$

ii) si $\chi^* u \in H^{s+m, k}(\Sigma)$, $\varphi \in H^{s-(1/2)+k}$.

On note que $u^{(\alpha)}(\varphi(t, x'), t, x') = (u^{(\alpha)} \circ \chi)|_{x_1=0}$, et la formule de

linéarisation (prop. 2 de II) donne :

$$u^{(\alpha)}(\varphi, t, x') = \chi^* u^{(\alpha)}|_{x_1=0} + T \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial x_1}(\varphi, t, x') \varphi + R$$

À cause de l'hypothèse sur $\chi^* u$, on obtient $\chi^* u^{(\alpha)} \in H^{s, k}$, et

$$\chi^* u^{(\alpha)}|_{x_1=0} \in H^{s+k-(1/2)} \text{ (c'est là le point crucial) ;}$$

quant au terme en φ , on le garde dans l'équation, et l'on trouve, en paralinéarisant l'équation de départ :

$$\varphi_t = T \frac{\partial \lambda}{\partial \xi'} \varphi_{x'} + T_A \varphi + R, \quad R \in H^{s-(1/2)+k}$$

Comme φ est C^∞ pour $t < 0$, on en déduit la proposition par propagation, les courbes intégrales du champ $\partial_t + \frac{\partial \lambda}{\partial \xi'} \partial_{x'}$ n'étant autres que des caractéristiques de P dans S.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. ALINHAC : Paracomposition et opérateurs paradifférentiels, article à paraître aux Comm. in PDE.
- [2] S. ALINHAC : Paracomposition et application aux équations non-linéaires, Séminaire Bony-Meyer-Sjöstrand, Ecole Polytechnique, Paris, 1985.
- [3] M. BEALS : Self-spreading and strength of singularities for solutions to semi-linear wave equations, Ann. of Math. 118(1983), 187 - 214.
- [4] J.M. BONY : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires, Ann. Scient. ENS, 14(1981), 209 - 246.
- [5] J.M. BONY : Intéraction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1979-80, n°22.
- [6] J.M. BONY : Intéraction des singularités pour les équations de Klein-Gordon non-linéaires, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1983-84, n°10.
- [7] R. MELROSE,
N. RITTER : Interaction of non-linear progressing waves, Lecture at Notre-Dame Conference on Microlocal Analysis (1984), et article à paraître.
- [8] J. RAUCH
M. REED : Propagation of singularities for semi-linear hyperbolic equations in one space variable, Ann. of Math. III(1980), 531 - 552.
- [9] J. RAUCH
M. REED : Jump discontinuities of semi-linear strictly hyperbolic systems in two variables : creation and propagation, Comm. Math. Phys. 81(1981), 203 - 227.