

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

BERNARD HELFFER

ABDEREMANE MOHAMED

Caractérisation du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique

Journées Équations aux dérivées partielles (1987), p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1987____A4_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Caractérisation du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique
par A.Mohamed (d'après Helffer-Mohamed)

§0 Introduction

On considère sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique $H(\vec{a}) + V : H(\vec{a}) = \sum_{j=1}^n (D_j - a_j(x))^2$; $D_j = i^{-1} \partial_{x_j}$ et $i = \sqrt{-1}$.

Le potentiel électrique $V(x)$ ainsi que le potentiel magnétique $\vec{a}(x)$ sont supposés réels: $\vec{a}(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$.

On supposera que \vec{a} est de classe C^1 et que V est continu et de la forme:

$$(0.1) \quad \begin{cases} V(x) = V_0(x) + \sum_{i=1}^p V_i^2(x) ; \text{ avec} \\ V_0(x) > -C_0 ; \quad (C_0 \text{ constante donnée}). \end{cases}$$

Le champ magnétique sera identifié à la matrice réelle et anti-symétrique $B(x)$:

$$(0.2) \quad B(x) = [b_{ij}(x)]_{1 \leq i, j \leq n} ; \quad b_{ij}(x) = \partial_{x_j} a_i(x) - \partial_{x_i} a_j(x).$$

La forme variationnel $q_V(\vec{a})$:

$$q_V(\vec{a})(u) = ((H(\vec{a}) + V)u; u);$$

(le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ est noté $(\cdot; \cdot)$, et la norme associée $\|\cdot\|$), induit un opérateur auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, que nous notons encore $H(\vec{a}) + V$. L'inégalité:

$$(0.3) \quad \|(H(\vec{a}) + V + \lambda)^{-1} f\| \leq (-\Delta + \lambda)^{-1} \|f\| ; \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n) ;$$

permet de montrer que $H(\vec{a}) + V$ est essentiellement auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ à partir de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des fonctions indéfiniment

dérivables à support compact (cf. [AV.-HE.-SI.]).

Notre objet est de caractériser le spectre $\sigma(H(\vec{a}) + V)$ de $H(\vec{a}) + V$, et plus précisément le spectre essentiel $\sigma_{\text{ess}}(H(\vec{a}) + V)$.

Comme dans le cas sans champ magnétique l'ellipticité uniforme de $H(\vec{a})$ permet d'établir l'égalité de Persson.

Théorème 0 (Persson): Soit $E = \text{Inf } \sigma_{\text{ess}}(H(\vec{a}) + V)$; alors on a:

$$(0.4) \quad E = \lim_{R \rightarrow +\infty} \text{Inf} \left\{ ((H(\vec{a}) + V)u; u) ; u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus Q_R), \|u\| = 1 \right\}$$

(Q_R étant la boule de rayon R centre en zero).

Le cas où $H(\vec{a}) + V$ est à résolvante compacte correspond au cas où $E = +\infty$. Ce cas a été beaucoup étudié, on mettait des hypothèses assurant le contrôle de la dérivée de $B(x)$ par $|B(x)|$, et quand $|B(x)|$ tendait vers l' ∞

on pouvait conclure en utilisant (0.4). Le résultat le plus récent en ce sens est dû à Iwatsuka ([IWA.]₂), (voir aussi [DUF.]) qui montre que si $B(x)$ est de classe C^2 et si :

$$(0.5) \quad |B(x)| \underset{|x| \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty ; \text{ et}$$

$$(0.6) \quad |\nabla B(x)|/|B(x)|^2 \underset{|x| \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 ;$$

alors $H(\vec{a}) + V$ est à résolvante compacte.

Toutefois dans le cas où \vec{a} et V sont des polynômes, la théorie des groupes de Lie développée par Helffer et Nourrigat ([HE.-NO.]) fournit toute une série d'exemples ne rentrant pas dans ce cadre mais à résolvante compacte.

La caractérisation du spectre essentiel de $H(\vec{a})$ n'a été étudiée que dans le cas de la perturbation du champ nul ou constant (cf [IWA.]₁ pour le cas $n=2$ et [MOH.] pour le cas général). Notre caractérisation du spectre essentiel donné par le théorème 3, contient les résultats précédents et est, à notre connaissance nouvelle même dans le cas sans champ magnétique.

