Journées Équations aux dérivées partielles

Yann Brenier

Quelques lois de conservations issues de modèles cinétiques

Journées Équations aux dérivées partielles (1995), p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1995____A1_0>

QUELQUES LOIS DE CONSERVATIONS ISSUES DE MODELES CINETIQUES

*Yann Brenier**

Dans cet exposé on décrit un modèle simple de plasmas "quasineutres", dont on tire une série de lois de conservation qui apparaissent comme des variantes des équations d'Euler de la mécanique des fluides parfaits incompressibles. Certaines de leurs propriétés mathématiques sont explorées.

1. Equations des plasmas quasineutres

Voici un modèle simple de plasma [BL]. Un nuage électronique se déplace sur un fond d'ions supposés immobiles (ce qui est une approximation acceptable vu les rapports de masse entre électrons et ions) sous l'effet du champ électrique mesurant la différence de charge entre ions et électrons. On se limite ici au cas d'une répartition de charge uniforme en espace pour les ions. On note $t \geq 0$ le temps, $(x, v) \in R^{2d}$ les variables de position et vitesse qui définissent l'espace des phases, $f(t, x, v) \geq 0$ la densité électronique dans cet espace, $\Phi(t, x) \in R$ le potentiel électrique et $E(t, x) = -\nabla\Phi(t, x) \in R^d$ le champ électrique. Après normalisation des constantes physiques, on se ramène au système d'équations de Vlasov-Poisson

$$\partial_t f + v.\nabla_x f + E(t, x).\nabla_v f = 0, \tag{1}$$

$$E = -\nabla_x \Phi, \quad \int_{R^d} f(dv) = 1 - \epsilon \Delta_x \Phi \tag{2}$$

où la constante 1 correspond à la charge des ions, uniforme en espace, $-\int f(t, x, dv)$ est la charge électronique en (t, x) et $\epsilon > 0$ est la constante de

*Université Paris 6 and ENS, DMI, 45 rue d'ULM, 75230 Paris Cedex, France.

couplage entre l'équation de Vlasov (1) et l'équation de Poisson (2). Notons que le cas $\epsilon < 0$ correspondrait à un modèle gravitationnel au comportement très différent. Pour compléter ce système d'équations, on impose une condition initiale à f

$$f(0,x,v) = f_0(x,v) \geq 0, \tag{3}$$

telle que l'énergie totale du système

$$\int_{R^{2d}} \frac{1}{2}|v|^2 f(t,dx,dv) + \int_{R^d} \frac{\epsilon}{2}|E(t,x)|^2 dx, \tag{4}$$

qui est (formellement) conservée au cours du temps, soit finie à l'instant initial. A partir des équations de Vlasov-Poisson, on obtient aisément (en plus de la conservation de l'énergie totale) les équations de moments suivantes (en multipliant respectivement par 1 et par v l'équation de Vlasov, en intégrant en $v \in R^d$ et en utilisant l'équation de Poisson)

$$\nabla_x.(\int vf(dv)) = \epsilon \partial_t \Delta \Phi, \tag{5}$$

$$\partial_t(\int vf(dv)) + \nabla_x.(\int v \otimes vf(dv)) + \nabla_x \Phi \tag{6}$$

$$= \epsilon \nabla_x.(\nabla_x \Phi \otimes \nabla_x \Phi) - \frac{\epsilon}{2} \nabla_x(|\nabla_x \Phi|^2).$$

En prenant la divergence de cette dernière équation et en utilisant de nouveau l'équation de Poisson, on trouve pour le champ Φ

$$-(\epsilon \partial_{tt} + 1)\Delta_x \Phi - \nabla_x^2 : \int v \otimes vf(dv) = \tag{7}$$

$$= -\epsilon \nabla_x^2 : (\nabla_x \Phi \otimes \nabla_x \Phi) + \frac{\epsilon}{2} \Delta_x(|\nabla_x \Phi|^2).$$

Le régime quasineutre correspond à la situation où $\epsilon > 0$ est un petit paramètre relativement à la taille des données. Il est alors naturel i) d'étudier les équations limites obtenues formellement quand $\epsilon \to 0$, ii) de justifier le passage à la limite quand cela est possible. Comme on va le voir ce problème est très largement ouvert.

