Journées Équations aux dérivées partielles

Yves Laurent

Problème de Cauchy pour les hyperfonctions à croissance

Journées Équations aux dérivées partielles (1989), p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1989____A1_0>

PROBLEME DE CAUCHY POUR LES HYPERFONCTIONS A CROISSANCE

par Yves Laurent

0.- Introduction

Nous nous intéressons à la résolution du problème de Cauchy pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles à coefficients holomorphes et des données dans une chaîne d'espaces de type Gevrey.

En général, pour résoudre ce problème, on fait des hypothèses semblable à la condition de Lévi ([6] par exemple). Dans [3], j'avais donné un résultat sans cette condition (proposition 3.2.2.) mais le système d'équations vérifié par les données initiales dépendait de l'indice Gevrey. Nous allons voir que, dans le cas des systèmes différentiels holonomes, il n'en dépend pas.

Les résultats que nous annonçons ici seront démontrés dans un article en collaboration avec Z. Mebkhout [5].

1.- Problème de Cauchy pour les $\mathcal{D}$ -modules

Commençons par rappeler brièvement comment on pose le problème de Cauchy dans le cadre de la théorie des $\mathcal{D}$-modules (cf. [2] par ex.).

Soient X une variété analytique complexe et $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients holomorphes sur X.

Un système d'équations aux dérivées partielles est une matrice A à coefficients dans $\mathcal{D}_X$, c'est-à-dire un opérateur linéaire à gauche :

$$\mathcal{D}_X{}^N \xrightarrow{A} \mathcal{D}_X{}^M$$

Notons $\mathcal{M}$ le conoyau de cette application. Localement sur X, il existe une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_X^{N_{n+1}} \xrightarrow{A_n} \mathcal{D}_X^{N_n} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{D}_X^{N_1} \xrightarrow{A_1} \mathcal{D}_X^{N} \xrightarrow{A} \mathcal{D}_X^{M} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

où les A_i sont des matrices à coefficients dans $\mathcal{D}_X$.

Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{D}_X$-module à gauche - c'est-à-dire un faisceau de "fonctions" sur lequel opèrent les opérateurs différentiels, par exemple le faisceau $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes sur X - on obtient une suite (qui n'est pas exacte !) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^{M} \xrightarrow{A} \mathcal{F}^{N} \xrightarrow{A_1} \mathcal{F}^{N_1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{F}^{N_n} \xrightarrow{A_n} \mathcal{F}^{N_{n+1}} \longrightarrow 0$$

Les groupes de cohomologie de ce complexe sont, par définition, les solutions de $\mathcal{M}$. On vérifie en effet que ces groupes ne dépendent pas des matrices $A, A_1, \dots, A_n$ mais seulement de $\mathcal{M}$. On les note $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{F})$ pour $i=0,\dots,n$.

On constate que

$$\mathcal{E}xt^0_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{F}) = \{ u \in \mathcal{F}^M / Au = 0 \}$$

est bien l'espace des solutions du système A, tandis que

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{F}) = \{ u \in \mathcal{F}^N / A_1 u = 0 \} / \{ Av \,/\, v \in \mathcal{F}^M \}$$

représente le conoyau de A pour les éléments de $\mathcal{F}^N$ qui vérifient les conditions de compatiblité $A_1 u = 0$.

On dit qu'un $\mathcal{D}_X$-module à gauche est cohérent s'il est localement isomorphe au conoyau d'une application $\mathcal{D}_X^N \xrightarrow{A} \mathcal{D}_X^M$, on peut donc identifier les systèmes d'équations aux dérivées partielles aux $\mathcal{D}_X$-modules cohérents, les solutions étant les $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{F})$.

Le cas le plus simple est celui d'un opérateur différentiel P: on pose $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X P$, on a une suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{D}_X \xrightarrow{P} \mathcal{D}_X \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$ et les solutions de $\mathcal{M}$ sont les noyau et conoyau de $\mathcal{F} \xrightarrow{P} \mathcal{F}$.

La variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_X$-module est un sous-ensemble analytique du fibré cotangent T^*X . Si $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D}P$ et si $\sigma(P)$ désigne le symbole principal de P la variété caractéristique de $\mathcal{M}$ est :

$$\mathrm{Car}(\mathcal{M}) = \{ \alpha \in T^*X \ / \ \sigma(P)(\alpha) = 0 \}$$

Si $\mathcal{M} = \mathcal{D}/_{\mathcal{I}}$ où $\mathcal{I}$ est un idéal cohérent de $\mathcal{D}$ alors

$$\mathrm{Car}(\mathcal{M}) = \{ \alpha \in T^*X \ / \ \forall P \in \mathcal{I} \ , \ \sigma(P)(\alpha) = 0 \}$$

enfin si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent quelconque, il est de type fini donc peut s'écrire $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X u_1 + \ldots + \mathcal{D}_X u_N$ et dans ce cas

$$\mathrm{Car}(\mathcal{M}) = \bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{Car}(\mathcal{D}_X u_i)$$

Une hypersurface Z de X , de fibré conormal $T^*_Z X$, est non caractéristique pour $\mathcal{M}$ si $\mathrm{Car}(\mathcal{M}) \cap T^*_Z X = \{0\}$.

On définit alors le module induit par $\mathcal{M}$ sur Z, c'est le $\mathcal{D}_Z$-module $\mathcal{M}_Z = \mathcal{M}/_{\varphi\mathcal{M}}$ où φ est une équation de Z. Le théorème de Cauchy-Kovalevsky s'énonce sous la forme [2] :

$$\forall k \geq 0 \qquad \mathcal{E}xt^k_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_Z = \mathcal{E}xt^k_{\mathcal{D}_Z}(\mathcal{M}_Z, \mathcal{O}_Z)$$

Si P est un opérateur d'ordre m non caractéristique et si $\mathcal{M} = \mathcal{D}/_{\mathcal{D}P}$, le module $\mathcal{M}_Z$ est le $\mathcal{D}_Z$-module libre engendré par $1, \partial/_{\partial n}, \ldots, (\partial/_{\partial n})^{m-1}$ où $\partial/_{\partial n}$ est la dérivation normale à Z donc $\mathcal{E}xt^0_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Z^{\ m}$ et $\mathcal{E}xt^k_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $k \geq 0$, on retrouve bien le théorème de Cauchy-Kovalevsky usuel.

2. - <u>Variétés microcaractéristiques</u>. (d'après [4])

Soit Y une sous-variété lisse de X. Fixons des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_p, t_1, \ldots, t_q)$ de X pour lesquelles $Y = \{(x,t) \in X \ / \ t = 0\}$ et notons (x, t, ξ, τ) les coordonnées correspondantes de T^*X. Le fibré conormal à Y dans X est égal à $T^*_Y X = \{(x,t,\xi,\tau) \in T^*X \ / \ t = 0 \ , \ \xi = 0\}$, on le notera Λ et $T^*\Lambda$ sera muni des coordonnées (x, τ, x^*, τ^*).

Si P est un opérateur différentiel à coefficients holomorphes défini au voisinage de Y, on peut développer ses coefficients en série de Taylor en t et l'écrire sous la forme :

$$P(x,t,D_x,D_t) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_{\alpha\beta\gamma}(x)\ t^{\alpha}\ D_t^{\beta}\ D_x^{\gamma}$$

avec $D_t^{\alpha} = (\partial/\partial t_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial t_q)^{\alpha_q}$.

Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ on pose :

$$P_{ij}(x,\tau,x^*,\tau^*) = \sum_{\substack{|\alpha|+|\gamma|=i \\ |\beta|+|\gamma|=j}} a_{\alpha\beta\gamma}(x)\ (-\tau^*)^{\alpha}\ \tau^{\beta}\ (x^*)^{\gamma}$$

puis on définit successivement :

$$A(P) = \{ (i,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \ /\ P_{i,i+k} \not\equiv 0 \}$$

$$S(P) = \bigcup_{(i,k)\in A(P)} \{ (\lambda,\mu)\in\mathbb{Q}^2/\ \lambda+\mu\leq i+k\ ,\ \mu\leq k \}$$

$$N(P) = \text{enveloppe convexe de } S(P)$$

Pour tout $r\in\mathbb{Q}$, $r>1$, on note Δ_r la droite d'appui de $N(P)$ de pente $-1/r$ et on définit la fonction

$$s_{\Lambda}^{(r)}(P) = \sum_{(i,k)\in\Delta_r\cap A(P)} P_{i,i+k}$$

puis la fonction $\sigma_{\Lambda}^{(r)}(P)$ (resp. $\sigma_{\Lambda}^{\{r\}}(P)$) comme la fonction $P_{i,i+k}$ où (i,k) est le point de $\Delta_r\cap A(P)$ pour lequel i est maximum (resp. minimum).