§1. Enoncé des résultats

Pour caractériser la compacité de la résolvante, on a le théorème:

Théorème 1: Sous la condition (0.1), si on a:

$$(1.1) \quad V_0 \in C^1, \text{ et } V_j \in C^{r+2}, j=1, \dots, p; \text{ et } b_{ij} \in C^{r+1}, 1 \leq i < j \leq n;$$

(r étant un entier ≥ 0)

et s'il existe une constante C_1 telle que l'on ait:

$$(1.2) \quad |\partial_x^\beta B(x)| + |\nabla V_0(x)| + \sum_{j=1}^p |\partial_x^\alpha V_j(x)| \leq C_1 m(x); |\alpha| = r+2 \text{ et } |\beta| = r+1;$$

$$\text{avec, } m(x) = 1 + |V_0(x)| + \sum_{j=1}^p \sum_{|\alpha|=0}^{r+1} |\partial_x^\alpha V_j(x)| + \sum_{|\beta|=0}^r |\partial_x^\beta B(x)|.$$

Alors, il existe une constante C_2 telle que l'on ait:

$$(1.3) \quad \|(m(x))^{2^{-r-1}} u\|^2 \leq C_2 (q_V(\vec{a})(u) + \|u\|^2); \forall u \in D(q_V(\vec{a}));$$

$$(1.4) \quad \|(m(x) + V(x))^{2^{-r}} u\| \leq C_2 (\|(H(\vec{a}) + V)u\| + \|u\|); \forall u \in D(H(\vec{a}) + V).$$

($D(q_V(\vec{a}))$) et $D(H(\vec{a}) + V)$ désignent les domaines de $q_V(\vec{a})$ et $H(\vec{a}) + V$.

Corollaire 2: Sous les hypothèses du théorème 1, et si:

$$V(\mathbf{x}) + m(\mathbf{x}) \underset{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty ;$$

Alors $H(\vec{a}) + V$ est à résolvante compacte.

On s'intéresse maintenant au cas où les hypothèses du théorème 1 ne sont plus satisfaites.

Supposons que:

$$(1.5) \quad B(\mathbf{x}) \in C^{r+3}.$$

Soit $\varphi(\mathbf{x})$ un poids tempéré sur \mathbf{R}^n vérifiant:

$$(1.6) \quad \begin{cases} 1 \leq \varphi(\mathbf{x}) ; \text{ et } \varphi(\mathbf{x}) \underset{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \exists \rho > 0 \text{ et } C_3 > 0 \text{ tels que: } |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \rho \varphi(\mathbf{x}) \Rightarrow C_3^{-1} \varphi(\mathbf{y}) \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq C_3 \varphi(\mathbf{y}). \end{cases}$$

On suppose qu'il existe C_4 tel que:

$$(1.7) \quad |\nabla V_0(\mathbf{x})| + \sum_{j=1}^p \sum_{|\alpha|=r+2} |\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} V_j(\mathbf{x})| + \sum_{|\alpha|=r+1}^{\infty} \varphi^{|\alpha|-r-1}(\mathbf{x}) |\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} B(\mathbf{x})| \leq C_4 \varphi^{-1}(\mathbf{x});$$

Théorème 3: Sous les hypothèses (1.1), (1.5), (1.6) et (1.7), on a:

$$\sigma_{\text{ess}}(H(\vec{a}) + V) = \overline{S_{\infty}}$$

(S_{∞} est défini ci-dessous).

Pour un \mathbf{y} fixé on définit les potentiels polynômiaux $\vec{b}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ et $V_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$:

$$\vec{b}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=0}^r (\alpha!(2+|\alpha|))^{-1} \mathbf{x}^{\alpha} (\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} B(\mathbf{y})), \mathbf{x}; \text{ et}$$

$$V_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = V_0(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^p \left(\sum_{|\alpha|=0}^{r+1} \mathbf{x}^{\alpha} \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} V_j(\mathbf{y}) / \alpha! \right)^2.$$

$$S_{\infty} \text{ est alors défini par: } S_{\infty} = \bigcup_{z_{\infty} \in \Gamma} \sigma(H(\vec{b}_{z_{\infty}}) + V_{z_{\infty}});$$

où Γ est l'ensemble des suites $z_{\infty} = (y_{\nu})_{\nu}$, telles que: $|y_{\nu}| \underset{\nu \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

$$\vec{b}_{y_{\nu}}(\mathbf{x}) \underset{\nu \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \vec{b}_{z_{\infty}}(\mathbf{x}) \text{ et } V_{y_{\nu}}(\mathbf{x}) \underset{\nu \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} V_{z_{\infty}}(\mathbf{x});$$

(les convergences étant celles entre polynômes).