2. Les équations limites

Lorsque l'on pose brutalement $\epsilon = 0$, l'équation de Poisson (2) est remplacée par

$$E = -\nabla_x \Phi, \quad \int f(dv) = 1 \tag{8}$$

et on conserve l'équation de Vlasov (1) telle quelle. Les équations de moment (5) et (6) se simplifient notablement en

$$\nabla_x \cdot \left(\int v f(dv)\right) = 0 \tag{9}$$

$$\partial_t\left(\int v f(dv)\right) + \nabla_x \cdot \left(\int v \otimes v f(dv)\right) + \nabla_x \Phi = 0 \tag{10}$$

et on trouve pour le potentiel une nouvelle équation de couplage

$$-\Delta_x \Phi = \nabla_x^2 : \int v \otimes v f(dv). \tag{11}$$

On a aussi (formellement) conservation de l'énergie (qui se résume ici à l'énergie cinétique)

$$K = \frac{1}{2} \int |v|^2 f(t, dx, dv). \tag{12}$$

Comme on va le voir, le système d'équations (1),(8) peut être considéré comme une généralisation "cinétique" des fameuses équations d'Euler (1755, [MP],[Ge]) des fluides parfaits incompressibles. C'est pourquoi nous parlerons dorénavant d'équations d'Euler "cinétiques". Nous allons à présent dériver une famille d'équations aux dérivées partielles correspondant à des solutions particulières de ce système. Les calculs qui suivent sont formels.

2.1. Densités monocinétiques et équations d'Euler

Dans la terminologie des plasmas, on appelle densité monocinétique une densité f de la forme

$$f(t, x, v) = \rho(t, x)\delta(v - u(t, x)), \tag{13}$$

où $\rho(t, x) \geq 0$ et $u(t, x) \in R^d$ s'interprètent respectivement comme la densité et la vitesse "macroscopiques" au point (t, x). Par substitution directe dans les équations, on observe qu'une telle densité est solution du système (1), (8), si et seulement les équations (9), (10) sont satisfaites, c'est-à-dire

$$\rho = 1, \quad \nabla_x . u = 0 \tag{14}$$

$$\partial_t u + \nabla_x . (u \otimes u) + \nabla_x \Phi = 0, \tag{15}$$

où l'on retrouve bien les équations d'Euler, u et Φ s'interprétant dorénavant comme respectivement la vitesse et la pression d'un fluide parfait incompressible. La densité ρ est constante, ce qui, dans la terminologie de la mécanique des fluides, signifie que le fluide est “homogène”. Notons que la pression vérifie

$$-\Delta_x \Phi = \nabla_x^2 : \int u \otimes u. \tag{16}$$

Evidemment, le modèle ainsi obtenu n'admet de solutions non triviales que lorsque la dimension d est au moins égale à 2.

2.2. Densités polycinétiques

Une densité polycinétique a la forme

$$f(t,x,v) = \sum_{\alpha=1}^{N} \rho_\alpha(t,x) \delta(v - u_\alpha(t,x)), \tag{17}$$

où $\rho_\alpha(t,x) \geq 0$ et $u_\alpha(t,x) \in R^d$ peuvent être vus comme la densité et la vitesse “macroscopiques” au point (t,x) de N “fluides” (ou “phases”) s'écoulant ensemble sans se mélanger. Là encore, on voit que les équations d'Euler cinétiques sont satisfaites par une telle densité si et seulement si

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \rho_\alpha = 1, \tag{18}$$

$$\partial_t \rho_\alpha + \nabla_x . (\rho_\alpha u_\alpha) = 0, \tag{19}$$

$$\partial_t (\rho_\alpha u_\alpha) + \nabla_x . (\rho_\alpha u_\alpha \otimes u_\alpha) + \rho_\alpha \nabla_x \Phi = 0. \tag{20}$$