Ces fonctions sont bien définies sur $T^*\Lambda$ indépendamment du choix des coordonnées locales. Comme le polygône de Newton $N(P)$ n'a qu'un nombre fini de pentes, il existe un ensemble fini $1<r_1<\dots<r_N$ tel que, si r n'est pas l'un des r_i, $\Delta_r\cap A(P)$ est réduit à un seul point et donc les trois fonctions $s_{\Lambda}^{(r)}(P)$, $\sigma_{\Lambda}^{(r)}(P)$ et $\sigma_{\Lambda}^{\{r\}}(P)$ sont égales. De plus, si $r \in]r_i,r_{i+1}[$ on aura :

$$\sigma_{\Lambda}^{\{r_i\}}(P) = \sigma_{\Lambda}^{(r)}(P) = s_{\Lambda}^{(r)}(P) = \sigma_{\Lambda}^{\{r\}}(P) = \sigma_{\Lambda}^{(r_{i+1})}(P)$$

En particulier, $\sigma_{\Lambda}^{(r)}(P)$ est indépendant de r pour $r>r_N$ et pour $r<r_1$, on pose :

$$\sigma_{\Lambda}^{(\infty)}(P) = \lim_{r\longrightarrow+\infty} \sigma_{\Lambda}^{(r)}(P)$$

$$\sigma_{\Lambda}^{\{1\}}(P) = \lim_{r\longrightarrow 1} \sigma_{\Lambda}^{(r)}(P)$$

Si $\mathcal{M}$ est le $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$ on définit ses variétés microcaractéristiques $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$, $Ch_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ et $Ch_\Lambda^{\{r\}}(\mathcal{M})$ comme l'ensemble des zéros dans $T^*\Lambda$ respectivement de $s_\Lambda^{(r)}(P), \sigma_\Lambda^{(r)}(P)$ et $\sigma_\Lambda^{\{r\}}(P)$. On étend cette définition aux $\mathcal{D}_X$-modules cohérents quelconques pour la variété caractéristique (cf. par. 1).

En fait on peut associer à $\mathcal{M}$ non seulement des variétés analytiques mais aussi des cycles analytiques, c'est-à-dire que l'on peut associer une multiplicité à chacune des composantes irréductibles des variétés $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$, $Ch_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ et $Ch_\Lambda^{\{r\}}(\mathcal{M})$. On note $\tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$, $\tilde{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\tilde{Ch}_\Lambda^{\{r\}}(\mathcal{M})$ les cycles analytiques correspondants.

On démontre [4] que pour un $\mathcal{D}_X$-module cohérent donné il n'y a qu'un nombre fini de r tels que les variétés $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$, $Ch_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ et $Ch_\Lambda^{\{r\}}(\mathcal{M})$ soient distinctes, on appelle ces nombres les indices critiques ou "pentes" de $\mathcal{M}$.

3. - Modules induits.

Comme dans le paragraphe 2, X est muni de coordonnées locales (x, t) et $Y = \{ (x,t) \in X \;/\; t = 0 \}$.

Définition 3.1.: *Soient* U *un ouvert de* Y *et* $r \geq 1$, $\mathcal{D}_{X|Y}\{r\}(U)$ *est l'ensemble des séries formelles*

$$P(x,t,D_x,D_t) = \sum a_{\alpha\beta\gamma}(x)\; t^\alpha\; D_t^\beta\; D_x^\gamma$$

telles que

1) $\exists\, M \in \mathbb{N},\ |\alpha|+|\gamma|+r(|\beta|-|\alpha|)>M \Longrightarrow a_{\alpha\beta\gamma}(x)\equiv 0$

2) $\forall\, K \subset\subset U,\ \exists\, C_0, C>0,\ \forall \alpha,\beta,\gamma,\ |\alpha|>|\beta|,\ \sup\limits_K |a_{\alpha\beta\gamma}| \leq C_0 C^{|\alpha|}\ \dfrac{[(|\alpha|-|\beta|)!]^{r-1}}{|\beta|!\,|\gamma|!}$

Pour r=1 on voit que $\mathcal{D}_{X|Y}\{r\}(U)$ n'est autre que l'ensemble des opérateurs différentiels de $\mathcal{D}_X$ définis au voisinage de U. Pour r>1, on obtient un faisceau sur Y en convenant que les changements de variables se font avec les mêmes formules que pour $\mathcal{D}_X$.