Que S_{∞} soit un fermé n'est pas évident en dehors du cas $r=0$. Comme application de la théorie des groupes de Lie de [HE.-NO.], nous montrons:

Proposition 4: Si $V_0 = 0$, alors S_{∞} est un fermé.

On peut préciser le résultat de [IWA]₂ en établissant des estimations a priori comme dans le théorème 1.

Remarque 5: Sous l'hypothèse (0.5), si $B(x)$ est de classe C^1 , et s'il existe δ , $0 \leq \delta < 2$, et une constante C_5 tels que:

$$(1.8) \quad |\nabla B(x)| \leq C_5 |B(x)|^\delta;$$

Alors il existe C_6 tel que l'on ait:

$$(1.9) \quad \|\Phi u\|^2 \leq C_6 (q_0(\vec{a})(u) + \|u\|^2); \quad \forall u \in D(q_0(\vec{a}));$$

et, si $0 \leq \delta < 3/2$, on a en plus:

$$(1.10) \quad \|\Phi^2 u\| \leq C_6 (\|H(\vec{a})u\| + \|u\|); \quad \forall u \in D(H(\vec{a}))$$

$$(\Phi(x) = |B(x)|^{1/2}, \text{ si } \delta \leq 3/2, \text{ et } \Phi(x) = |B(x)|^{2-\delta}, \text{ si } 3/2 < \delta < 2).$$

(Quand $\delta \leq 3/2$, (1.9) résulte de [DUF].)

Quand il existe un couple (i,j) tel que: $b_{ij}(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} +\infty$;

$H(\vec{a})$ est à resolvente compacte. C'est ce qui se passe quand $n=2$ et que (0.5) est vérifié.

Quand $n > 2$ et que (0.5) est vérifié ainsi que (1.8) avec $\delta=2$; il existe un contre-exemple de [IWA]₂ où $H(\vec{a})$ n'est plus à resolvente compacte.

Remarque 6: Les résultats ci-dessus sont encore valables si on perturbe V par un potentiel σ - Δ -borné, avec $0 \leq \sigma < 1$.

§2 Esquisse de démonstration

+Pour le théorème 1, notre démonstration s'inspire de la démonstration de Kohn ([KOH.]) de l'hypoellipticité de l'opérateur de Hörmander somme de carrés de champs de vecteurs.

Pour tout réel s , on considère l'ensemble M^s des fonctions $\ell(x)$ telles qu'il existe une constante C_ρ de façon à avoir:

$$\|m^{s-1} \ell u\|^2 \leq C_\rho (q_v(\vec{a})(u) + \|u\|^2); \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

On a: $V \in M^{1/2}$.

La métrique riemannienne g_x est tempérée: $g_x(z) = m^{-2}(x)|z|^2$.

En considérant une partition de l'unité de \mathbf{R}^n associée à un recouvrement localement fini de g -boules de rayon ε assez petit, on peut régulariser $m(x)$

de façon à ce qu'il soit de classe C^2 et que:

$$(2.1) \quad |\partial_x^\alpha m(x)| \leq Cm(x); \text{ pour } |\alpha| \leq 2.$$

On considère $H(\vec{a}) + V$ comme une somme de carrés:

$$H(\vec{a}) + V = V_0 + \sum_{j=1}^{n+p} L_j^2 \quad \text{avec } L_j = D_j - a_j(x), j=1, \dots, n \quad \text{et } L_{n+j} = V_j.$$

On vérifie aisément que:

$$(2.2) \quad [L_i; L_j] \in M^{1/2};$$

il suffit de remarquer que:

$$\begin{aligned} \|m^{-1/2} [L_i; L_j] u\|^2 &= (L_j u; m^{-1} [L_i; L_j] L_j u) - (L_i u; m^{-1} [L_i; L_j] L_j u) \\ &\quad + (L_j u; [L_i; m^{-1} [L_i; L_j]] u) - (L_i u; [L_i; m^{-1} [L_i; L_j]] u); \end{aligned}$$

comme $m^{-1} [L_i; L_j]$ est une fonction bornée ainsi que son gradient, on a (2.2).

