JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

FERRUCCIO COLOMBINI

Quelques résultats de non résolubilité locale pour des équations hyperboliques

Journées Équations aux dérivées partielles (1987), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1987____A8_0>

QUELQUES RESULTATS DE NON RESOLUBILITE LOCALE POUR DES EQUATIONS HYPERBOLIQUES.

par

Ferruccio Colombini.

§.1. ENONCES.

Dans cet exposé (*) on considère des opérateurs de la forme

(1) $$P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

sous l'hypothèse de (faible) hyperbolicité

(2) $$a(t,x) \geq 0 ,$$

et l'on se pose la question de la résolubilité locale pour cet opérateur.

Rappelons que l'opérateur P est dit localement résoluble en un point (t_0,x_0) si pour tout $f \in C^\infty(V)$, où V est un voisinage de (t_0,x_0), il existe une solution u de

$$P(u) = f$$

dans un voisinage W de (t_0,x_0) ; on peut chercher u dans $C^\infty(W)$, $C^k(W)$ ou bien $\mathcal{D}'(W)$.

Il y a beaucoup de résultats de résolubilité (ou de non-résolubilité) locale (voir par exemple [5], [6], [7]), mais en général ils sont relatifs au cas d'opérateurs à coefficients C^∞ et de type principal, mais nous ne nous plaçons pas sous ces hypothèses.

(*) Les résultats exposés ici ont été obtenus en collaboration avec S. Spagnolo (voir [4] pour les démonstrations détaillées).

Il est bien connu que pour l'opérateur P défini par (1), le problème de Cauchy (avec des données initiales sur la droite $t=0$) est bien posé dans un espace convenable (par exemple dans C^∞ si a est C^∞ en x, ou dans un espace de Sobolev si a est seulement une fonction mesurable et bornée en x) dès que $a(t,x)$ est une fonction strictement positive et lipschitzienne par rapport à t. On a donc la résolubilité locale sous ces hypothèses.

Par contre des exemples montrent que, même dans le cas où le coefficient a ne dépend que de t, il peut arriver que le problème de Cauchy pour l'opérateur P ne soit pas bien posé dans C^∞ (ni d'ailleurs dans $\mathcal{D}'$) si le coefficient $a(t)$ n'est pas lipschitzien, ou bien si $a(0)=0$ (voir [1] et [3] pour des exemples de non existence et [2] pour des exemples de non-unicité).

On se propose d'étudier ici le problème de la résolubilité locale pour un opérateur donné par (1) d'une part dans le cas strictement hyperbolique, quand a n'est pas une fonction lipschitzienne en t, d'autre part dans le cas faiblement hyperbolique.

Considérons d'abord, pour a ne dépendant que de t, le problème un peu spécial de résolubilité locale où l'on cherche une solution locale en t mais globale en x. Par exemple on peut considérer des deuxièmes membres f périodiques en x, et chercher une solution qui soit elle même périodique en x. On a alors le résultat suivant :

Théorème 1. Il existe une fonction $a(t)$ vérifiant

(3) $$a(t) \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}) \quad \forall \alpha<1 \quad ; \quad a(t) \geq 1/2$$

et une fonction $f(x)$ de classe C^∞, 2π-périodique, telles que l'équation

(4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x)$$

n'a pas de solution 2π-périodique dans la bande $\{(t,x) : |t|<\delta\}$ aussi petit que soit δ.

Plus précisément, $\forall \delta > 0$ il n'existe aucune solution de (4) qui soit dans $C^0(]-\delta,\delta[\ ;\ \mathcal{D}'_{2\pi})$ (où $\mathcal{D}'_{2\pi}$ désigne les distributions 2π-périodiques).

Un résultat analogue est valable pour le cas faiblement hyperbolique:

Théorème 1'. Il existe une fonction $a(t)$ vérifiant

(5) $$a(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})\ ;\ a(t) \geq 0$$

et $f(x) \in C^{\infty}$, 2π-périodique, telles que l'équation (4) n'a pas de solution 2π-périodique dans la bande $\{(t,x)\ ;\ |t| < \delta\}$.

Passons maintenant au vrai problème de la résolubilité locale dans le cas strictement hyperbolique ; on considère maintenant un coefficient a qui dépend également de x. On a alors le résultat suivant.

