Journées Équations aux dérivées partielles

Jean-Marc Delort

Problème mixte hyperbolique avec saut sur la condition aux limite

Journées Équations aux dérivées partielles (1987), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1987____A22_0>

PROBLEME MIXTE HYPERBOLIQUE

AVEC SAUT SUR LA CONDITION AUX LIMITES

PAR

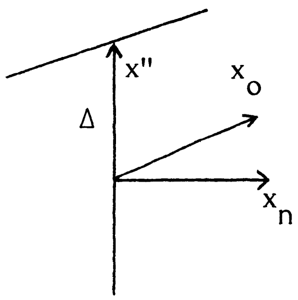
Jean-Marc DELORT
I.R.M.A.R.
L.A. n° 305
Campus de Beaulieu
35042 - RENNES CEDEX - FRANCE -

Le but de cet exposé est l'étude du problème mixte hyperbolique linéaire pour un système dans le cas où la condition aux limites n'est pas C^∞ mais présente un saut sur une hypersurface non caractéristique du bord. On étudie d'abord la résolution du problème dans L^2 puis la propagation de la régularité conormale le long de l'hypersurface de saut.

1 - POSITION DU PROBLEME ET HYPOTHESES

Notations :

On note $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$ le demi-espace $\{(x_o,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} ; x_n \geqslant 0\}$ et $\mathbb{R}^n$ son bord d'équation $x_n = 0$. On se donne Δ hypersurface du bord $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_o = 0$ et on désigne par $x'' = (x_1,\dots,x_{n-1})$ les coordonnées sur Δ et par $x' = (x_o,x'')$ les coordonnées sur le bord. On note L un système N x N d'opérateurs différentiels de degré 1 à coefficients C^∞ sur $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$ constants hors d'un compact tel que $\{x_n = 0\}$ soit non caractéristique pour L. On peut donc supposer la partie principale L_1 de la forme $L_1 = D_n - A(x;D')$. On fera les deux hypothèses :



(H_1) L_1 est strictement hyperbolique dans la direction $d\,x_1$

(H_2) $T^*_\Delta\, \mathbb{R}^{n+1}$ ne rencontre par $\mathcal{C}ar\,(L)$ hors de la section nulle.

La conjonction de ces deux hypothèses entraîne que N est pair. On posera $\mu = \frac{N}{2}$. On se donne une condition aux limites $b : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^\mu)$ fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n - \Delta$, localement constante sur $\mathbb{R}^n - (\Delta \cup K)$ pour K compact assez grand de $\mathbb{R}^n$. Il s'agit de résoudre un problème du type suivant : étant donné λ paramètre réel positif assez grand et $f \in e^{\lambda x_1} L^2(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+, \mathbb{C}^N)$, $g \in e^{\lambda x_1} L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^\mu)$ (x_1 est la variable d'hyperbolicité) trouver $u \in e^{\lambda x_1} L^2(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+, \mathbb{C}^N)$ telle que la trace $\gamma_o u$ sur le bord soit $e^{\lambda x_1} L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$ solution du système :

$$(1) \qquad \left| \begin{array}{l} L\,u = f \\ \\ b\,\gamma_o u = g \end{array} \right.$$

Remarquons que l'hypothèse (H_2) entraîne qu'il n'y a pas de singularités propagées à l'intérieur.

Dans le cas où la condition aux limites est C^∞ il est nécessaire pour que le problème précédent soit bien posé de supposer réalisée la condition de Lopatinski uniforme ([5] , [3]). Notons pour $x' \in \mathbb{R}^n$ et $(\xi',\lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $\lambda > 0$, $E_+(x';\xi',\lambda)$ la somme directe des sous-espaces spectraux associés aux valeurs propres à partie imaginaire strictement positive de la matrice :

$$(2) \qquad a(x';\xi',\lambda) = A(x',o;\xi_o,\xi_1 - i\lambda, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$$

On sait ([3]) que $E_+(x';\xi',\lambda)$ est fonction C^∞ de son argument, homogène de degré O et se prolonge continûment à $\{(x';\xi',\lambda)\ ;\ x' \in \mathbb{R}^n\ ,\ (\xi',\lambda) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}\ ,\ \lambda \geq 0\}$. La condition de Lopatinski uniforme s'énonce alors :

(H_3) Les sous-espaces $\operatorname{Ker} b(x')$ et $E_+(x';\xi',\lambda)$ sont transversaux pour tous $x' \in \mathbb{R}^n$, $(\xi',\lambda) \in \overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+ - \{0\}$

(la condition précédente doit se lire pour les limites à droite et à gauche de b lorsque $x' \in \Delta$).

