Journées Équations aux dérivées partielles

Xue Ping Wang

L'opérateur de temps-retard dans la théorie de la diffusion

Journées Équations aux dérivées partielles, n° 1 (1985), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1985___1_A8_0>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

OPERATEURS DE TEMPS-RETARD DANS LA THEORIE DE LA DIFFUSION

par WANG Xue Ping

1. NOTIONS DE TEMPS-RETARD

Considérons l'opérateur de Schrödinger $H = H_0 + V(x)$ où $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$, dans $L^2(R^n)$. Supposons d'abord que Vsoit une fonction réelle C^∞ satisfaisant:

(1.1) $$|\partial_x^\alpha V(x)| \leq c_\alpha (1+|x|)^{-1-\varepsilon-|\alpha|} \qquad \varepsilon > 0, \forall \alpha \in N^n$$

Posons $U(t) = \exp(-itH)$, $U_0(t) = \exp(-itH_0)$. Alors les opérateurs d'ondes $\Omega_\pm$ définis par:

$$\Omega_\pm = \text{s-}\lim_{t \to \pm\infty} U(t)^* U_0(t) \qquad \text{dans } L^2(R^n)$$

existent et sont complèts. Soient $r > 0$ et P_r le projecteur dans $L^2(R^n)$ défini par $P_r f = \chi_r f$, où χ_r est la fonction caractèristique de la boule $B_r = \{ |x| \leq r \}$. La probabilité de trouver l'état de diffusion $f(t) = U(t)\Omega_- f$ dans l'espace $P_r L^2$ au moment t est égale à $\langle P_r f(t), f(t) \rangle = \| P_r f(t) \|^2$. Le temps moyen total passé par f(t) dans $P_r L^2$ est $\int_{-\infty}^{+\infty} \| P_r f(t) \|^2 dt$, qui peut êtr fini ou infini. Cette quantité, notée $T_r(f)$, est la durée de séjour de f(t) dans $P_r L^2$. D'une manière analogue , la durée de séjour $T_r^0(f)$ de $U_0(t)f$ avec la même donnée entrante f est définie par $T_r^0(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \| P_r U_0(t) f \|^2 dt$. Si $T_r(f)$ est fini , la différence $\tau(f) = T_r(f) - T_r^0(f)$ représente le retard dans $P_r L^2$ provenant de l'interaction du potentiel. Quand r tend vers $+\infty$, $T_r(f)$ et $T_r^0(f)$ sont tous divergents. Mais comme f(t) se comporte comme $U_0(t)f$ quand t tend vers $-\infty$, on espère que leur différence $\tau(f)$ ait une limite finie lorsque r tend vers $+\infty$, au moins pour un ensemble dense de $L^2(R^n)$. Cette limite est le temps-retard pour f. L'opérateur de temps-retard d'Eisenbud-Wigner T est défini par:

(1.2) $$\langle f, Tf\rangle = \lim_{r\to+\infty} \tau(f)$$

Dans [4], Jensen a montré que T est un opérateur essentiellement dans L avec un core $\mathcal{D} = \{ f \in \mathcal{S}(R^n),$ t.q. supp$\hat{f} \subset R^n\setminus 0 \}$, où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f. Dans [11], la continuité de T dans $L^2(R^n)$ avec $n \geq 4$ est étudiée. Pour d'autres problèmes concernant ce sujet, on renvoie à Martin [6].

