JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN-MARC DELORT
GILLES LEBEAU

Majorations de deuxièmes micro-supports

Journées Équations aux dérivées partielles (1986), p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1986____A14_0>

MAJORATIONS DE DEUXIEMES MICRO-SUPPORTS

PAR

Jean-Marc DELORT et Gilles LEBEAU

Jean-Marc DELORT
Université de Rennes I
UER Mathématiques & Informatique
L.A. n° 305
Campus de Beaulieu
35 042 - RENNES CEDEX - FRANCE -

Gilles LEBEAU
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
91 405 - ORSAY - FRANCE -

1 - MOTIVATION

Le but de l'exposé est de donner une majoration géométrique du deuxième micro-support à croissance le long d'une Lagrangienne ([10], [7], [8]) des distributions de Sjöstrand [10], résultat prouvé en détail dans [3]. Afin de motiver celui-ci, on étudie dans cette première partie un type de problème qu'il permet de résoudre.

Soit Σ une sous-variété analytique réelle lisse de $\mathbb{R}^n$, m un réel. On notera I^m_Σ l'espace des intégrales de Fourier de la forme :

$$(1) \qquad \int e^{i\varphi(x,\theta)}\, a(x,\theta)d\theta$$

où $\varphi(x,\theta)$ est une phase non dégénérée définissant la Lagrangienne $T^*_\Sigma \mathbb{R}^n$, $a(x,\theta)$ est un symbole analytique sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ d'ordre $k = m + \frac{n-2N}{4}$ ([1]). L'espace I^m_Σ est l'espace des distributions conormales analytiques d'ordre m sur Σ. Comme dans le cadre C^∞([5]), I^m_Σ est susceptible d'une définition par itération de champs de vecteurs [4]. On a $I^m_\Sigma \subset H^s_{loc}(\mathbb{R}^n)$ si $s < -m - \frac{n}{4}$.

On se pose le problème suivant :

Soient N une seconde sous-variété analytique réelle de $\mathbb{R}^n$ et u une distribution conormale analytique sur Σ , assez régulière. On cherche à estimer géométriquement (i.e. à partir de Σ et N) le micro-support ou wave-front set analytique $SS(u_{|N})$ de la restriction de u à N. Afin de pouvoir énoncer le théorème résolvant ce problème, rappelons les définitions suivantes :

DEFINITION 1

Une stratification d'un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est une famille $\mathcal{S} = (S_\alpha)_{\alpha\in A}$ de sous-variétés analytiques réelles (connexes) de S vérifiant :

i) la famille $(S_\alpha)_{\alpha\in A}$ est localement finie,

ii) les $(S_\alpha)_{\alpha\in A}$ forment une partition de S,

iii) pour tous $(\alpha,\beta) \in A \times A$ tels que $\overline{S}_\alpha \cap S_\beta \neq \emptyset$, on a $S_\beta \subset \overline{S}_\alpha$,

iv) pour tout $\alpha \in A$, S_α est sous-analytique dans $\mathbb{R}^n$.

(On rappellera la définition de iv) plus bas).

On dit que les S_α sont les strates de $\mathcal{S}$. La stratification est dite compatible à $S' \subset S$ si S' est réunion de strates.

Exemple

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y(y-x^2) = 0\}$

La famille ($S_1 = \{y=0\}$, $S_2 = \{y=x^2$ et $x\neq 0\}$) n'est pas une stratification

(iii) n'est pas vérifié).

Par contre ($S_o = \{(O,O)\}$, $S'_1 = S_1 \cap \{x \neq O\}$, $S'_2 = S_2$) est une stratification.

On exigera des stratifications utilisées la condition de régularité supplémentaire suivante :

DEFINITION 2

On dit qu'une stratification $\mathcal{S}$ vérifie la condition (w) de Whitney si pour tout couple de strates (S_α, S_β) on a :

(2) $$T^*_{S_\alpha} \mathbb{R}^n \hat{+} T^*_{S_\beta} \mathbb{R}^n|_{S_\alpha} \subset T^*_{S_\alpha} \mathbb{R}^n$$

où, pour U,V parties de $T^* \mathbb{R}^n$, on a posé :