Théorème 2. Il existe une fonction $a(t,x)$ vérifiant

(6) $$a(t,x) \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)\quad \forall \alpha < 1\ ;\ a(t,x) \geq 1/2$$

telle que l'équation

(7) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(t,x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = x$$

n'a pas de solution $u \in C^1(W)$, quel que soit W voisinage de $(0,0)$.

Remarque 1. On démontre en fait quelque chose de plus précis : le coefficient a que l'on construit est dans $C^{\infty}(\mathbb{R}^2 - \{(t,x) : tx = 0\})$, et pour tout W voisinage de $(0,0)$ il n'existe pas de $u \in \mathcal{D}'(W)$ qui vérifie l'équation (7) dans $W - \{(t,x) : tx = 0\}$.

Remarque 2. Comme on le verra dans la démonstration, on peut choisir comme deuxième membre dans (7) toute fonction $f(t,x) \in C^1$, pourvu que $\partial f/\partial x\,(0,0) \neq 0$.

Remarque 3. On peut modifier un peu la démonstration du th. 2, et construire une fonction $a(t,x)$ vérifiant encore (6) telle que l'opérateur $\partial^2/\partial t^2 - a(t,x)\ \partial^2/\partial x^2$ ne soit pas localement résoluble.

Remarque 4. Contrairement à ce qui se passe dans le problème spécial de résolubilité avec conditions périodiques en x (voir théorèmes 1 et 1') nous n'avons pas réussi à construire un exemple analogue à celui du théorème 2 dans le cas faiblement hyperbolique (un tel exemple consistant à remplacer l'hypothèse (6) par : $a(t,x)\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $a(t,x)\geq 0$).

§.2. <u>ESQUISSE DES DEMONSTRATIONS</u>.

Dans les démonstrations des théorèmes 1 et 2 on se ramènera à l'étude d'une famille d'équations différentielles ordinaires du type

$$w''(\tau) + \alpha_\varepsilon(\tau)\ w(\tau) = 0$$

où les α_ε sont des fonctions strictement positives et périodiques ; on aura besoin de solutions de ces équations qui aient une décroissance exponentielle pour $|\tau| \to +\infty$.

On utilisera dans ce but le lemme suivant :

Lemme 1. <u>Pour tout</u> $\varepsilon>0$ <u>il existe une fonction</u> $\alpha_\varepsilon(\tau)\in C^\infty(\mathbb{R})$ 1-<u>périodique vérifiant</u>

$$\alpha_\varepsilon(\tau) \equiv 1 \quad \underline{\text{dans un voisinage de}}\ 0$$
$$|\alpha_\varepsilon(\tau)-1| \leq M\varepsilon \ ; \ |\alpha'_\varepsilon(\tau)| \leq M\,\varepsilon \quad \forall\, \tau$$

<u>telle que le problème de Cauchy</u>

$$\text{(8)}\qquad \begin{aligned} & w'' + \alpha_\varepsilon(\tau)\ w = 0 \\ & w(0) = 1\ ,\ w'(0) = 0 \end{aligned}$$

<u>a comme solution une fonction</u> $w_\varepsilon(\tau)$ <u>donnée par (pour</u> τ <u>assez grand)</u>

(9) $$\mathcal{W}_{\varepsilon}(\tau) = \mathcal{W}_{0,\varepsilon}(\tau)\, e^{-\varepsilon|\tau|}$$

<u>où</u> $\mathcal{W}_{0,\varepsilon}(\tau)$ <u>est une fonction</u> 1-<u>périodique bornée uniformément par rapport à</u> ε, <u>de même que sa dérivée</u>.

Ce lemme est démontré dans [2] pour $\tau \in \mathbb{R}^+$; on en déduit le lemme ci-dessus par une symétrisation par rapport à $\tau=0$.

Esquisse de la démonstration du théorème 1.

Pour définir le coefficient $a(t)$ on utilisera la fonction α_ε du lemme 1 ; tout d'abord on considère une suite d'intervalles

$$I_K = [t_K - \ell_K, t_K + \ell_K] \quad , \quad K=1,2,\ldots$$

tels que

$$t_K - \ell_K = t_{K+1} + \ell_{K+1} \quad \text{et} \quad t_K \searrow 0$$

puis on définit

(10) $$a(t) = \begin{cases} \alpha_{\varepsilon_K}[h_K(t-t_K)] & \text{pour} \quad t \in I_K \\ 1 & \text{pour} \quad t \notin \bigcup\limits_K I_K \end{cases}$$

où les paramètres ℓ_K, ε_K et h_K seront choisis à la fin de la démonstration : ils vérifieront $\varepsilon_K \to 0$, $\Sigma\, \ell_K < +\infty$, $\varepsilon_K h_K \ell_K \to +\infty$; observons seulement que la fonction a sera strictement positive et indéfiniment différentiable sur $\mathbb{R}-\{0\}$, pourvu que l'on prenne soin que $h_K \ell_K$ soit un entier, et ε_K suffisamment petit. On aura de plus $a \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ pour tout $\alpha < 1$ si

