JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LAURENT GUILLOPÉ

Sur le spectre des longueurs des surfaces de Riemann

Journées Équations aux dérivées partielles, n° 1 (1985), p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1985____1_A9_0>

SUR LE SPECTRE DES LONGUEURS DES SURFACES DE RIEMANN

Exposé de Laurent GUILLOPE

A toute variété riemannienne M^n compacte, sans bord et orientable (dim $M^n = n$) sont associés deux spectres : le spectre discret $\{\lambda_j\}$ de son laplacien Δ_M sur les fonctions et le spectre $\{\ell_j\}$ des longueurs de ses géodésiques orientées. On sait que génériquement l'un de ces spectres détermine l'autre ([2]).

Leurs propriétés asymptotiques sont étudiées via des fonctions de comptage :

$$N_M(\lambda) = \#\{\lambda_j \le \lambda\}$$

$$\nu_M(\ell) = \#\{\ell_j \le \ell\} .$$

Pour le spectre des valeurs propres, on a la formule de Weyl

$$N_M(\lambda) \sim (2\pi)^{-n} \omega_n \operatorname{vol}(M)\, \lambda^{n/2} ,$$

(où ω_n est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$). Mais pour le spectre des longueurs, on n'a pas de résultat universel : le type de croissance de la fonction de comptage est liée à la topologie de la variété via son groupe fondamental ([8]). Citons par exemple le cas des tores T^n (avec métrique canonique) pour lesquels $\nu_M(\ell) \sim \omega_n \ell^n/\operatorname{vol}(T^n)$ (on a considéré les géodésiques à homotopie près) et le cas des quotients compacts d'espace symétriques de rang 1 à courbure négative ([4]) pour lesquels

$$\nu_M(\ell) \sim e^{2|\rho|\ell}/2|\rho|\ell$$

($|\rho|$ est la norme de Killing de la moitié de la somme des racines positives de l'espace symétrique).

Dans le cas de variétés non compactes complètes, la nature du spectre du laplacien change en général considérablement, du spectre continu apparaissant. Qu'en est-il du spectre des longueurs ?

On répond à cette question dans le cas de certaines surfaces de Riemann parmi celles à courbure constante -1 et à groupe fondamental de type fini (M dite de type de $\mathfrak{F}_{-1}$)

Une telle surface peut-être décomposée ([9]) en la somme connexe

(1) $$M^2 = D \coprod \coprod_{i=1}^{M} P_i \coprod \coprod_{j=1}^{N} V_j$$

avec

- D partie compacte de frontière $\partial D = \coprod_{i=1}^{M} L_i \coprod \coprod_{j=1}^{N} C_j$
- M pointes $\{P_i\}$ de bord $\{L_i\}$, isométriques à $\{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})_x \times [a_i, \infty[_y\}$ avec métrique $\dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$ (P_i est de volume fini).
- N vasques hyperboliques V_j de bord géodésique C_j, isométriques à $V(\ell_j) = (\mathbb{R}/\ell_j\mathbb{Z})_\upsilon \times \mathbb{R}^+_\tau$ avec la métrique $ds^2 = ch^2\tau\, d\upsilon^2 + d\tau^2$ (V_j est de volume infini, ℓ_j est la longueur de la géodésique C_j).

Nous démontrons le théorème suivant :

THEOREME. Soit M^2 surface à courbure -1, à groupe fondamental de type fini, de volume infini et sans pointes. Si le bas du spectre du laplacien, soit λ_0, est strictement inférieur à $1/4$, alors

$$\nu_{M^2}(\ell) \sim e^{\delta\ell}/\delta\ell$$

où δ est la solution entre $\frac{1}{2}$ et 1 de $\delta(1-\delta) = \lambda_0$.

Remarques.

1. Si M est de type $\mathfrak{F}_{-1}$, on a toujours $\lambda_0 \leq 1/4$.

2. Si M est d'aire finie (i.e. $N = 0$. M^2 a un compactifié $\bar{M}$ avec des singularités isolées coniques), on a $\lambda_0 = 0$. Le théorème est vrai (avec $\delta = 1$!) ([6]. Le résultat vaut aussi pour M compacte avec des singularités isolées correspondant à des ramifications).

3. Si $M > 0$, on a toujours $\lambda_0 < 1/4$.

4. $\lambda_0 = 1/4$ est possible par exemple pour le cylindre hyperbolique $V(1) \coprod V(1)$.

1. - PRELIMINAIRES.