Pour motiver notre travail, il est utile de rappeler la notion de temps-retard dans la diffusion classique. Considérons la solution du système hamiltonien:

(1.3) $$\dot{x}(t) = \xi(t) \qquad x(o) = x_0$$

(1.3) $$\dot{\xi}(t) = -V(x(t)) \qquad \xi(o) = \xi_0$$

Supposons que $\overline{\lim_{|t|\to\infty}} |x(t)| = +\infty$ et $|x_0|<r$. Désignons par $t_-(t_+)$ les moments auxquels la trajectoire x(t) entre (quitte) la boule B_r. La durée de séjour de la trajectoire x(t) dans B_r est donnée par $T_r = -t_- + t_+$. Posons $x_- = x(t_-)$, $\xi_- = \xi(t_-)$. La durée de séjour dans B_r de la trajectoire libre passant par (x_-, ξ_-) est notée par T_r^0. Pour le potentiel satisfaisant à (1.1), on peut montrer que lorsque r tend vers $+\infty$, la limite de la différence $T_r - T_r^0$, notée $\tau(x_0, \xi_0)$, existe et est égale à:

(1.4) $$\tau(x_0, \xi_0) = \lim_{t\to+\infty} 1/|\xi_-|^2(\tilde{x}(-t)\cdot\xi(-t) - \tilde{x}(t)\cdot\xi(t))$$

où $\tilde{x}(t) = x(t) - t\xi(t)$ et $\xi_- = \lim_{t\to-\infty}\xi(t)$. $\tau(x_0, \xi_0)$ représente le temps-retard de la trajectoire $(x(t), \xi(t))$ dans R^n.

Vu ces notions différentes de temps-retard dans la théorie de la diffusion, on peut se demander quelle la liasons entre le temps-retard classique et l'opérateur de temps-retard quantique T. L'objet de ce travail est d'étudier cette liason d'un point de vue semi-classique.

2. APPROXIMATION SEMI-CLASSIQUE

Pour $r, s \in R$, $\rho, \delta \in [0,1]$, on introduit une classe de symbole $T^{s,r}_{\rho,\delta}$: $a \in T^{s,r}_{\rho,\delta}$ ssi a est C^∞ sur R^{2n} et satisfait aux estimations:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq c_{\alpha\beta}\,(1+|x|)^{s+\rho|\beta|}(1+|\xi|)^{r+\delta|\alpha|}$$

Posons: $T^s_\rho = \bigcap_{r \in \mathbb{R}} T^{s,r}_{\rho,\delta}$. T^s_ρ est indépendant de δ. Pour $a \in T^{s,r}_{\rho,\delta}$, on peut définir un opérateur $a^w(h^{1/2}x, h^{1/2}D)$ par:

(2.1) $$(a^w(h^{1/2}x,h^{1/2}D)u)(x) = \iint e^{i(x-y)\xi} a(h^{1/2}(x+y)/2, h^{1/2}\xi)u(y)dy\,d\!\!\!{}^-\xi$$

où $h>0$ est un petit paramètre et $u \in \mathcal{S}$. Pour $\rho,\delta<1$, (2.1) définit un opérateur continu de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ et pour $\rho = 1, \delta \leq 1$, (2.1) définit un opérateur continu de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{E}$.

Dans la suite on note: $H^h = H^h_0 + V(h^{1/2}x)$, où $H^h = -h\Delta/2$, et $U^h(t) = \exp(-ih^{-1}tH^h)$, $U^h_0(t) = \exp(-ih^{-1}t\,H^h_0)$. On note par T(h) l'opérateur de temps-retard d'Eisenbud-Wigner dépendant de h et par $\tilde{T}(h)$ l'opérateur de temps-retard défini par Narnhofer (11) par:

(2.2) $$\langle f, H^h\tilde{T}(h)g\rangle = \lim_{t\to-\infty}\langle f,A\,(t,h)g\rangle - \lim_{t\to+\infty}\langle f,A(t,h)g\rangle$$

où $A(t,h) = U^h(t)^* U^h_0(t)A(h)U^h_0(t)^* U^h(t)$ et $A(h) = h(x\cdot\nabla + \nabla\cdot x)/2i$.
On peut montrer que $\tilde{T}(h)$ est bien défini pour f,g tels qu'il existe $\chi \in C^\infty_0(R_+)$ tel que $\chi(H^h)f = f$, $\chi(H^h)g = g$. On suppose que V est C^∞_0 sur R^n et satisfait à la condition suivante:

(A) il existe un intervalle $J \subset R_+$ tel que pour tout intervalle compact $I \subset J$ et pour tout $R>0$, il existe $t_0>0$ tel que $|x(t;y,\eta)|>R$ pour $|t|>t_0$ et (y,η) t.q. $\frac{1}{2}|\eta|^2 + V(y) \in I$ avec $|y|<R$, où $(x(t;y,\eta), \xi(t;y,\eta))$ est la solution de (1.3) avec données initiales

(y, η).