Le champ Φ s'interprête comme le champ de pression commun aux différents fluides et est solution de

$$-\Delta_x \Phi = \nabla_x^2 : \sum_{\alpha=1}^{N} \rho_\alpha u_\alpha \otimes u_\alpha. \tag{21}$$

Le système d'équations ainsi obtenu (18), (19),(20) est connu comme modèle rudimentaire en théorie des écoulements multiphasiques [CP]. Notons que l'équation (20) n'est pas écrite sous forme "divergentielle" puisqu'y figure le produit $\rho_\alpha \nabla_x \Phi$. On peut l'écrire différemment lorsque l'on suppose que les champs de vitesse u_α dérivent de potentiels ϕ_α

$$u_\alpha(t,x) = \nabla_x \phi_\alpha(t,x). \tag{22}$$

Cette hypothèse est cohérente car on tire de (20), en dimension trois pour fixer les idées, que le rotationnel du champ de vitesse

$$\omega_\alpha = \nabla_x \times u_\alpha \tag{23}$$

obéit à l'équation de conservation

$$\partial_t \omega_\alpha + \nabla_x (u_\alpha \otimes \omega_\alpha, -\omega_\alpha \otimes u_\alpha) = 0, \tag{24}$$

ce qui assure (formellement !) que le rotationnel reste nul s'il l'est à l'instant initial. Si donc les champs u_α sont potentiels, on peut intégrer une fois (20), après élimination de ρ_α à l'aide de (19), et obtenir pour les potentiels ϕ_α l'équation (dite de Bernoulli en mécanique des fluides)

$$\partial_t \phi_\alpha + \frac{1}{2} |\nabla_x \phi_\alpha|^2 + \Phi = 0, \tag{25}$$

où les constantes d'intégration sont absorbées par la redéfinition de chaque ϕ_α par addition d'une fonction du temps.

Remarque

On peut particulariser encore la structure des densités polycinétiques en imposant, si $d = 3$ (c'est vain pour $d < 3$) une condition cinématique de "non interpénétration" (ou encore de "feuilletage") entre les phases fluides, à la manière de Duchon et Robert [DR].

2.3. Densités étagées et waterbags

Un autre type de solutions des équations d'Euler cinétiques (1),(11) est fourni, dans le cas $d = 1$, par des densités $f(t, x, v)$ étagées (i.e. prenant leurs valeurs dans un ensemble fini : on parle de waterbags en physique des plasmas [BL]), dont les ensembles de niveau sont délimités par les graphes de $N + 1$ fonctions $v = u_\alpha(t, x)$, $\alpha = 0, ..., N$, rangées dans l'ordre croissant

$$u_0 < u_1 < ... < u_N,$$

de sorte que

$$f(t,x,v) = \sum_{\alpha=1}^{N} H(u_\alpha(t,x) - v)H(v - u_{\alpha-1}(t,x))c_\alpha, \tag{26}$$

où H désigne la fonction d'Heaviside et les c_α sont les valeurs constantes prises par f. Cette structure est compatible avec les équations (1),(11) et conduit aux équations

$$\partial_t u_\alpha + \partial_x(\frac{1}{2}u_\alpha^2 + \Phi) = 0, \tag{27}$$

avec la contrainte algébrique

$$\sum_{\alpha=1}^{N}(u_\alpha(t,x) - u_{\alpha-1}(t,x))c_\alpha = 1. \tag{28}$$

L'équation (11) devient très simple, puisque $d = 1$, et donne explicitement, à une fonction affine en x près,

$$\Phi = -\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{3}(u_\alpha(t,x) - u_{\alpha-1}(t,x)))^3 c_\alpha. \tag{29}$$

On obtient ainsi pour les u_α un système de lois de conservation non linéaires du premier ordre.