La surface M étant à courbure constante -1 , elle est le quotient du plan hyperbolique (dont on prendra comme modèle le demi-plan de Poincaré $H = \{z = x+iy/x, y \in \mathbb{R} , y > 0\}$ avec métrique $dg^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2)$ par un groupe Γ , sous-groupe (discret et opérant sur H sans point fixe) du groupe des isométries ($\simeq PSL(2,\mathbb{R})$) de H ($\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ opère sur H suivant $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$). Γ est évidemment isomorphe au groupe fondamental de M .

Rappelons qu'au groupe Γ est associé un exposant de Poincaré $\delta(\Gamma)$ défini de la manière suivante : l'abscisse de convergence de la série $\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-d(z, \gamma z)}$ (d distance hyperbolique sur H) ne dépend pas de z , c'est l'exposant de Poincaré. On a toujours $\delta(\Gamma)$ dans $[0,1]$; si $\lambda_0(M) < 1/4$, $\delta(\Gamma)$ coïncide avec la solution (dans $[\frac{1}{2}, 1]$) de $\delta(1-\delta) = \lambda_0(M)$ et $\lambda_0(M)$ est une valeur propre (isolée dans le spectre) du laplacien Δ_M ([11]).

Si δ est dans $[0, \frac{1}{2}]$ (d'après ce qui précède on a $M = 0$, $N > 0$) , $\sup_{\ell} (\nu_M(\ell) e^{-\delta \ell}) < +\infty$ ([11]) et Δ_M n'a aucune valeur propre ([10]) (Si $N = 0$ et $M > 0$, il y a un nombre fini non nul de valeurs propres, isolées dans le spectre de Δ_M , un spectre continu $[1/4, \infty[$ et éventuellement une infinité de valeurs propres immergées dans le spectre continu). L'obtention d'un asymptotique pour ν_M passe ainsi par l'étude des résonances de Δ_M (cf. (7)).

Il existe un polygone géodésique $\mathcal{M}$ (avec la décomposition $\mathcal{M} = \mathcal{D} \coprod \coprod_{i=1}^{M} \mathcal{P}_i \coprod \coprod_{j=1}^{N} \mathcal{V}_j$ correspondante à la décomposition (1)), domaine fondamental de H pour Γ . Si C est une géodésique fermée (simple resp.) de M alors il lui est associé de manière biunivoque la classe de conjugaison $[\gamma]$ d'un élément hyperbolique (primitif resp. γ est dit primitif dans Γ si tout élément dont il est une puissance est soit γ soit γ^{-1}) de Γ , l'axe $\mathfrak{a}$ de γ (et il existe un élément dans $[\gamma]$ dont l'axe rencontre $\mathcal{M}$) se projetant sur C (par la projection $\pi : H \to H/\Gamma$) .

2. - SCHEMA DE LA PREUVE DU THEOREME.

On établit des formules de trace à la Selberg portant sur des fonctions du laplacien convenablement choisies : d'abord pour l'opérateur de la chaleur, puis pour les résolvantes. Un théorème taubérien permet de conclure.

La suite explicite rapidement ces différentes étapes, les détails se trouvant dans un article à paraître [5] .

La laplacien sur H est donné en coordonnées locales par $\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$, ce qui, via l'isométrie locale de projection $H \to H/\Gamma = M$, induit le laplacien Δ sur M . Soit Δ_M le laplacien sur $L^2(M)$ (unique extension auto-adjointe de $(\Delta, C_0^\infty(M))$) . Soit $\Delta_{M-\partial D}$ (resp. Δ_D, Δ_{M-D}) le laplacien sur $M-\partial D$ (resp. $D, M-D$) avec conditions de Dirichlet sur le bord ∂D .

A. OPERATEURS DE LA CHALEUR

PROPOSITION 1. L'opérateur $\widetilde{E}(t) = e^{-t\Delta_M} - e^{-t\Delta_{M-D}}$ est à trace et on a la formule de trace

$$(2)\qquad \begin{aligned} \operatorname{Tr}\widetilde{E}(t) &= \operatorname{vol}(D)P(t) + \frac{e^{-t/4}}{4\sqrt{\pi t}}\left\{\sum_{j=1}^{N} \ell_j \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-(k\ell_j)^2/4t}\, e^{k\ell_j/2}}{\operatorname{sh} k\ell_j}\right\}\right. \\ &\left. + \operatorname{vol}(\partial D)/2 + \sum_{\{C\}_0} \ell(C) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-(k\ell(C))^2/4t}}{\operatorname{sh}(k\ell(C)/2)}\right\} \end{aligned}$$

où $P(t) = \dfrac{e^{-t/4}}{(4\pi t)^{3/2}} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{b}{\operatorname{sh}(b/2)}\, e^{-b^2/4t}\, db$ et la dernière somme porte sur les géodésiques simples fermées de M distinctes de C_j $(j = 1,\dots,N)$.