Les hypothèses (H_1) à (H_3) ne suffisent pas à résoudre le problème lorsque b a un saut. On est amené à rajouter une hypothèse supplémentaire d'ailleurs nécessaire lorsque L est à coefficients constants et b localement constante sur $\mathbb{R}^n - \Delta$.

Soit $m(x';\xi',\lambda)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \times S_+^n = \mathbb{R}^n \times \{(\xi',\lambda) ; \xi'^2+\lambda^2 = 1 , \lambda \geqslant 0\}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^\mu,\mathbb{C}^N)$ telle qu'en chaque point $\mathfrak{Im}\, m(x';\xi',\lambda) = E_+(x';\xi',\lambda)$. Soit $b_o(x')$ la fonction définie par

$$(3) \qquad \left| \begin{array}{ll} b_o(x_o,x'') = b(+0,x'') & \text{si } x_o > 0 \\ b_o(x_o,x'') = b(-0,x'') & \text{si } x_o < 0 \end{array} \right.$$

On suppose alors :

(H_4) L'opérateur $w \to b_o(x')\, m(o,x'';D_o,\xi'',\lambda)$ est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^\mu)$ pour tout $x'' \in \Delta$, $(\xi'',\lambda) \in S_+^{n-1} = \{(\xi'',\lambda) ; \xi''^2 + \lambda^2 = 1 , \lambda \geqslant 0\}$

On remarquera que l'hypothèse précédente est indépendante du choix de m vérifiant les conditions requises et est ouverte. En outre, si $\tilde{b}$ est une condition aux limites C^∞ constante hors d'un compact telle que $(L,\tilde{b})$ satisfasse à la condition de Lopatinski uniforme (H_3) il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute fonction b ayant un saut sur Δ et vérifiant $||b-\tilde{b}||_{L^\infty(\Delta)} < \varepsilon$, le couple (L,b) vérifie (H_4).

La condition (H_4) est une version renforcée d'une condition de type spectral sur b. Plus précisément, on démontre en utilisant les travaux de Rempel-Schulze [6] :

PROPOSITION 1

Soient $E_1(x'') = E_+(0,x'';\xi_o = 1 , \xi'' = 0 , \lambda = 0)$, $E_2(x'') = E_+(0,x'';\xi_o = -1 , \xi'' = 0 , \lambda = 0)$ et $b_j^\pm(x'') = b(\pm 0,x'')_{|E_j}$, j = 1,2. Alors :

i) (H_4) entraine que la matrice $b_1^+(x'')\,(b_2^+(x''))^{-1}\,b_2^-(x'')\,(b_1^-(x''))^{-1}$ n'a pas de valeur propre réelle négative .

ii) Réciproquement, si cette condition est réalisée l'opérateur défini dans l'hypothèse (H_4) est de Fredholm.

2 - RESOLUTION DU PROBLEME L^2

Remarquons d'abord qu'il est nécessaire de préciser le sens à donner à la condition aux limites de (1) au voisinage de Δ. On sait en effet que $u \in L^2_{loc}$ et $Lu \in L^2_{loc}$ entrainent que $\gamma_o u$ existe et est $H^{-1/2}_{loc}$ mais cela ne suffit pas pour définir le produit $b\,\gamma_o u$. Pour contourner cette difficulté, on montrera que l'ellipticité de L près de $T^*_\Delta\,\mathbb{R}^{n+1}$ entraine une régularité microlocale tangentielle de la solution dans cette zone qui permet de décomposer la trace en $\gamma_o u = \gamma_o u_1 + \gamma_o u_2$ où $\gamma_o u_1 \in L^2_{loc}$ et $\gamma_o u_2 \in H^{-1/2}_{loc}$ et est microlocalement concentré hors de $T^*_\Delta\,\mathbb{R}^n$. Le produit a donc un sens et est $H^{-1/2}_{loc}$.

La résolution du problème L^2 se fait comme dans le cas classique par l'utilisation d'une inégalité d'énergie qui reflète en outre le gain de régularité microlocale tangentielle découlant de l'ellipticité de L près de $T^*_\Delta\,\mathbb{R}^{n+1}$.