(3) $$U \hat{+} V = \left\{(x,\xi) \in T^* \mathbb{R}^n \; ; \; \begin{array}{l} \exists (x_n,\xi_n) \in U \\ \exists (x'_n,\xi'_n) \in V \end{array} \text{ avec } \begin{array}{ll} x_n \to x & \xi_n + \xi'_n \to \xi \\ x'_n \to x & |x_n - x'_n|\,|\xi_n| \to 0 \end{array} \right\}$$

On peut alors énoncer :

THEOREME 3

Soit $u \in I^m_\Sigma$ avec $m + \frac{n}{4} < -\frac{n}{2}$. Soient $\tilde{\Sigma}$ et $\tilde{N}$ des complexifiées de Σ et N dans $\mathbb{C}^n$ et $\tilde{\mathcal{S}}$ une stratification de $\tilde{\Sigma} \cap \tilde{N}$ vérifiant la condition (w) de Whitney et compatible à $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. Alors si $\mathcal{S}$ désigne la trace de $\tilde{\mathcal{S}}$ sur $\mathbb{R}^n$ on a :

(4) $$SS(u_{|N}) \subset \bigcup_{S \in \mathcal{S}} T^*_S N$$

SS(.) désignant le micro-support analytique de Sato.

Les techniques de majoration de deuxième micro-support que l'on va développer, permettent également de majorer le front d'onde analytique d'intégrales de Fourier définies à l'aide de phases dégénérées :

THEOREME 4

Soient $(x,\theta) \to \varphi(x,\theta)$ une fonction analytique réelle positivement homogène de degré 1 sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^N-\{0\})$ et $a(x,\theta)$ un symbole analytique d'ordre $k < -N$. Alors la fonction continue :

(5) $$u(x) = \int e^{i\varphi(x,\theta)}\, a(x,\theta)d\theta$$

vérifie

$$SS(u) \subset \{(x,\varphi'_x(x,\theta))\ ;\ (x,\theta) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^N-\{0\}) \text{ et } \varphi'_\theta(x,\theta) = 0\} \cup$$

(6) $$\{(x,\tilde{x}) \in T^* \mathbb{R}^n\ ;\ \text{il existe des suites } (x_n,\theta_n,\lambda_n) \in \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^N-\{0\}) \times \mathbb{R}^*_+$$

$$\text{vérifiant : } x_n \to x \qquad \lambda_n \to +\infty \qquad \lambda_n\, \varphi'_x(x_n,\theta_n) \to \tilde{x}$$

$$|\theta_n| = 1 \qquad \mathcal{I}m\, \theta_n \to 0 \qquad \lambda_n\, \varphi'_\theta(x_n,\theta_n) \to 0\}$$

Remarque

On peut montrer que le membre de droite de (6) est isotrope sous-analytique donc de dimension $\leqslant$ n.

Supposons choisi un système de coordonnées locales sur $\mathbb{R}^n$, (x,t) dans lequel N est donnée par $t = 0$. On dispose alors de coordonnées locales $(x,t;\xi,\tau)$ sur $T^* \mathbb{R}^n$, (x,τ) sur $L' = T^*_N \mathbb{R}^n$ et $(x,\tau;\tilde{x},\tilde{\tau})$ sur $T^* L'$. Considérons les applications suivantes (susceptibles d'une définition intrinsèque) :

(7) $$\rho : T^* \mathbb{R}^n|_N \longrightarrow T^*N \qquad \check{\rho} : T^* L' \cap \{(x,\tau;\tilde{x},\tilde{\tau})\ ;\ \tilde{\tau} = 0\} \longrightarrow T^*N$$
$$(x,0;\xi,\tau) \longrightarrow (x,\xi) \qquad (x,\tau;\tilde{x},0) \longrightarrow (x,\tilde{x})$$

La preuve des théorèmes 3 et 4 repose sur le résultat suivant, prouvé par Lebeau dans [7] :

THEOREME 5

Soit $u \in H^s_{comp}(\mathbb{R}^n)$ avec $s > \frac{1}{2} \operatorname{codim}_{\mathbb{R}^n} N$. Alors :

(8) $$SS(u_{|N}) \subset \rho(SS(u)_{|N}) \cup \check{\rho}(SS^{2,1}_{L'}(u) \cap \{(x,\tau;\tilde{x},\tilde{\tau})\ ;\ \tilde{\tau} = 0,\ |\tau|=1\})$$

Dans l'expression (8) précédente, $SS^{2,1}_{L'}(u)$ désigne le deuxième micro-support à croissance de u le long de L' dont on rappellera la définition ci-dessous. Le théorème 3 découlera du théorème 5 à condition d'obtenir une majoration géométrique de $SS^{2,1}_{L'}(u)$ lorsque u est conormale sur une sous-variété Σ. On prouvera en fait au paragraphe 3 un tel résultat lorsque u est dans une classe de Sjöstrand quelconque.