(11) $$\varepsilon_K h_K^{\alpha} \leq C_\alpha \,, \quad \forall\, \alpha < 1.$$

On choisit maintenant comme deuxième membre de l'équation (4) une fonction $f(x)$ qui soit 2π-périodique et C^∞ ; par exemple

$$f(x) = \sum_{h=1}^{+\infty} c_h e^{ihx} \quad \text{où} \quad e_h = \exp[-(\log h)^2]. \tag{12}$$

On peut observer qu'une telle fonction n'est pas de Gevrey ; remarquons que l'on est obligé de faire un tel choix, car si f est de Gevrey on sait (voir [1]) que les solutions de l'équation (4) sont de Gevrey dès que l'on considère un problème de Cauchy pour (4) avec des données initiales qui sont de Gevrey. On pourra construire une équation comme (4) sans solutions distributions avec f de Gevrey, si l'on renonce à un peu de régularité pour le coefficient a, par exemple avec a fonction continue.

Soit maintenant $u(t,x)$ une solution de l'équation (4) appartenant à $C^0([-\delta,\delta],\mathcal{D}'_{2\pi})$ pour un certain $\delta>0$; observons qu'on a $u\in C^2([-\delta,\delta],\mathcal{D}'_{2\pi})$ et que u s'écrit sous la forme

$$u(t,x) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \varphi_h(t)\, e^{ihx}$$

où les coefficients φ_h vérifient

$$|\varphi_h(t)| + |\varphi'_h(t)| \leq C\, |h|^p \quad \text{pour} \quad |t| \leq \delta \tag{13}$$

(C et p sont des constantes positives dépendant de u).

Pour obtenir des estimations qui montrent qu'un tel u ne peut pas exister, on utilise les solutions v_K de

$$(14) \qquad \frac{\partial^2 v_K}{\partial t^2} - a(t) \frac{\partial^2 v_K}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans} \quad I_h \times \mathbb{R}_x$$

telles que

$$v_K(t_K,x) = e^{i h_k x} , \quad \frac{\partial v_K}{\partial t} (t_K,x) = 0 .$$

Grâce à la définition (10) on peut ramener ces problèmes au problème (8), et l'on obtient une expression explicite de v_K:

$$v_K(t,x) = \psi_K(t) e^{i h_k x}$$

où

$$(15) \qquad \psi_K(t) = \mathcal{W}_{\varepsilon_k} [h_K(t-t_K)]$$

et les fonctions $\mathcal{W}_{\varepsilon_k}$ sont données par (9).

En utilisant (4) et (14) et en intégrant pour $(t,x) \in I_K \times [0,2\pi]$, on obtient, par des intégrations par parties :

$$(16) \qquad (\psi_K \varphi'_{h_k} - \psi'_K \varphi_{h_k}) \Big|_{t=t_k-\ell_k}^{t=t_k+\ell_k} = c_{h_k} \int_{I_K} \psi_K(t)\, dt.$$

Or d'après (9), (15), (12) et (13) on peut voir que le premier membre de (16) se comporte comme $\exp(-\varepsilon_K h_K \ell_K) \cdot h_K^{p+1}$ alors que le second membre de (16) se comporte comme $\exp[-(\log h_K)^2] \cdot h_K^{-1}$.

Si on choisit ε_K, h_K, ℓ_K vérifiant (11) et tels que

$$(17) \qquad \frac{\varepsilon_K \, h_K \, \ell_K}{(\log h_k)^2} \longrightarrow +\infty \qquad (\text{pour } K \longrightarrow +\infty)$$

(ce qui est possible) on obtient une contradiction : il n'existe donc pas de solution u.