Pour $r=+\infty$ on supprime la condition 2) et on ajoute

1') $\forall k$, $\exists M(k)$, $|\beta|-|\alpha|=k$ et $|\beta|+|\gamma|>M(k) \Longrightarrow a_{\alpha\beta\gamma}(x)\equiv 0$

Exemple: L'opérateur d'Euler $1+t^2D_t$ est inversible dans $\mathcal{D}_{X|Y}\{r\}$ pour $r\geq 2$ et son inverse est l'opérateur $\sum_{n=0}^{\infty}(-t^2D_t)^n$.

Définition 3.2.: *Soit* Z *une hypersurface lisse de* X *d'équation* φ *, on pose pour tout* r, $1\leq r\leq +\infty$:

$$\mathcal{M}\{r\} = \mathcal{D}_{X|Y}\{r\}\otimes_{\mathcal{D}_X}\mathcal{M} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}_Z\{r\} = \mathcal{M}\{r\}/_{\varphi}\, \mathcal{M}\{r\}$$

Comme $\mathcal{D}_{X|Y}\{1\}$ est égal à $\mathcal{D}_X$, le module $\mathcal{M}_Z\{1\}$ est le module induit $\mathcal{M}_Z$ habituel.

Si Z est transverse à Y, $T^*_{Z\cap Y}Z \simeq (T^*_YX)\times_Y(Z\cap Y)$ est une hypersurface de $\Lambda = T^*_YX$ que l'on notera Λ'.

Définition 3.3.: *On dit que* Z *est non* r*-microcaractéristique pour* $\mathcal{M}$ *le long de* Y *si* :

$$Ch^{\{r\}}_{\Lambda}(\mathcal{M}) \cap T^*_{\Lambda'}\Lambda = \{0\}$$

Proposition 3.4. [3]: *Si* Z *est non* r*-microcaractéristique pour* $\mathcal{M}$ *le long de* Y, $\mathcal{M}_Z\{r\}$ *est un* $\mathcal{D}_{Z|Z\cap Y}\{r\}$*-module cohérent.*

Exemple: Si $Y = \{(x_1,\dots,x_p,t)\in X \,/\, t = 0\}$, $Z = \{x_1 = 0\}$ et $P = D_t+D^2_{x_1}$, Z est non $\{r\}$-microcaractéristique pour $\mathcal{M} = \mathcal{D}/_{\mathcal{D}P}$ le long de Y si $r<2$ et dans ce cas $\mathcal{M}_Z\{r\}$ est le module libre $\left(\mathcal{D}_{Z|Z\cap Y}\{r\}\right)^2$. Pour $r\geq 2$, Z n'est non r-microcaractéristique que microlocalement, c'est-à-dire pour $\tau\neq 0$ et D_t inversible, alors $\mathcal{M}\{r\} = 0$ et donc $\mathcal{M}_Z\{r\} = 0$.

4. - Problème de Cauchy pour les hyperfonctions holomorphes.

Soient Y une hypersurface lisse de X, $j: X\setminus Y \hookrightarrow X$ et $i: Y \hookrightarrow X$ les plongements canoniques. Le faisceau des hyperfonctions holomorphes sur X est le faisceau sur Y définit par

$$\mathcal{B}^{\infty}_{Y|X} = i^{-1}\left(j^{*}\mathcal{O}_{X\setminus Y}/\mathcal{O}_{X}\right)$$

des fonctions holomorphes à singularités essentielles sur Y modulo les fonctions sans singularités.

On définit également $\mathcal{B}_{Y|X}$ comme le sous faisceau de $\mathcal{B}^{\infty}_{Y|X}$ engendré par les fonctions à singularités polaires sur Y et, pour $r \in]1,+\infty[$, $\mathcal{B}_{Y|X}\{r\}$ est celui qui est engendré par les fonctions dont la croissance est au plus t^{-r+1} si t est la distance à Y.