2 - DEUXIEME MICRO-SUPPORT A CROISSANCE ([10], [7], [8])

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'espace de Sjöstrand $H_\varphi(U)$ est défini par :

(9) $$H_\varphi(U) = \{v(z,\lambda) : U \times [1,+\infty[\to \mathbb{C}, \text{ holomorphes en } z, \text{ telles qu'il existe } C > 0,\ N \in \mathbb{N} \text{ avec } |v(z,\lambda)| \leqslant C\lambda^N e^{\lambda\varphi(z)} \quad \forall z \in U,\ \forall \lambda \geqslant 1\}$$

Si $z_0 \in \mathbb{C}^n$, on pose $H_{\varphi,z_0} = \varinjlim_{U \ni z_0} H_\varphi(U)$, U décrivant le filtre des voisinages ouverts de z_0.

Soient $z_0 \in \mathbb{C}^n$, u une fonction continue au voisinage de Re z_0 dans $\mathbb{R}^n$, Σ_0 une boule centrée en Re z_0, de rayon assez petit. Rappelons que la transformée de FBI de u est définie par :

(10) $$Tu(z,\lambda) = \int_{\Sigma_0} e^{-\lambda/2(z-t)^2} u(t)dt$$

On a $Tu(z,\lambda) \in H_{\varphi_0,z_0}$ si $\varphi_0(z) = \frac{1}{2}(\mathcal{I}m z)^2$. Rappelons que d'après [10] la transformation de FBI permet de caractériser SS(u) par :

$(x_0,\xi_0) \notin SS(u) \Longleftrightarrow$ il existe $\varepsilon > 0$ et W voisinage complexe de $z_0 = x_0 - i\,\xi_0$ tels que

$$\forall\, z \in W,\ \forall\, \lambda \geqslant 1\ ,\ |Tu(z,\lambda)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\, e^{\lambda(\varphi_0(z)-\varepsilon)}$$

On notera :

$$\Lambda\varphi_0 = \{(z\ ;\ \frac{2}{i}\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}(z))\ ;\ z \in \mathbb{C}^n\} \subset T^*\,\mathbb{C}^n \tag{11}$$

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & (x-i\xi,\xi) & \in & \Lambda\varphi_0 \arrow[d] & \ni & (z,\zeta) \arrow[d, "\Pi"] \\
(x,\xi) \arrow[ur, "\chi_0"] & \in & T^*\mathbb{R}^n \arrow[ur] \arrow[r] & \mathbb{C}^n & \ni & z \\
 & & (x,\xi) \arrow[r] & x-i\xi & &
\end{tikzcd}$$

On peut alors faire vivre le micro-support dans $\Lambda\varphi_0$ en posant $SS_{\varphi_0}(u) = \chi_0(SS(u))$. La variété analytique réelle $\Lambda\varphi_0$ est totalement réelle et admet pour complexifiée $T^*\,\mathbb{C}^n$ donc χ_0 se prolonge en une transformation canonique complexe :

$$(12)\qquad \begin{aligned} \chi_0 : T^*\,\mathbb{C}^n &\longrightarrow T^*\,\mathbb{C}^n \\ (z,\zeta) &\longrightarrow (z-i\,\zeta,\zeta) \end{aligned}$$

En outre, si σ désigne la forme symplectique de $T^*\,\mathbb{C}^n$, $(\Lambda\varphi_0,(\mathrm{Re}\sigma)_{|\Lambda\varphi_0})$ est symplectique et χ_0 est un isomorphisme symplectique de $T^*\,\mathbb{R}^n$ (muni de sa structure symplectique usuelle) sur $\Lambda\varphi_o$.