On notera $\dot{H}^s_\lambda(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ l'espace $L^2(\mathbb{R}^+_{x_n}, H^s(\mathbb{R}^n_{x'}))$ muni de la norme :

$$(4) \qquad ||v||^2_{s;\lambda} = \int_0^{+\infty} \int v\,(\xi',x_n)^2\,(\lambda^2 + \xi'^2)^s\,d\xi'\,dx_n$$

On posera $L^\lambda = e^{-\lambda x_1}\,L\,e^{\lambda x_1}$ et on appellera points elliptiques de L^λ les $(x;\xi',\lambda)$ tels que $a(x;\xi',\lambda)$ n'ait pas de valeur propre réelle.

PROPOSITION 2

Soient $\varphi(x;\xi',\lambda)$, $\Psi(x;\xi',\lambda)$ deux symboles d'opérateurs pseudo-différentiels tangentiels à majorations uniformes et à paramètre, à valeurs réelles positives, d'ordre O, vérifiant $\varphi^2 + \Psi^2 \equiv 1$ et tels que Supp φ soit contenu dans l'ensemble des points elliptiques de L^λ et reste à une distance strictement positive du bord de cet ensemble. Il existe alors $\lambda_o > O$, $C > O$ tels que pour tout $v \in C_o^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ on ait :

$$(5) \qquad ||\varphi(x;D',\lambda)v||^2_{\frac{1}{2};\lambda} + \lambda||v||_o^2 + |\gamma_o v|_o^2 \leqslant$$
$$\leqslant C\,[\tfrac{1}{\lambda}\,||\Psi(x;D',\lambda)\,L^\lambda v||_o^2 + ||L^\lambda v||^2_{-\frac{1}{2};\lambda} + |b\gamma_o v|_o^2]$$

($|.|_o$ désignant la norme L^2 sur le bord) dès que $\lambda \geqslant \lambda_o$.

La preuve de cette inégalité se fait pas construction d'un symétriseur [5], [3] i.e. d'un opérateur pseudo-différentiel tangentiel d'ordre O, R, à valeurs dans l'espace des matrices hermitiennes N x N tel qu'il existe $C > O$, $\lambda_o > O$, $c > O$ avec :

$$(6) \qquad \left|\begin{array}{ll} \mathfrak{J}m(R\ A) \geqslant c\,\lambda\,Id\ ,\ \forall\,\lambda \geqslant \lambda_o & \text{sur } L^2(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}\ ,\ \mathbb{C}^N) \\ -\,R + C\,b^*\,b \geqslant c\,Id\ ,\ \forall\,\lambda \geqslant \lambda_o & \text{sur } L^2(\mathbb{R}^n\ ,\ \mathbb{C}^N) \\ \sigma(\mathfrak{J}m(R\ A)) \geqslant c(\xi'^2 + \lambda^2)^{1/2}\,Id & \text{au voisinage de Supp } \varphi \end{array}\right.$$

La différence avec le cas classique est que la deuxième inégalité de (6) ne découle pas de son analogue au niveau des symboles. C'est ici que l'on doit faire intervenir l'hypothèse supplémentaire (H_4).

On déduit de (6) un théorème d'existence et d'unicité dans des espaces L^2 à poids par une méthode de dualité, en utilisant la régularité elliptique microlocale pour traiter les difficultés liées au saut de b. Par vitesse finie de propagation, il en résulte un théorème d'existence et d'unicité dans des domaines d'influence de la forme :

$$(7) \qquad \Omega = \{(x_o,\dots,x_n) \in \bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}\ ;\ \delta(x_o^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) < T - x_1\}\ ,\ \partial\Omega = \Omega \cap \{x_n = O\}$$

<u>*THEOREME 3*</u>

Soit (L,b) un problème mixte vérifiant les hypothèses (H_1) à (H_4). Il existe

$\delta > 0$ tel que si $f \in \dot{H}^{-1/2}_{loc}(\Omega)$ est microlocalement tangentiellement L^2 hors d'un voisinage de $T^*_\Delta \partial\Omega \times \{0\}$ dans $T^*\partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+$ contenu dans l'ensemble des points elliptiques de L et si $g \in L^2_{loc}(\partial\Omega)$ sont nulles dans le passé $\{x_1 < 0\}$, il existe $u \in L^2_{loc}(\Omega)$ vérifiant $u \in \dot{H}^{1/2}$ microlocalement tangentiellement près de $T^*_\Delta \partial\Omega \times \{0\}$ unique solution de :

$$(8) \qquad \left| \begin{array}{ll} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ b\,\gamma_0 u = g & \text{sur } \partial\Omega \\ u|_{x_1<0} = 0 & \end{array} \right.$$

En outre $\gamma_0 u \in L^2_{loc}(\Omega)$.