Si on fixe un système de coordonnées locales telles que $Y = \{(x_1,\dots,x_p,t)\in X/\ t=0\}$, et si U est un ouvert de Y on a :

$$\mathcal{B}^{\infty}_{Y|X}(U) = \left\{\sum_{k\geq 0} a_k(x)\delta^{(k)}(t)/\ \forall K\subset\subset U,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists C_\varepsilon>0,\ \sup_{x\in K}|a_k(x)| \leq C_\varepsilon \varepsilon^k\ 1/_{k!}\right\}$$

et pour r>1 :

$$\mathcal{B}_{Y|X}\{r\}(U) = \left\{\sum_{k\geq 0} a_k(x)\delta^{(k)}(t)/\forall K\subset\subset U, \forall\varepsilon>0, \exists C_\varepsilon>0, \sup_{x\in K}|a_k(x)| \leq C_\varepsilon \varepsilon^k\ 1/_{(k!)^{r-1}}\right\}$$

tandis que $\mathcal{B}_{Y|X}$ est formé des sommes finies $\sum_{k=0}^{M} a_k(x)\delta^{(k)}(t)$.

Pour unifier les notations on pose $\mathcal{B}_{Y|X}\{1\} = \mathcal{B}^{\infty}_{Y|X}$ et $\mathcal{B}_{Y|X}\{\infty\} = \mathcal{B}_{Y|X}$.

On peut à présent énoncer le théorème de Cauchy de [3] :

Théorème 4.1.: *Soient* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{D}_X$*-module cohérent,* Y *et* Z *deux hypersurfaces lisses transverses de* X*. On suppose que* Z *est non* r*-microcaractéristique pour* $\mathcal{M}$ *le long de* Y*, alors*

$$\forall k\geq 0 \qquad \mathcal{E}xt^k_{\mathcal{D}_X}\left(\mathcal{M},\mathcal{B}_{Y|X}\{r\}\right) = \mathcal{E}xt^k_{\mathcal{D}_{Z|\cap Y}\{r\}}\left(\mathcal{M}_Z\{r\},\mathcal{B}_{Y\cap Z|Z}\{r\}\right)$$

5. - Etude des modules $\mathcal{M}_Z\{r\}$.

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux faisceaux d'anneaux cohérents, $\mathcal{D}$ étant contenu strictement dans $\mathcal{D}'$. Si $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}'$) est un $\mathcal{D}$- (resp. $\mathcal{D}'$-) module cohérent, dire qu'ils définissent le même système d'équations signifie qu'ils admettent des résolutions données par les mêmes matrices A_i, ce qui est équivalent à $\mathcal{D}'\otimes_{\mathcal{D}}\mathcal{M} = \mathcal{M}'$.

Dans ce cas, ils ont les mêmes solutions car si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{D}'$-module à gauche on a toujours

$$\forall k\geq 0 \quad \mathcal{E}xt^{k}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{F}) = \mathcal{E}xt^{k}_{\mathcal{D}'}(\mathcal{D}'\otimes_{\mathcal{D}}\mathcal{M},\mathcal{F})$$

Ceci s'applique en particulier à $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{Z|Z\cap Y}\{r\}$, $\mathcal{D}' = \mathcal{D}_{Z|Z\cap Y}\{r'\}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{Z\cap Y|Z}\{r'\}$ pour $r'>r$. Dans ce paragraphe on cherche à montrer que $\mathcal{M}_Z\{r\}$ ne dépend pas de r, c'est-à-dire en fait que sous certaines conditions

$$\mathcal{D}_{Z|Z\cap Y}\{r'\}\otimes_{\mathcal{D}_{Z|Z\cap Y}\{r\}}\mathcal{M}_Z\{r\} \simeq \mathcal{M}_Z\{r'\}$$

<u>Théorème 5.1.</u>: *Si r_0 n'est pas une pente de $\mathcal{M}$ et si Z est non r_0-microcaractéristique pour $\mathcal{M}$ le long de Y, alors $\mathcal{M}_Z\{r\}$ ne dépend pas de r pour r voisin de r_0 et r_0 n'est pas une pente de $\mathcal{M}_Z\{r_0\}$.*

De ce théorème et de la finitude du nombre de pentes on déduit qu'il n'y a qu'un nombre fini de modules $\mathcal{M}_Z\{r\}$ distincts (au sens précédent).