Soit alors L' une Lagrangienne de $T^* \mathbb{R}^n$ et $L = \chi_o(L')$ la Lagrangienne image dans $\Lambda\varphi_o$. On va définir pour $v \in H\varphi_o$ un deuxième microsupport $SS_L^{2,1}(v) \subset T^*L$. Le deuxième micro-support associé à une fonction u sur $\mathbb{R}^n$ qui intervient dans (8) s'obtient à partir de celui-ci en posant :

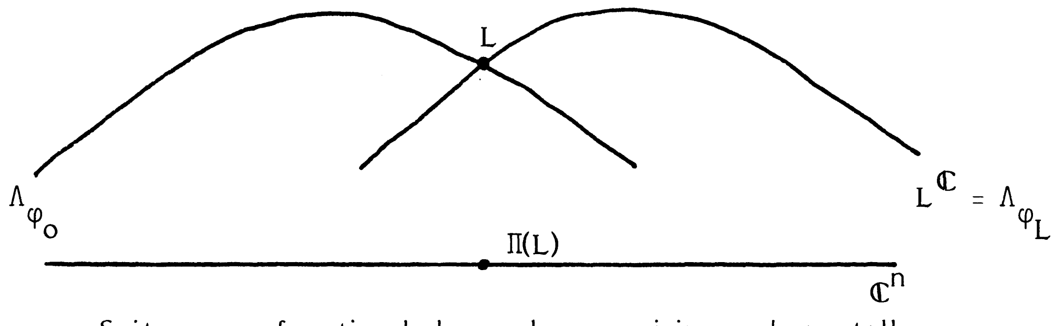
$$SS_{L'}^{2,1}(u) = K^{-1}(SS_L^{2,1}(Tu)) \tag{13}$$

où $K : T^*L' \to T^*L$ est l'isomorphisme déduit de $\chi_{o|L'} : L' \to L$.

On déduira donc de toute majoration géométrique de $SS_L^{2,1}(Tu)$ une majoration géométrique de $SS_{L'}^{2,1}(u)$.

Définition de $SS_L^{2,1}(v)$

Soient $v \in H_{\varphi_o,z_o}$, $L \subset \Lambda\varphi_o$ une Lagrangienne avec $z_o \in \Pi(L)$. D'après [8], la complexifiée $L^{\mathbb{C}} \subset T^* \mathbb{C}^n$ de L est telle qu'il existe une fonction pluri-harmonique φ_L définie au voisinage de z_o, à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $L^{\mathbb{C}} = \Lambda\varphi_L$ et $\varphi_L \leqslant \varphi_o$, $\varphi_L(z) = \varphi_o(z)$ si et seulement si $z \in \Pi(L)$:



Soit g_L une fonction holomorphe au voisinage de z_o telle que $\varphi_L = -\mathfrak{Im}\, g_L$. Définissons :

$$(14) \qquad \begin{aligned} I_L : H_{\varphi_o,z_o} &\longrightarrow H_{\varphi_o-\varphi_L,z_o} \\ v(z,\lambda) &\longrightarrow e^{-i\lambda g_L(z)}\, v(z,\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} & \chi_L : T^* \mathbb{C}^n & \longrightarrow & T^* \mathbb{C}^n \\ (15) & (z,\zeta) & \longrightarrow & (z\,,\, \zeta - \frac{2}{i}\frac{\partial\varphi_L}{\partial z}(z)) \end{array}$$

On a $\chi_L(\Lambda\varphi_L) = X$ section nulle de $T^* \mathbb{C}^n$ et $\chi_L(L) = \Pi(L)$.

On peut choisir au voisinage de z_o un système de coordonnées locales holomorphes dans lequel $\Pi(L)$ est donné par $\mathcal{I}m\ z = 0$.