Notre premier résultat concerne l'opérateur de temps-retard de Narnhofer $\tilde{T}(h)$, qui dit que dans l'intervalle non-trapping J, $\tilde{T}(h)$ est un opérateur pseudo-différentiel h-admissible de classe T_1^1 (voir Helffer-Robert [3]). L'énoncé plus précise est le suivant:

THEOREME 1 Soient χ et χ_1 fonctions C_0^∞ sur R_+ avec support compacts dans J, $\chi_1 = 1$ sur supp χ. Alors $\tilde{T}(h)$ admet un développement semi-classique en termes d'opérateurs pseudo-différentiels:

(2.3) $$\tilde{T}(h) \sim \sum_{j\geq 0} h^j p_j(h^{1/2}x, h^{1/2}D)$$

où les p_j sont des symboles de classe T_1^1, dépendant de χ_1. (2.3) est valide au sens que pour tout $\mu > 1/2$ et pour tout $N \geq 0$, on a:

$$\|(A(h)^2+1)^{-\mu}\chi(H^h)\left\{\tilde{T}(h) - \sum_{j=0}^{N} h^j p_j(h^{1/2}x, h^{1/2}D)\right\}\chi(H^h)(A(h)^2+1)^{-\mu}\|_{\mathcal{L}(L^2)}$$
$$\leq C_N h^{N+1}$$

En particulier, $p_0 = 2\tau\chi_1(|\xi|^2/2 + V(x))$, où τ est la fonction de temps-retard classique.

Soient $I \subset J$ un intervalle compact et $E(h,I)$ $(E_0(h,I))$ le projecteur spectral de H^h (H_0^h) sur l'intervalle I. On pose: $\tilde{T}(h,I) = E(h,I)\tilde{T}(h)$, $T(h,I) = E_0(h,I)T(h)$. Pour $(x_0, \xi_0) \in R^{2n}$, on définit un opérateur $W_h(x_0, \xi_0)$ par: $W_h(x_0, \xi_0) = \exp(ih^{-1/2}(x\cdot\xi_0 - x_0\cdot D))$
Utilisant le théorème 1, on peut montrer le résultat suivant:

THEOREME 2 $\tilde{T}(h,I)$ est un opérateur borné dans $L^2(R^n)$ satisfaisant:

(2.4) $$\sup_{0<h\leq 1} \|\tilde{T}(h,I)\|_{\mathcal{L}(L^2)} < +\infty$$

De plus, on a:

(2.5) $\quad \text{w-lim}\ W_h(x_0,\xi_0)^*\tilde{T}(h,I)W_h(x_0,\xi_0) = 2\tau(x_0,\xi_0)\chi_I(|\xi_0|^2/2+V(x_0))$,

dans $L^2(R^n)$, où χ_I est la fonction caractèristique de l'intervalle I .

Pour l'opérateur de temps-retard d'Eisenbud-Wigner T(h), la situation devient plus compliquée et on a seulement le résultat suivant:

THEOREME 3 T(h,I) est un opérateur borné dans $L^2(R^n)$ et satisfait aussi l'estimation du type (2.4). De plus, on a:

(2.6) $\quad \text{w-lim}\ W_h(x_0,\xi_0)^*T(h,I)W_h(x_0,\xi_0) = \tau\cdot\Omega_-^{cl}(x_0,\xi_0)\chi_I(|\xi_0|^2/2)$

où Ω_-^{cl} est l'opérateur d'onde classique entrant défini sur $R_x^n \times R_\xi^n | \{o\}$ par:

$$\Omega_-^{cl}(x,\xi) = \lim_{t\to-\infty} \phi^{-t} \circ \phi_0^t(x,\xi)$$

ϕ_0^t et ϕ^t étant le flot hamiltonien libre et perturbé respectivement.