<u>Proposition 5.2.</u>: *si Z est non r'-microcaractéristique pour $\mathcal{M}$ le long de Y, le morphisme naturel $\mathcal{D}_{Z|Z\cap Y}\{r'\}\otimes_{\mathcal{D}_{Z|Z\cap Y}\{r\}}\mathcal{M}_Z\{r\} \longrightarrow \mathcal{M}_Z\{r'\}$ est surjectif.*

<u>Théorème 5.3.</u>: *Soient r_0 et r_1 tels que $r_1>r_0>1$. On suppose que Z est non r-microcaractéristique pour $\mathcal{M}$ le long de Y, que $\mathcal{M}_Z\{r\}$ ne dépend pas de r et que r n'est pas une pente de $\mathcal{M}_Z\{r\}$ pour $r \in [r_0,r_1[$. Alors $\mathcal{M}$ n'a pas de pentes dans l'intervalle $[r_0,r_1[$.*

Considérons une hypersurface Z qui est non r-microcaractéristique pour tout r. Alors d'après les résultats précédents, il existe un sous-ensemble fini W de $]1,+\infty[$ tel que le morphisme $\mathcal{D}_{Z|Z\cap Y}\{r'\}\otimes_{\mathcal{D}_{Z|Z\cap Y}\{r\}}\mathcal{M}_Z\{r\} \longrightarrow \mathcal{M}_Z\{r'\}$ soit un isomorphisme si $W\cap[r,r'[$ est vide. De plus l'ensemble (fini) des pentes de $\mathcal{M}$ est égal à la réunion de W et de l'ensemble des nombres r tels que "r est pente de $\mathcal{M}_Z\{r\}$".

Rappelons qu'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent est holonome si sa variété caractéristique est lagrangienne c'est-à-dire de dimension égale à la dimension de X.

Théorème 5.4.: *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome et Z une hypersurface de X non r-microcaractéristique pour $\mathcal{M}$ le long de Y pour tout r≥1. Alors $\mathcal{M}_Z\{r\}$ est indépendant de r c'est-à-dire que :*

$$\forall r\geq 1 \qquad \mathcal{M}_Z\{r\} = \mathcal{D}_{Z|Z\cap Y}\{r\}\otimes_{\mathcal{D}_X}\mathcal{M}_Z$$

Corollaire 5.5: *Sous les hypothèses du théorème 5.4. l'ensemble des pentes de $\mathcal{M}$ est égal à l'ensemble des pentes de $\mathcal{M}_Z$ et pour tout r≥1 on a :*

$$\forall k\geq 0 \qquad \mathcal{E}xt^k_{\mathcal{D}_X}\left(\mathcal{M},\mathcal{B}_{Y|X}\{r\}\right) = \mathcal{E}xt^k_{\mathcal{D}_Z}\left(\mathcal{M}_Z,\mathcal{B}_{Y\cap Z|Z}\{r\}\right)$$

Remarque 5.6.: Si $\mathcal{M}$ est holonome la variété $Ch^{\{r\}}_\Lambda(\mathcal{M})$ est lagrangienne pour tout r ([4] corollaire 4.1.2) et comme il n'y a qu'un nombre fini de ces variétés qui sont distinctes, la réunion pour r≥1 des variétés $Ch^{\{r\}}_\Lambda(\mathcal{M})$ est une sous-variété lagrangienne de $T^*\Lambda$. La condition du théorème 5.4. est donc vérifiée pour presque toutes les hypersurfaces Z (à $\mathcal{M}$ et Y fixés). Plus précisément, il existe un ensemble localement fini de points de Y tel que par tout autre point de Y passe une hypersurface Z qui vérifie la condition du théorème 5.4.

F. Castro et C. Sabbah avaient déjà montré [1] que les pentes de $\mathcal{M}$ sont celles de $\mathcal{M}_Z$ pour presque tout Z. Ici nous avons donc donné une condition explicite pour que cela soit vrai.

Pour terminer, nous allons donner la méthode de démonstration du théorème 5.4.

Soit r_1 une pente de $\mathcal{M}$ (en dehors des pentes il n'y a rien à montrer d'après le théorème 5.1.). Soit r_0 un rationnel strictement inférieur à r_1 et tel que $\mathcal{M}$ n'ait pas de pente dans l'intervalle $]r_0,r_1]$. Nous voulons montrer que le morphisme $\mathcal{D}_{Z|Z\cap Y}\{r_1\}\otimes_{\mathcal{D}_{Z|Z\cap Y}\{r_0\}}\mathcal{M}_Z\{r_0\} \longrightarrow \mathcal{M}_Z\{r_1\}$ est un isomorphisme. D'après la proposition 5.2. ce morphisme est surjectif, notons $\mathcal{N}$ son noyau.