Si $p_o = (z_o, \frac{2}{i}\frac{\partial\varphi_o}{\partial z}(z_o)) \in L$ et $(p_o,q_o) \in T^* L$ sont donnés, notons $(y_o,\eta_o) \in T^*(\Pi(L))$ le point correspondant par Π (y_o et η_o sont donc dans $\mathbb{R}^n$). Soient $t_o = y_o - i\,\eta_o$, Σ_o une boule de centre y_o de rayon assez petit dans $\mathbb{R}^n$, $w(z,\lambda) = I_L(v)\,(z,\lambda)$, μ un paramètre réel positif et :

$$(16) \qquad T^2 v(t,\lambda,\mu) = \int_{\Sigma_o} e^{-\frac{\lambda\mu^2}{2}(t-z)^2}\, w(z,\lambda)\, dz$$

On a alors :

DEFINITION 6

On dit que $(p_o,q_o) \notin SS_L^{2,1}(v) \Longleftrightarrow$ il existe $\varepsilon > 0$, $\mu_o > 0$, $\lambda'_o > 0$, $N \in \mathbb{N}$, W voisinage complexe de t_o tels que :

$$(17) \qquad |T^2 v(t,\lambda,\mu)| \leqslant \frac{\lambda^N}{\varepsilon}\, e^{\frac{\lambda\mu^2}{2}(\varphi_o(t) - \varepsilon)}$$

pour tous $t \in W$, $\mu \in]o,\mu_o[$, λ vérifiant $\lambda\mu^2 \geqslant \lambda'_o$.

3 - MAJORATION GEOMETRIQUE DU DEUXIEME MICRO-SUPPORT

Rappelons la définition du cône normal à une sous-variété :

DEFINITION 7

Soient M une variété C^1, S et V deux parties de M. Le cône normal à S le long de V est la partie C(S,V) de TM définie dans un système de coordonnées locales par $(x,\theta) \in C(S,V) \iff$ il existe des suites $s_n \in S$, $v_n \in V$, $c_n \in \mathbb{R}_+$ avec :

$$s_n \to x,\ v_n \to x,\ c_n(s_n - v_n) \to \theta$$

Si V est une sous-variété de M, C(S,V) est invariant par TV et on note $C_V(S)$ l'image de C(S,V) dans $T_V M = TM/TV$.

Si M est symplectique et V Lagrangienne dans M, $T_V M$ s'identifie à $T^* V$ par l'anti-isomorphisme hamiltonien et $C_V(S)$ peut être considéré comme un cône de $T^* V$.

Le théorème de majoration du $SS_L^{2,1}$ s'énonce alors :

THEOREME 8

Soient z_o un point de $\mathbb{C}^n$, Ψ une fonction analytique réelle au voisinage de z_o vérifiant $\Psi \leqslant \varphi_o$, L une Lagrangienne de $\Lambda\varphi_o$, p_o un point de $L \cap \Lambda_\Psi$ vérifiant $\Pi(p_o) = z_o$, v un élément de H_{Ψ,z_o} tel que $p_o \in SS_{\varphi_o}(v)$. On a alors :

$$(18) \qquad SS_L^{2,1}(v)_{p_o} \subset (C_{L^{\mathbb{C}}}(\Lambda_\Psi) \cap T^* L)_{p_o}$$

où $(.)_{p_o}$ désigne la fibre en p_o.

Avant de donner la preuve du théorème, rappelons les définitions suivantes :

DEFINITION 9

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite sous-analytique si pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ il existe :

un voisinage V de a dans $\mathbb{R}^n$

une famille (Y_{ij}) $i = 1,\ldots,N$, $j = 1,2$ de variétés analytiques réelles

une famille $\varphi_{ij} : Y_{ij} \to \mathbb{R}^n$ d'applications analytiques réelles propres

telles que $V \cap A = \bigcup_i (\varphi_{i1}(Y_{i1}) - \varphi_{i2}(Y_{i2}))$.

Une fonction sous-analytique est une fonction continue dont le graphe est sous-analytique. On montre qu'un ensemble sous-analytique admet une stratification de Whitney. Cela entraîne en particulier qu'une fonction sous-analytique est analytique sur un ouvert dense. On peut définir la notion de chaîne sous-analytique (cf. [9]). On ne rappellera pas ici la définition précise d'un tel objet et on se contentera de dire qu'une chaîne sous-analytique est un ensemble sous-analytique sur lequel on s'est donné une manière d'intégrer les formes différentielles (i.e. une classe d'homologie) généralisant l'intégration sur une sous-variété.