La démonstration du théorème 1' est analogue ; disons seulement qu'on n'utilise le lemme 1 que pour une valeur $\bar{\varepsilon}$ fixée, et que l'on définit le coefficient $a(t)$ de l'équation en posant

$$a(t) = \delta_K \, \alpha_{\bar{\varepsilon}} \left[\sqrt{\delta_K} \; h_K(t-t_K)\right] \quad \text{pour} \quad t \in I_K$$

où δ_K est une suite convenable qui tend vers zéro (naturellement on ajoutera un petit intervalle entre I_K et I_{K+1} pour raccorder le coefficient de façon C^∞.

Esquisse de la démonstration du théorème 2.

Nous utilisons les notations introduites dans la démonstration du théorème 1 ; en particulier I_K, $a(t)$, ψ_K seront les mêmes que ci-dessus. Soit de plus Q_K le carré contenu dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ défini par $Q_K = I_K \times I_K$, et soit (t_K, x_K) son centre.

Définissons le coefficient de l'équation (7) en posant

$$a(t,x) = \begin{cases} \dfrac{a(t)}{a(x)} & \text{pour} \quad (t,x) \in Q_K \\ 1 & \text{pour} \quad (t,x) \notin \bigcup\limits_k Q_K \end{cases}$$

(ce coefficient est dans $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $\alpha<1$) et choisissons un deuxième membre $f(t,x)$ tel que $\partial f/\partial x\,(0,0) \neq 0$.

On utilisera des solutions de l'équation duale de (7) ; plus précisément on pose

(19) $$\mathcal{W}_K(t,x) = \psi_K(t)\psi'_K(x)$$

et l'on observe que

(20) $$\frac{\partial^2 \mathcal{W}_K}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(t,x)\frac{\partial \mathcal{W}_K}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{dans} \quad Q_K$$

Démontrons maintenant qu'il n'existe pas de solution $u \in C^1$ de (7) dans un voisinage de (0,0). en effet, s'il existe une solution on obtient, à partir de (7) et (20) :

$$\iint_{Q_K} [p(u)\,\mathcal{W}_K - p(\mathcal{W}_K)u]dt\,dx = \iint_{Q_K} f(t,x)\,\mathcal{W}_K\,dt\,dx$$

d'où, par des intégrations par parties, en utilisant (19) :

(2.1)

$$\int_{I_k}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\mathcal{W}_n - u\frac{\partial \mathcal{W}_n}{\partial t}\right)dx\Big|_{t=t_n-\ell_k}^{t=t_n+\ell_k} + \int_{I_k} a(t,x)\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\mathcal{W}_K + u\frac{\partial \mathcal{W}_k}{\partial x}\right)dt\Big|_{x=x_n-\ell_k}^{x=x_n+\ell_k}$$

$$= \int_{I_k} f(t,x)\,\psi_K(t)\,\psi_n(x)\,dt\Big|_{x=x_n-\ell_k}^{x=x_n+\ell_k} - \int_{I_k}\psi_n(t)\left(\int_{I_k}\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\psi_K(x)\,dx\right)dt\,.$$

En choisissant les paramètres $\varepsilon_K, h_K, \ell_K$ comme dans la démonstration du théorème 1, on voit que dès que $\lim_{(t,x)\to(0,0)} \partial f/\partial x(t,x) \neq 0$, le premier membre de (2.1) tend vers zéro (pour $K \to +\infty$) plus rapidement que le deuxième, ce qui est absurde.

Le théorème 2 et son extension donnée en remarque 2 sont ainsi démontrés.

REFERENCES.

[1] **F. Colombini, E. De Giorgi** et **S. Spagnolo** : "*Sur les équations hyperboliques avec des coefficients qui ne dépendent que du temps*". Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 6 (1979), 511–559.

[2] **F. Colombini, E. Jannelli** et **S. Spagnolo** : "*Non uniqueness in hyperbolic Cauchy problems*". A paraître dans Ann. of Math.

[3] **F. Colombini** et **S. Spagnolo** : "*An example of weakly hyperbolic Cauchy problem not well-posed in C^{∞}*". Acta Math. 148 (1982), 243–253.

[4] **F. Colombini** et **S. Spagnolo** : En préparation.

[5] **L. Hörmander** : "*Linear partial differential operators*". Springer Verlag, Berlin 1964.

[6] et [7] **L. Nirenberg** et **F. Trèves** : "*On local solvability of linear partial differential equations – Part I, Necessary conditions*". Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970), 1–38, et "*Part II, Sufficient conditions*". Comm. Pure appl. Math. 23 (1970), 459–510.

Dipartimento di Matematica
Universita
Via Buonarruoti 2
56100 Pisa
ITALIA