Puisque $\mathcal{M}$ est holonome, $Ch_{\Lambda'}^{\{r_1\}}(\mathcal{M}_Z\{r_1\})$ est lagrangienne donc de dimension n=dimX dans la variété $T^*\Lambda$ de dimension 2n. Pour un module quelconque non nul cette variété est toujours involutive donc de dimension au moins n ([4] proposition 3.5.2).

Pour montrer que le noyau $\mathcal{N}$ de ce morphisme est nul il suffit de montrer que $\tilde{C}h_{\Lambda'}^{\{r_1\}}(\mathcal{M}_Z\{r_1\}) = \tilde{C}h_{\Lambda'}^{\{r_1\}}(\mathcal{M}_Z\{r_0\})$. Dans ce cas en effet la variété $Ch_{\Lambda'}^{\{r_1\}}(\mathcal{N})$ est de dimension strictement inférieure à celle de $\mathcal{M}_Z\{r_1\}$ donc $\mathcal{N}$ est nul.

Comme ci-dessus, on note $\Lambda = T^*_Y X$ et $\Lambda' = T^*_{Z\cap Y}Z$, Λ' est une sous-variété de Λ et on considère les applications :

$$T^*\Lambda' \xleftarrow{\rho} (T^*\Lambda)\times_\Lambda \Lambda' \xrightarrow{\tilde{\omega}} T^*\Lambda$$

D'après [3] on a sous l'hypothèse du théorème :

$$\tilde{C}h_{\Lambda'}^{\{r_1\}}(\mathcal{M}_Z\{r_1\}) = \rho\tilde{\omega}^{-1}\tilde{C}h_{\Lambda}^{\{r_1\}}(\mathcal{M})$$

et on montre de la même manière que

$$\tilde{\Sigma}_{\Lambda'}^{(r_1)}(\mathcal{M}_Z\{r_0\}) = \rho\tilde{\omega}^{-1}\tilde{\Sigma}_{\Lambda}^{(r_1)}(\mathcal{M})$$

Par ailleurs $\tilde{C}h_{\Lambda}^{\{r_1\}}(\mathcal{M})$ est, par définition, le cône tangent à $\tilde{\Sigma}_{\Lambda}^{(r_1)}(\mathcal{M})$ le long de la section nulle Λ de $T^*\Lambda$:

$$\tilde{C}h_{\Lambda}^{\{r_1\}}(\mathcal{M}) = C_\Lambda\left(\tilde{\Sigma}_{\Lambda}^{(r_1)}(\mathcal{M})\right)$$

Nous devons donc montrer :

$$C_{\Lambda'}\left(\rho\tilde{\omega}^{-1}\tilde{\Sigma}_{\Lambda}^{(r_1)}(\mathcal{M})\right) = \rho\tilde{\omega}^{-1}C_\Lambda\left(\tilde{\Sigma}_{\Lambda}^{(r_1)}(\mathcal{M})\right)$$

La commutation avec ρ est facile car ρ est transverse à $\Sigma_{\Lambda}^{(r_1)}(\mathcal{M})$. Pour ce qui est de la commutation avec $\tilde{\omega}$ il faut utiliser à la fois le fait que Z est non r_0-microcaractéristique et non r_1-microcaractéristique.

<u>Bibliographie</u>

[1] F. CASTRO ET C. SABBAH, *Sur les pentes d'un $\mathcal{D}$-module holonome le long d'une hypersurface*, à paraître.

[2] M. KASHIWARA, *Systems of microdifferential operators,* Progress in Math., vol 34, Birkhäuser (1983).

[3] Y. LAURENT, *Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe,* Progress in Math., vol 53, Birkhäuser (1985).

[4] Y. LAURENT, *Polygône de Newton et b-fonctions pour les modules microdifférentiels,* Ann. Scient. E.N.S., 4e série 20 (1987),p 391-441.

[5] Y. LAURENT et Z. MEBKHOUT, article en préparation.

[6] C. WAGSCHALL : *Sur le problème de Cauchy ramifié,* J. Math. pures et appl. 53 (1974),p 147-164.