Rappelons enfin que si F est un fermé de $\mathbb{R}^n$, Kashiwara-Schapira définissent $T^*_F\,\mathbb{R}^n$ par :

(19) $$T^*_F\,\mathbb{R}^n = SS(\underline{\mathbb{C}}_F)$$

le membre de droite désignant le micro-support du faisceau constant de fibre $\mathbb{C}$, de base F (cf. [6]). En particulier, si $F = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \Psi_1(x) \leqslant 0\}$ où Ψ_1 est une fonction C^1 à valeurs réelles, on a :

(20) $$\begin{aligned} T^*_F\,\mathbb{R}^n \subset \{(x,\xi) \,;\, \exists x_n \to x \quad , \quad & \lambda_n\, d\,\Psi_1(x_n) \to \xi \\ \lambda_n \leqslant 0 \quad , \quad & \lambda_n\, \Psi_1(x_n) \to 0\} \quad \cup \quad \{(x,o) \,;\, \Psi_1(x) < 0\}. \end{aligned}$$

<u>Preuve du théorème 8</u>

Le $SS^{2,1}_L(v)$ se caractérise par l'intégrale $\displaystyle\int_{\Sigma_o} e^{-\frac{\lambda\mu^2}{2}(t-z)^2}\, w(z,\lambda)dz$.

Posons $\Psi_1 = \Psi - \varphi_L$. Comme $\Psi \leqslant \varphi_o$, on a $\Psi_1(z) \leqslant 0$ si $z \in \Pi(L) \underset{-}{\sim} \mathbb{R}^n$. En outre

$\Lambda_{\Psi_1} = \chi_L(\Lambda_\Psi)$ et $w(z,\lambda) \in H_{\Psi_1, t_o}$.

Soient K une boule complexe contenant $\overline{\Sigma}_o$ dans son intérieur, $F = \{z \in K \; ; \; \Psi_1(z) \leqslant O\}$ $(F \supset \Sigma_o)$. Comme Ψ_1 est sous-analytique, F est contractile si K (et Σ_o) sont assez petits. Notons $\theta(t)$ la fonction :

$$\theta(t) = \inf_{\substack{\Sigma \subset F \\ \partial\Sigma = \partial\Sigma_o}} \sup_{z \in \Sigma} \left[- \operatorname{Re} \frac{(t-z)^2}{2}\right] \tag{21}$$

où la borne inférieure est prise sur les chaînes sous-analytiques de F de bord $\partial\Sigma_o$.

On a le lemme :

LEMME 10

Il existe $C > O$, $N \in \mathbb{N}$ tels que $|T^2 v(t,\lambda,\mu)| \leqslant C\lambda^N e^{\lambda\mu^2\theta(t)}$

Démonstration

Pour t fixé dans $\mathbb{C}^n$ et $\varepsilon \geqslant O$, posons :

$$F_{t,\varepsilon} = \{z \in F \; ; \; - \operatorname{Re} \frac{(z-t)^2}{2} \leqslant \theta(t) + \varepsilon\} \tag{22}$$

Alors : • $(F_{t,\varepsilon})_{\varepsilon > o}$ est base de voisinage de $F_{t,o}$ dans F.

• Comme $F_{t,o}$ est un compact sous-analytique, il existe V voisinage de $F_{t,o}$ dans $\mathbb{C}^n$ se rétractant par déformation sur $F_{t,o}$ (cf [3]).

Soit $\varepsilon > O$ assez petit pour que $F_{t,\varepsilon} \subset V$. Par définition de $F_{t,\varepsilon}$ il existe $\Sigma_{t,\varepsilon}$ chaîne de $F_{t,\varepsilon}$ avec $\partial\Sigma_{t,\varepsilon} = \partial\Sigma_o$. $\Sigma_{t,\varepsilon}$ se rétracte donc sur une chaîne singulière Σ_t de $F_{t,o}$ résolvant $\partial\Sigma_o$. Comme l'homologie des compacts sous-analytiques peut-être calculée par leurs chaînes sous-analytiques, on peut supposer que pour tout t, Σ_t est sous-analytique.

On montre [2] que $t \to \operatorname{mes}(\Sigma_t)$ peut de plus être supposée localement bornée. Alors, comme par la formule de Stokes $T^2v(t,\lambda,\mu) = \int_{\Sigma_t} e^{-\frac{\lambda\mu^2}{2}(t-z)^2} w(z,\lambda)dz$ on obtient le lemme.