Preuve. On suppose, dans le cadre de cette esquisse de démonstration, $N = 1$. Soit φ fonction régulière valant 1 au voisinage de D et à support compact. On écrit

$$(3)\qquad \begin{aligned} \widetilde{E}(2t) &= \varphi\,\widetilde{E}(2t) + (1-\varphi)\,\widetilde{E}(2t)\,\varphi \\ &+ ((1-\varphi)\, e^{-t\Delta_M} \varkappa_0^{-1})\,(\varkappa_0[e^{-t\Delta_M} - e^{-t\Delta_{V_1}}]\,(1-\varphi)) \\ &+ ((1-\varphi)[e^{-t\Delta_M} - e^{-t\Delta_{V_1}}]\,\varkappa_0)\,(\varkappa_0^{-1}\, e^{-t\Delta_{V_1}}\,(1-\varphi)) \end{aligned}$$

où $\varkappa_0$ est la fonction définie sur M par $\varkappa_0(m) = \exp(d(m,\partial D))$.

Les opérateurs de la chaleur étant régularisants, les deux premiers termes du membre de droite de (3) sont à trace. Pour les autres, il suffit de montrer que chacun des facteurs est Hilbert-Schmidt. Cela découle d'estimations explicites sur les noyaux, obtenues à partir des formules

$$e^{-t\Delta_M}(m,m') = \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-t\Delta_H}(z,\gamma z') \ , \quad m,m' \in M \ .$$

$$e^{-t\Delta_V}(m,m') = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \{e^{-t\Delta_H}(z,\gamma_V^k z') - e^{-t\Delta_H}(z,\gamma_V^k\sigma_V z')\} \ , \quad m,m' \in V$$

où z , z' sont dans $\mathfrak{M}$ au-dessus de m , m' ($\pi : H \to M$) , σ_V est la symétrie par rapport à l'axe $\mathfrak{a}$ portant ∂D et γ_V la transformation hyperbolique d'axe $\mathfrak{a}$ correspondant à la géodésique ∂D . On a la formule explicite

$$e^{-t\Delta_H}(z,z') = \frac{\sqrt{2}\, e^{-t/4}}{(4\pi t)^{3/2}} \int_a^\infty \frac{b e^{-b^2/4t}}{\sqrt{\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a}}\, db$$

avec $a = d(z,z')$.

Remarquons que certaines de ces estimations sont tout à fait générales et démontrées pour des variétés à géométrie bornée ([1]) .

Plus précisément, on a le lemme

LEMME 1. Notons $\|\ \|_{tr}$ la norme trace. Il existe des constantes positives C_1 , C_2 , C_3 telles que

(4) $$\|(1-\varphi)\, \tilde{E}(t)\, (1-\varphi)\|_{tr} \leq C_1 e^{C_2 t} e^{-C_3/t} , \quad t > 0 .$$

B. RESOLVANTES

PROPOSITION 2. Soit λ_0 un complexe hors du spectre de Δ_D et T_0 l'opérateur défini par

$$T_0(\lambda) = (\Delta_M \lambda)^{-1} - \{(\Delta_D - \lambda_0)^{-1} \oplus (\Delta_{M-D} - \lambda)^{-1}\} .$$

Notons $\lambda = s(1-s)$. Alors pour λ en dehors du spectre de Δ_M , l'opérateur $T_0(\lambda)$ est à trace et on a la formule de trace

(5) $$\operatorname{Tr} T_0(s(1-s)) = -\frac{\operatorname{vol}(D)}{4\pi}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) + \frac{1}{2(2s-1)}\left\{\sum_{j=1}^{N} 2\ell_j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k\ell_j(s-1)}}{\operatorname{sh}(k\ell_j)} + \frac{\operatorname{vol}(\partial D)}{2} + \sum_{\{C\}_0} \ell(C) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k\ell(C)(s-\frac{1}{2})}}{\operatorname{sh}(k\ell(C)/2)}\right\} + \Lambda_0 , \quad \operatorname{Re} s > 1$$

<u>où</u> Λ_0 <u>est une constante dépendant de</u> Λ_0 <u>et</u> Γ .