Lesthéorèmes 2 et 3 montrent la différence entre l'opérateur de temps-retard $\tilde{T}(h)$ et l'opérateur de temps-retard d'Eisenbud-Wigner: l'opérateur $\tilde{T}(h)$ peut etre considéré comme la quantification directe de deux fois la fonction de temps-retard classique, tandi que l'opérateur T(h) peut être considéré comme la quantification de la fonction de temps-retard appliquée aux données entrantes.

3 DEMONSTRATIONS DES RESULTATS

Les théorèmes 1,2 et 3 sont conséquence directe des résultats prouvés dans [12] . Ici on donne seulement une esquisse de la démonstration basée sur les résultats obtenus dans [12].

Pour montrer le théorème 1, on remarque d'abord que si l'on pose $\chi_2(s) = \chi_1(s)/s$, alors pour chaque t fixé ona:

$$(3.1) \qquad \chi_2(H^h)A(t,h) \sim \sum_{j\geq 0} h^j\, p_j(h^{1/2}x, h^{1/2}D; t)$$

dans $\mathcal{L}(\mathcal{S};\mathcal{S})$ (voir [10]). D'après la condition (A), on peut montrer comme dans [12] que l'on a, pour $\mu > 1/2$,

$$\| (A(h)^2+1)^{-\mu} \chi(H^h)\{ \chi_2(H^h)A(t,h) - h^j p_j(h^{1/2}x, h^{1/2}D; t)\} \cdot \chi_2(H^h)(A(h)^2+1)^{-\mu} \| \leq C_N h^{N+1}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$, uniformément par rapport à $t \in R$. Par la méthode de la démonstration du lemme 4.5 de [12], on peut montrer que les limites $p_{j,\pm}(x,\xi) = \lim_{t\to\pm\infty} p_j(x,\xi;t)$ existent dans $C^\infty(R^{2n})$ et $p_{j,+}$ est dans la classe T^1_1. Le théorème 1 résulte alors de (2.2).

Pour prouver le théorème 2, utilisant le théorème 5.1 et argument de densité, on voit qu'il suffit de démontrer (2.4). Par le lemme 2.4 de [12] et la méthode de démonstration dulemme 3.3 de [11] , on peut montrer que pour $\chi \in C_0^\infty(J)$, $[A(h), \Omega_\pm(h)\chi(H_0^h)]$ se prolonge en opérateur borné dans L^2 et on a:

$$\sup_{0<h\leq 1} \| [A(h), \Omega_\pm(h)\chi(H_0^h)] \|_{\mathcal{L}(L^2)} < +\infty$$

(2.4) en résulte. Le théorème 3 se déduit du théorème 6.3 de 12 d'une manière similière et on omet les détails.

4. QUELQUES COMMENTAIRES

On remarque d'abord que dans ce travail le potentiel V est supposé àsupport compact. Pour potentiels à courte portée, les préparations faites dans [12] suffisent déja pour montrer (2.5) et (2.6). Dans le cas de potentiels à courte portée, ce type de résultats n'est pas surprenant, car derrier toutes les définitions de temps-retard il y a une considération physique. Mais dans le cas de potentiels à longue portée, le problème devient plus intéressant. Dans ce cas, la défition de l'opérateur de temps-retard présentée dans §1 n'est plus valide et en fait pour établir une théorie de diffusion on doit considéré une évolution libre modifiée de la forme $\tilde{U}_o(t) = \exp(-it(H+ +f(H_o,t))$. Avec un choix convenable on peut montrer que les opérateurs d'onde $\tilde{\Omega}_{\pm} = $ s-lim $U(t)^*\tilde{U}_o(t)$ existent et sont complets. Alors on peut définir un opérateur T par:

(4.1) $$\langle f, 2H_o Tg \rangle = \lim_{t\to-\infty} \langle \tilde{\Omega}_- f, A(t)\tilde{\Omega}_- g\rangle - \lim_{t\to+\infty} \langle \tilde{\Omega}_- f, A(t)\tilde{\Omega}_- g\rangle$$

dès que les limites existent, ici on a posé: $A(t) = U(t)^*\tilde{U}_o(t)A\tilde{U}_o(t)^*U(t)$, $A = A(1)$. Il n'est pas clair que cette définition donne encore une interprètation de temps-retard (voir Martin [7]). Comme le choix de l'évolution libre n'est pas unique, il sera intéressant de voir s'il existe un choix convenable de $\tilde{U}_o(t)$ tel que les résultats du type (2.5), (2.6) soient encore vrais, au moins pour des potentiels décroissant comme $(1+|x'|)^{-\varepsilon}(1+|x_n|)^{-\delta}$ à l'infini, où $x = (x', x_n)$ et $o<\varepsilon\leq 1$, $\delta>1$.

Une autre question intéressante est d'étudier la continuité de l'opérateur d'Eisenbud-Wigner T dans $L^2(R^n)$. Dans 11 on a montré que si $n = 3$, généralement T ne peut être un opérateur borné dans $L^2(R^3)$ et si $n \geq 4$, la situation est entièrement differente. En fait on peut prouver que T est un opérateur borné dans $L^2(R^n)$, $n\geq 4$, en supposant que V décroit comme $(1+|x|)^{-\beta}$ $\beta>4$ et que o n'est pas la valeur propre ni la résonnance de l'opérateur H si $n = 4$ et o n'est pas la valeur propre de H si $n=5$. Mais qu'est-ce qu'on peut dire sur la continuité de T si on suppose $n \geq 4$ et $1<\beta\leq 4$? Dans la théorie de la diffusion de Lax-Phillips, il y a aussi des problème concernant le temps-retard et la durée de séjour (voir [2] et [5]). Mais la question géométrique dedans serait plus intéressante.

REFERENCES

[1] J. Chazarain, Sur le comportement semi-classique du spectre et de l'amplitude de diffusion d'un Hamiltonien, dans "Singularities in Boundary Value Problems" , pp 1-17, ed. H. Garnir; R. Reidel Publ. 1981

[2] V. Guillemin, Sojourn times and asymptotic properties of scattering matrix, Publ. RIMS Kyoto, 12(1977), 69-88

[3] B. Helffer & D. Robert, Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles, J. Funct. Anal. 53(3) (1983), 246-268

[4] A. Jensen, Time-delay in potetial scattering theory, some "geometric" results, Comm. Math. Phys. 82(1981),435-456

[5] P. Lax & R. Phillips, The time-delay operator and a related trace formula, dans "Topics in Functional Analysis", pp. 197-215, Acad. Press, 1978

[6] Ph. Martin, Time-delay of quantum scattering processus, Acta Phys. Austriaca Suppl. 23 (1981), 157-208

[7] H. Narnhofer, Time-delay and dilation properties in scattering theory, J. Math. Phys., 25(1984), 987-991

[8] D. Robert, Autour de l'approximation semi-classique, Notas de Curso, N° 21, Récife, 1983

[9] D. Robert & H. Tamura, Semi-classical bounds for resolvents of Schrödinger operators and asymptotics for scatering phase, Comm. P.D.E., 9(10) (1984), 1017-1058

[10] X.P. Wang, Etude semi-classique d'observables quantiques, à paraître

[11] X.P. Wang, Continuity of time-delay operators in scattering theory, à paraître

[12] X.P. Wang, Time-delay operators in semi-classical limit,I. -Finite range potentials, preprint