La fin de la preuve du théorème 8 s'articule alors comme suit :

• L'inégalité du lemme 10 et l'hypothèse $(p_o,q_o) \in SS_L^{2,1}(v)$ permettent de montrer qu'il existe une suite $t_m \to t_o$ telle que pour tout m, θ soit dérivable en t_m et que $(t_m, \frac{2}{i}\frac{\partial\theta}{\partial t}(t_m)) \to (t_o, \frac{2}{i}\frac{\partial\varphi_o}{\partial t}(t_o))$.

• La théorie des fonctions localement Lipschitzienne sous-analytiques de [3] permet de prouver que si θ est dérivable en un point t, $(t, \frac{2}{i}\frac{\partial\theta}{\partial t}(t)) \in \chi_o((T_F^* \mathbb{C}^n \cup T^*_{\partial\Sigma_o} \mathbb{C}_n)^a)$.

Comme $y_o \notin \partial\Sigma_o \cup \partial K$, on déduit de cela que $(y_o,\eta_o) \in (T^*_{\{\Psi_1 \leqslant o\}}\mathbb{C}^n)^a$. En utilisant la majoration (20) et en revenant à la définition du cône normal, on obtient $(y_o,\eta_o) \in C_X(\Lambda_{\Psi_1}) \cap T^* \mathbb{R}^n$ où X est la section nulle de $T^* \mathbb{C}^n$. Comme $X = \chi_L(L^{\mathbb{C}})$ et $\Lambda_{\Psi_1} = \chi_L(\Lambda_\Psi)$, le théorème en découle.

Remarque

Le premier des deux résultats précédents est une version avec paramètres du lemme suivant :

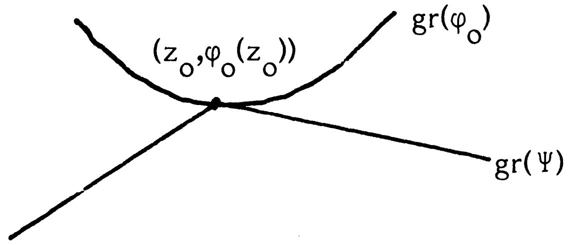
LEMME 11

Soient $p_o = (z_o,\zeta_o)$ un point de Λ_{φ_o} et Ψ une fonction localement Lipschitzienne sous-analytique définie au voisinage de z_o dans $\mathbb{C}^n$, à valeurs réelles, vérifiant $\Psi \leqslant \varphi_o$. Alors, soit tout $v \in H_{\Psi,z_o}$ vérifie $p_o \notin SS_{\varphi_o}(v)$,

soit Ψ est dérivable en z_o et $\frac{2}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial z}(z_o) = \frac{2}{i}\frac{\partial\varphi_o}{\partial z}(z_o)$

Idée de la preuve

On peut supposer $\Psi(z_o) = \varphi_o(z_o)$. Si Ψ n'est pas dérivable en z_o, son graphe à l'allure suivante :



Sur le bord d'un voisinage V de z_o on a donc $\Psi(z) \leqslant \varphi_o(z_o) - C$ avec $C > 0$.

Soit $v \in H_{\Psi,z_o}$. Quitte à multiplier v par une constante et une puissance de λ, on peut supposer : $\frac{1}{\lambda} \operatorname{Log}|v(z,\lambda)| \leqslant \Psi(z)$. Or le membre de gauche est pluri-harmonique et majoré par $\varphi_o(z_o) - C$ sur ∂V donc en tout point de V. Alors $p_o \notin SS_{\varphi_o}(v)$.

Preuve du théorème 3

Elle utilise la proposition :

PROPOSITION 12

Soient Σ une sous-variété analytique de $\mathbb{R}^n$ et $u \in I_\Sigma^m$ avec $m + \frac{n}{4} < -\frac{n}{2}$. Alors $Tu(z,\lambda) \in H_{\varphi_\Sigma}$ où φ_Σ est la fonction pluri-harmonique naturellement associée à $T_\Sigma^* \mathbb{R}^n$ (cf paragraphe 2).