<u>Preuve</u>. Avec φ comme précédemment introduite on écrit

$$T_0(\lambda) = \bar{T}(\lambda) + (\Delta_D - \lambda)^{-1} - (\Delta_D - \lambda_0)^{-1}$$

où $\bar{T}(\lambda) = (\Delta_M - \lambda)^{-1} - (\Delta_{M-\partial D} - \lambda)^{-1}$ puis

(6) $$\bar{T}(\lambda) = \varphi\bar{T}(\lambda) + (1-\varphi)\,\bar{T}(\lambda)\,\varphi + (1-\varphi)\,\bar{T}(\lambda)(1-\varphi) \; .$$

Les deux premiers termes du membre de droite de (6) sont des opérateurs de Green singuliers d'ordre -2 : ils n'opèrent pas sur des espaces compacts, néanmoins φ est à support compact ce qui permet de s'y ramener et donc d'affirmer que ces termes sont à trace ([4]). Le troisième terme est la transformée de Laplace de $(1-\varphi)\,\bar{E}(t)(1-\varphi)$: il est donc à trace pour λ vérifiant $\mathrm{Re}\,\lambda < -C_2$ d'après l'estimation (4) du lemme 1 . On en déduit alors facilement que $\bar{T}(\lambda)$, puis $\bar{T}_0(\lambda)$ est à trace pour tout λ en dehors des spectres de Δ_M et Δ_D .

La formule de trace (5) découle alors directement de la formule de trace pour les opérateurs de la chaleur (2) en appliquant une transformation de Laplace.

C. <u>CONCLUSION</u>

En utilisant un domaine fondamental et la croissance exponentielle du volume des boules on obtient le lemme

LEMME 2.

1. $\sup\limits_{\ell>0} \nu_M(\ell)\, e^{-\ell} < +\infty$.
2. <u>La fonction de comptage</u> $\tilde{\nu}_M$ <u>associé à l'ensemble des géodésiques simples orientées à même asymptotique que</u> ν_M .

Rappelons le théorème taubérien d'Ikehara :

PROPOSITION 3. Soit $d\theta$ une mesure positive, telle que sa transformée de Laplace $L(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\, d\,\theta(y)$ converge sur $\{\mathrm{Re}\, s > \delta\}$ $(\delta > 0)$. Si il existe une constante A non nulle telle que $L(s) - \frac{A}{s-\delta}$ admet un prolongement continu sur $\{\mathrm{Re}\, s \geq \delta\}$, on a l'asymptotique $\theta(y) \sim A\, e^{\delta y}/\delta$, $y \to +\infty$.

Introduisons la mesure $d\widetilde{\theta}_M = y d\widetilde{\nu}_M$ de transformée de Laplace $\widetilde{L}_M$. Reprenant (6) et avec le lemme 2 on montre facilement l'écriture

$$\mathrm{Tr}\, T_0(s(1-s)) = \widetilde{L}_M(s)/(2s-1) + H_M(s) \ , \tag{7}$$

où la fonction $H_M(s)$ est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}\, s > \delta\}$.

Le théorème d'Ikehara livre alors l'asymptotique de $\widetilde{\theta}_M$, dont on déduit facilement celui de ν_M .

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. CHENG, P. LI et S. YAU - On the upper estimate of the heat kernel of a complete riemannian manifold. Amer. J. Math. 103 (1981), 1021-1063.

[2] DUISTERMAT, V. GUILLEMIN - The spectrum of positive elliptic operators and bicharacteristics. Invent. Math. 29 (1975), 39-79.

[3] R. GANGOLLI - The length spectrum of some compact manifolds of negative curvature. J. Differential Geometry 12 (1977), 403-424.

[4] G. GRUBB - Singular Green operators and trace class estimates for exterior boundary problems. Duke Math. J. 1984 (51), 447-528.

[5] L. GUILLOPE

a. Sur le spectre des longueurs d'une surface compacte à courbure -1 et à bord totalement géodésique. C.R.A.S. 300 (1985), 355-358.

b. Sur la distribution des longueurs des géodésiques fermées d'une surface à bord totalement géodésique. Prép. Institut Fourier, 32 (1985).

[6] D. HEIJHAL - The Selberg trace formula for PSL$(2,\mathbb{R})$, vol. 1 et vol. 2. Lecture notes in math., 548 (1976) et 1001 (1983), Springer.

[7] S. LANG - Algebraic numbers (1964), Addison-Wesley.

[8] J. MILNOR - A note on curvature and the fundamental group. J. of differential geometry 2 (1968), 1-7.

[9] S.J. PATTERSON - The limit set of a fuchsian group. Acta Math. 136 (1976), 241-273.

[10] S.J. PATTERSON - The Laplacian operator on a Riemann surface. Composito Math. 31 (1975), 83-107.

[11] D. SULLIVAN - The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. Publ. Math. I.H.E.S. 50 (1979), 419-450.