3. Caractère bien posé des modèles limites

3.1. Le cas monocinétique

Le modèle limite monocinétique n'est autre, comme on l'a vu, que le système d'Euler des fluides parfaits incompressibles. On sait depuis Yudovic (voir les

références dans [Ge]) que les équations d'Euler sont bien posés en dimension 2 dès que le rotationnel du champ de vitesse initiale appartient à L^∞. le problème de valeurs initiales a alors une unique solution, globale en temps, continue par rapport à la donnée initiale. L'existence globale de solutions faibles n'est cependant pas démontrée pour des données initiales générales d'énergie finie, c'est-à-dire des champs de vitesse à divergence nulle de carré intégrable. (L'hypothèse la plus faible actuellement connue, suivant le travail de Delort [Ge], est que le rotationnel du champ de vitesse initial est la somme d'une mesure de signe fixe et d'une fonction intégrable). En dimension 3, seule l'existence locale en temps et l'unicité de solutions régulières est connue, et ce depuis fort longtemps [Ge].
Un très intéressant problème ouvert est la convergence des solutions f^ϵ du système de Vlasov-Poisson vers celle du système d'Euler lorsque l'on prend comme donnée initiale une densité monocinétique

$$f_0^\epsilon(x,v) = \delta(v - u_0(x)),$$

où u_0 est un champ assez régulier à divergence nulle et d'énergie finie.

3.2. Le cas polycinétique

Les équations sont a priori mal posées. Si l'on prend l'exemple le plus simple de deux phases en dimension un d'espace ($N = 2$, $d = 1$), on trouve facilement que $\rho = \rho_1$ et $u = u_1$ vérifient le système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$\partial_t \rho + \partial_x q = 0, \tag{30}$$

où $q = \rho u$ est la quantité de mouvement et

$$\partial_t q + \partial_x(\frac{q^2}{\rho}) + \rho \partial_x \Phi = 0, \tag{31}$$

avec

$$\Phi = -q^2(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-\rho}).$$

Ce système est elliptique (en espace-temps) pour $0 < \rho < 1$ et n'est donc pas bien posé. Cependant on notera que l'énergie totale, qui est une fonctionnelle strictement convexe des inconnues ($\rho \in]0,1[, q \in R$)

$$K = \frac{1}{2}\int q^2(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-\rho})dx$$

est (formellement) conservée au cours du temps. (Ce qui impliquerait l'hyperbolicité du système (30),(31) s'il était écrit sous forme divergentielle !) Cette propriété typiquement non linéaire n'a pas d'équivalent pour un système linéaire mal posé tel que les équations de Cauchy-Riemann, mais n'est pas exceptionnelle dans la modélisation des écoulements multiphasiques [Sa].

L'étude du modèle polycinétique avec champs de vitesse potentiels (18),(19),(22), (25) est menée dans [Br]. Les principaux résultats qui y sont obtenus concernent des solutions sur un intervalle de temps $]0,T[$ et sur un domaine D borné et régulier de R^d avec conditions aux limites de glissement : chaque u_α est supposé parallèle à ∂D. On peut aussi considérer le cas du "cube avec conditions aux limites périodiques", c'est-à-dire $D = R^d/Z^d$. On note $Q =]0,T[\times D$. On suppose *a priori* que ces solutions vérifient l'hypothèse de non-dégénerescence

$$\inf_{x,t,\alpha} \rho_\alpha(t,x) > 0. \qquad (32)$$

On appelera "non-dégénérée" (ou encore "vraiment N-phasique") une telle solution de (18),(19), (25). On recherche chaque potentiel de vitesse ϕ_α dans l'espace de Sobolev $L^2(]0,T[,H^1(D))$, ce qui permet, grâce à (19) et (32), de définir la composante normale de $u_\alpha = \nabla_x \phi_\alpha$ sur l'éventuel bord ∂D ainsi que la valeur en tout instant de $\rho_\alpha(t,.)$ comme fonction continue du temps à valeurs dans les distributions sur D.