Démonstration

Supposons Σ donnée par $x'' = 0$ dans $\mathbb{R}^{n'}_{x'} \times \mathbb{R}^{n''}_{x''}$. Il existe alors un symbole analytique d'ordre $< -n''$ avec $u(x) = \int e^{ix''.\xi''} a(x',\xi'')d\xi''$. Si $\alpha > 0$ est assez petit, la suite de fonctions entières $u_\varepsilon(x) = \int e^{ix''.\xi''-\varepsilon\xi''^2} a(x',\xi'')d\xi''$ converge uniformément lorsque $\varepsilon \to 0+$ sur $\{(x',x'') \in \mathbb{C}^n \; ; \; |\mathrm{Im}\; x''| \leqslant \alpha\, |\mathrm{Re}\; x''|\}$. En appliquant le théorème 3.2.1 de [3], on en déduit que $SS^{2,1}_{T^*_\Sigma \mathbb{R}^n}(u)$ est contenu dans la section nulle de $T^*(T^*_\Sigma \mathbb{R}^n)$. Utilisant [8], § IV-5, on en déduit $Tu \in H_{\varphi_\Sigma}$ (où $\varphi_\Sigma = -\mathrm{Im}\,\frac{iz''^2}{2}$).

Fin de la preuve

La proposition 12 et le théorème 8 entraînent que

(23) $$SS^{2,1}_{T^*_N \mathbb{R}^n}(u) \subset C_{T^*_{\tilde{N}} \mathbb{C}^n}(T^*_{\tilde{\Sigma}} \mathbb{C}^n) \cap T^*(T^*_N \mathbb{R}^n)$$

Grâce à (8) on en déduit une majoration de $SS(u_{|N})$ que l'on estime par le membre de droite de (4) en revenant à la définition du cône normal.

Preuve du théorème 4

Avec les notations de l'énoncé, $(x,t,\theta) \to \Phi(x,t,\theta) = \varphi(x,\theta) + t\theta$ est une phase non dégénérée associée à la Lagrangienne

$$\Lambda = \{(x, -\varphi'_\theta(x,\theta) \; ; \; \varphi'_x(x,\theta),\theta) \; ; \; (x,\theta) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^N - \{o\})\}$$

et $v(x,t) = \int e^{i\Phi(x,t,\theta)} a(x,\theta)d\theta$ est une distribution Lagrangienne sur Λ vérifiant $v(x,t)_{|t=o} = u(x)$.

On déduit alors de la proposition 12 et de l'invariance des distributions Lagrangiennes par transformations canoniques que Tv est dans l'espace H_{φ_Λ}, φ_Λ désignant la fonction pluri-harmonique naturellement associée à Λ. En utilisant le théorème 8 et en revenant à la définition du cône normal, on obtient la conclusion.

Remarque

Dans le théorème 8, on peut supposer que Ψ est seulement localement Lipschitzienne sous-analytique et telle que Λ_Ψ vérifie une condition de positivité convenable (cf. [3]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] : L. BOUTET DE MONVEL - P. KREE
"Pseudo-differentials operators and Gevrey classes".
Ann. Inst. Fourier, 17, (1967), p. 295-303.

[2] : J.M. DELORT
"Une propriété de borne uniforme pour la mesure d'une chaîne résolvant un bord sous-analytique".
Note aux C.R.A.S., Paris, 300, série I, (1985), p. 577-580.

[3] : J.M. DELORT - G. LEBEAU
"Microfonctions I-Lagrangiennes".
A paraître.

[4] : P. GERARD
Thèse de 3ème Cycle, Orsay (1985) et article à paraître.

[5] : L. HÖRMANDER
"The analysis of linear partial differential operators".
Tome 3, Springer (1982).

[6] : M. KASHIWARA - P. SCHAPIRA
"Microlocal study of sheaves".
Astérisque 128 (1985).

[7] : G. LEBEAU
"Deuxième microlocalisation à croissance"
Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, (1982-83), exposé XV.

[8] : G. LEBEAU
"Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes"
Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 35, (2), (1985), p. 145-216.

[9] : J.B. POLY
"Formule des résidus et intersection des chaînes sous-analytiques".
Thèse d'Etat, Poitiers, (1974).

[10] : J. SJÖSTRAND
"Singularités analytiques microlocales"
Astérisque 95, (1982).