On peut bien sûr écrire à partir de(5) une inégalité d'énergie vérifiée par u dans une famille d'ouverts $\Omega_\rho \subset \Omega$, de même forme que Ω (cf [4]).

3 - PROPAGATION DE LA REGULARITE CONORMALE

Rappelons d'abord la définition des espaces de distributions conormales. Posons $\tilde{\Lambda} = T^*_\Delta \mathbb{R}^{n+1}$, $\Lambda = T^*_\Delta \mathbb{R}^n$. On note pour $k \in \mathbb{N}$:

$$(9) \qquad \left| \begin{array}{l} H^{o,k}_{\tilde{\Lambda}}(\Omega) = \{u \in L^2_{loc}(\Omega) \; ; \; \forall \; \ell \leqslant k, \tilde{\mathcal{Z}}^\ell u \subset L^2_{loc}(\Omega)\} \\ H^{o,k}_{\Lambda}(\partial\Omega) = \{u \in L^2_{loc}(\partial\Omega) \; ; \; \forall \; \ell \leqslant k, \mathcal{Z}^\ell u \subset L^2_{loc}(\partial\Omega)\} \end{array} \right.$$

$\tilde{\mathcal{Z}}$ (resp. $\mathcal{Z}$) désignant le module des champs de vecteurs sur Ω (resp. $\partial\Omega$) tangents à Δ. Il s'agit de prouver :

THEOREME 4

Supposons que les données f et g du théorème 3 sont respectivement dans $H^{o,k}_{\tilde{\Lambda}}(\Omega)$ et $H^{o,k}_{\Lambda}(\partial\Omega)$. Alors $u \in H^{o,k}_{\tilde{\Lambda}}(\Omega)$ et $\gamma_0 u \in H^{o,k}_{\Lambda}(\partial\Omega)$.

Notons :

$$(10) \qquad Z_o = x_o\, D_o \ , \ Z_j = D_j \ , \ j = 1,\dots,n-1 \ , \ Z_n = x_n\, D_o$$

Le bord étant non caractéristique, il suffit de prouver que $u \in \overset{\bullet}{H}{}^{o,k}_{\Lambda}(\Omega)$ où pour $s \in \mathbb{R}$:

$$(11) \qquad \overset{\bullet}{H}{}^{s,k}_{\Lambda}(\Omega) = \{u \in \overset{\bullet}{H}{}^{s}_{loc}(\Omega) \ ; \ \forall\, \ell \leqslant k \ , \ Z_{i_1} \dots Z_{i_\ell}\, u \in \overset{\bullet}{H}{}^{s}_{loc}(\Omega)\}$$

les Z_{i_j} étant choisis parmi les champs (10).

L'idée de la preuve du théorème consiste à commuter les champs Z_j au problème afin d'obtenir un système de la même forme que (8). Si Z désigne l'un des champs Z_j, on a en effet :

$$(12) \qquad \left|\begin{array}{l} L(Zu) = Zf + [L,Z]u \\[2ex] b\gamma_o(Zu) = Zg + [b,Z]\gamma_o u \end{array}\right.$$

et, suivant une idée de Beals-Métivier [1] , on écrit $[L,Z] = \sum\limits_{o}^{n} \alpha_j\, Z_j + \varphi(x;D')D_o$ où les α_j et φ sont des opérateurs pseudo-différentiels tangentiels d'ordre O, le symbole de φ étant concentré dans un voisinage assez petit de $T^*_\Delta \mathbb{R}^n \times \{O\}$. Le système obtenu en écrivant (12) pour tous les champs Z_j est alors du type de (8), ses données $Z_j f$, $Z_j g$, $\varphi(x;D')D_o u$ vérifiant, si le support de φ est assez petit, les hypothèses de régularité du théorème (grâce à la régularité $\overset{\bullet}{H}{}^{1/2}$ de u près de $T^*_\Delta \mathbb{R}^n \times \{O\}$).

Bien sûr, l'assertiond'unicité du théorème n'étant faite que pour les solutions dont on sait déjà qu'elles ont une régularité L^2, cela ne suffit pas pour conclure. Pour cela, il faut d'abord régulariser les $Z_j u$ en une famille $(Z_j u)_\varepsilon$ qui pour $\varepsilon > O$ est $L^2_{loc}(\Omega)$, microlocalement tangentiellement $\overset{\bullet}{H}{}^{1/2}$ près de $T^*_\Delta \mathbb{R}^n \times \{O\}$, exprimer le système dont sont solution ces régularisées, prouver une inégalité d'énergie satisfaite par les $(Z_j u)_\varepsilon$ uniformément en $\varepsilon > O$ et en déduire la régularité des $Z_j u$ lorsque $\varepsilon \to O_+$.