On montre que:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \text{Si } h(x) \in M^s \cap C^2, \text{ et si, } |\partial_x^\alpha h(x)| \leq Cm(x); \text{ pour } 1 \leq |\alpha| \leq 2, \\ \text{Alors, si } r \geq 1, \text{ on a: } [L_i; h] \in M^{s/2}, \text{ pour tout } i. \end{cases}$$

Alors (2.2), (2.3) et l'hypothèse (1.2) montrent que:

$$(2.4) \quad \begin{cases} \partial_x^\alpha b_{ij}(x) \in M^{2-|\alpha|-1} & \text{pour } |\alpha| \leq r; \\ \partial_x^\alpha V_j(x) \in M^{2-|\alpha|} & \text{pour } j=1, \dots, p, \text{ et } 1 \leq |\alpha| \leq r+1. \end{cases}$$

Les injections $M^s \subset M^t$, si $t \leq s$, permettent d'avoir (1.3) à partir de (2.4).

La démonstration de (1.4) s'obtient à partir de (1.3) en remplaçant dans

$$(1.3) \text{ u par } (|V| + m)^{\frac{-r-1}{2}} u.$$

+ Pour le théorème 2, l'analogie avec les problèmes d'hypoellipticité traités dans [HE.-NO.] permettent de voir que, dans une g -boule centrée en y de rayon assez petit, (ici $g_x(z) = \varphi^2(x)|z|^2$), et sous une jauge que l'on trouve dans [HE.-NO.], l'opérateur $H(\vec{b}_y) + V_y$ est une approximation de $H(\vec{a}) + V$ quand $|y|$ est assez grand.

- Pour établir l'injection: $S_\infty \subset \sigma_{\text{ess}}(H(\vec{a}) + V)$,

on part du fait que: si $\lambda \in \sigma(H(\vec{b}_{z_\infty}) + V_{z_\infty})$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on peut

trouver $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que: $\|(H(\vec{b}_{z_\infty}) + V_{z_\infty} - \lambda)u\| \leq \varepsilon$ et $\|u\| = 1$.

En considérant la suite de fonctions $(u_{\nu})_{\nu} : u_{\nu}(x) = u(x - y_{\nu})$ (où y_{ν} est la suite z_{ν}) on montre que: $]\lambda - 2\varepsilon; \lambda + 2\varepsilon[\cap \sigma_{\text{ess}}(H(\vec{a}) + V) \neq \emptyset$.

- Pour la démonstration de: $\sigma_{\text{ess}}(H(\vec{a}) + V) \subseteq \overline{S_{\infty}}$,

on part d'un $\lambda \notin \overline{S_{\infty}}$. Le théorème 1 permet de voir que, pour $R > 0$ assez grand, il existe $C_R > 0$ tel que:

$$\|(H(\vec{a}) + V - \lambda)u\| \geq C_R \|u\|; \forall u \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n \setminus Q_R);$$

ce qui permet de conclure.

+ Pour la remarque 5, on vérifie que la métrique: $g_x(z) = |B(x)|^{2\delta-2} |z|^2$;

est tempérée. Les estimations des: $((b_{ij}/|B|^s)[L_i; L_i]u; u)$, permettent d'établir (1.9), (on prend $s = 1$ ou $s = 2\delta - 3$ suivant les cas).

L'estimation (1.10) s'obtient comme (1.4) à partir de (1.9), en régularisant au départ $|B(x)|$ de façon à ce que: $|\partial_x^{\alpha} |B(x)|| \leq C|B(x)|^{1+|\alpha|(\delta-1)}$; $1 \leq |\alpha| \leq 2$.

Références

- [AV. - HE. - SI.] J. Avron, I. Herbst and B. Simon;
Duke Math. J. 45,(1978),p.847 - 883.
- [DUF.] A. Dufresnoy; Duke Math. J. 53,(3),(1983),p.729 - 734
- [HE. - NO.] B. Helffer et J. Nourrigat; Progress in Math. vol.58,
Birkhäuser, Boston, (1985).
- [HOR.] L. Hörmander; Comm. Pure Appl. Math. 32,(3),(1979),p.359 - 443
- [IWA.] A. Iwatsuka;
1. J. Math. Kyoto Univ. 23,(3),(1983),p.475 - 480
2. J. Math. Kyoto Univ. 26,(3),(1986),p.357 - 374
- [KOH.] J. J. Kohn; C.I.M.E. (1977),p.91 - 149
- [MOH.] A. Mohamed; à paraître
- [PER.] Y. Persson; Math. Scand. 8(1960),p.143 - 153

A. MOHAMED

Université de Nantes

Département de Mathématiques

UA 758 CNRS

44072 NANTES Cédex 03 FRANCE