On renvoie à [4] pour la démonstration précise. Signalons seulement que le saut de b oblige à utiliser une régularisation uniquement conormale, du type $v_\varepsilon = A_\varepsilon v$ avec $A_\varepsilon = (1 + \varepsilon^2(x_o^2 + x_n^2)D_o^2 + \varepsilon^2 D''^2)^{-1}$. Un tel opérateur ne peut se définir que dans le cadre d'une version tangentielle de la deuxième microlocalisation de Bony [2]. On construit celle-ci de la manière suivante : $\dot{H}_\Lambda^{s,k}$ désignant pour $k \in \mathbb{N}$ l'espace $\dot{H}_\Lambda^{s,k}(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ (11), on en déduit par dualité et interpolation une famille $\dot{H}_\Lambda^{s,s'}$, $s' \in \mathbb{R}$. Suivant Bony, on pose alors :

DEFINITION 5

Une famille A_ε, $\varepsilon \in]0,1]$ d'opérateurs linéaires de $C^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ dans $\mathcal{D}'(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ proprement supportés uniformément en $\varepsilon \in]0,1]$ est dans $\mathcal{O}p(\Sigma_\Lambda^{m,m'})$ si et seulement si:

$\forall (s,s') \in \mathbb{R}^2$, $\forall\, k,\ell \in \mathbb{N}$, l'opérateur $\mathrm{Ad}\,P_1 \circ \ldots \circ \mathrm{Ad}\,P_k \circ \mathrm{Ad}\,Z_{i_1} \circ \ldots \circ \mathrm{Ad}\,Z_{i_\ell} A_\varepsilon$ est uniformément borné de $\dot{H}_\Lambda^{s,s'}$ dans $\dot{H}_\Lambda^{s-m-\Sigma p_j, s'-m'+k}$

où les P_j sont soit des opérateurs pseudo-différentiels tangentiels d'ordre p_j, soit $P_j = D_n$ et $p_j = 1$ et où les Z_{i_j} décrivent l'ensemble de champs (10).

Ces opérateurs sont des opérateurs pseudo-différentiels tangentiels à l'intérieur et ne deviennent 2-microdifférentiels que sur le bord. Suivant [2] on peut prouver un théorème de calcul symbolique. Cela permet de définir A_ε comme opérateur de $\mathcal{O}p(\Sigma_\Lambda^{0,0})$ et de voir que $\varepsilon^2 A_\varepsilon \in \mathcal{O}p(\Sigma_\Lambda^{0,-2})$. En outre, à $\varepsilon > 0$ fixé, A_ε fait gagner 2 dérivées conormales. Le système vérifié par les régularisées des $Z_j u$ s'obtient alors en commutant A_ε à L et à b, ce dernier commutateur pouvant s'étudier malgré le saut de b en utilisant le fait que A_ε est l'inverse d'un opérateur différentiel tangentiel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] : M. BEALS - G. METIVIER : "Reflection of transversal progressing waves in non-linear strictly hyperbolic mixed problems".
Amer. J. Math. 109, (1987), p. 335-359.

[2] : J.M. BONY : "Second microlocalization and propagation of singularities for semi-linear hyperbolic equations".
Prépublications de l'Université de Paris-Sud, Orsay (1985).

[3] : J. CHAZARAIN - A. PIRIOU : "Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires".
Gauthier-Villars, Paris (1981).

[4] : J.M. DELORT : "Problème mixte hyperbolique avec saut sur la condition aux limites".
A paraître.

[5] : K.O. KREISS : "Initial boundary value problems for hyperbolic systems".
Comm. Pure Appl. Math. 13 (1970), p. 277-298.

[6] : S. REMPEL - B.W. SCHULZE : "Parametrices and boundary symbolic calculus for elliptic boundary problems without the transmission property".
Math. Nachr. 105 (1982), p. 45-149.

Note : J'ai récemment pris connaissance d'un travail de G. Eskin intitulé : "Mixed initial-boundary value problems for second order hyperbolic equations" paru aux Comm. in Partial Differential Equations, 12, p. 503-587 (1987) dans lequel l'auteur prouve pour les équations d'ordre 2 un résultat analogue au théorème 3 ci-dessus.