On montre d'abord un résultat de régularité

Théorème 3..1 *Soit (ρ_α, u_α) une solution vraiment N-phasique, et $r = \inf \rho_\alpha > 0$. Alors l'énergie*

$$K = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\int_D \rho_\alpha |u_\alpha|^2 dx$$

est invariante au cours du temps, KT^2 est bornée par une constante géométrique ne dépendant que de D et pour chaque ouvert U d'adhérence compacte dans

Q, il existe une constante $C(U) < +\infty$, indépendante de r, telle que

$$\int_U [|\nabla_x \Phi| + \sum_\alpha \rho_\alpha (|\partial_t u_\alpha|^2 + |\nabla_x v_\alpha|^2)] \leq (1+K)C(U). \tag{33}$$

Notons que l'estimation (33) ne dépend pas de la borne inférieure r. Notons ensuite que la borne sur KT^2 entraine qu'il ne peut y avoir de solution vraiment N-phasique globale en temps hors de la solution triviale $u_\alpha = 0$! La disparition (partielle et locale) d'une phase en temps fini est donc inévitable si l'on cherche à prolonger une solution indéfiniment.
On a ensuite un résultat de stabilité

Théorème 3..2 *Pour tout $T, R > 0$ et $r \in]0, 1/N[$ fixés, l'ensemble des solutions $(\rho_\alpha, q_\alpha = \rho_\alpha u_\alpha)$ sur Q telles que*

$$\inf_{t,x,\alpha} \rho_\alpha(t,x) \geq r$$

et

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \int \rho_\alpha |u_\alpha|^2 dx dt \leq R$$

est une partie compacte de $(L^\infty \times L^2)(Q)$ pour la topologie faible-.*

Autrement dit, toute suite de solutions d'énergie uniformément bornée et uniformément non dégénérées a une sous-suite qui converge faiblement vers une autre solution non dégénérée. Bien sur, ce résultat est d'un intérêt limité, puisqu'on ne dispose pas d'un théorème d'existence locale de solutions régulières (en dehors, bien sur, du cadre analytique, voir [Gr]).

Solutions variationnelles

L'hypothèse de non dégénerescence peut être substantiellement affaiblie à condition de définir une solution de (18),(19), (25) de la manière suivante. On dit que (ρ_α, u_α) est solution "variationnelle" si $0 \leq \rho_\alpha \leq 1$ presque partout,

$$u_\alpha \in L^2(Q, \rho_\alpha dt dx), \tag{34}$$

les relations (18) et (19) ont lieu (respectivement presque partout et au au sens des distributions sur Q) et, pour chaque $\eta > 0$, il existe des potentiels Φ_η et $\phi_{\alpha\eta}$, de classe C^1 sur l'adhérence de Q, tels que

$$\int_Q \rho_\alpha |u_\alpha - \nabla \phi_{\alpha\eta}|^2 dxdt \leq \eta, \tag{35}$$

$$\int_Q \rho_\alpha |\partial_t \phi_{\alpha\eta} + \frac{|\nabla \phi_{\alpha\eta}|^2}{2} + \Phi_\eta|^2 dxdt \leq \eta, \tag{36}$$

$$\partial_t \phi_{\alpha\eta} + \frac{|\nabla \phi_{\alpha\eta}|^2}{2} + \Phi_\eta \leq 0. \tag{37}$$

Il est facile de voir que les notions de solutions variationnelles et non dégénérées coincident dès que la borne (32) est satisfaite [Br]. Les résultats de stabilité, de conservation de l'énergie et de borne sur le temps d'existence s'étendent des solutions non dégénérées aux solutions variationnelles. En revanche, établir l'équivalent de l'estimation (33) pour les solutions variationnelles reste un problème ouvert.
Le nom de solutions variationnelles s'explique comme suit. On dit d'abord que (ρ_α, u_α) est solution "admissible" si (34), (18) et (19) ont lieu. On a alors le principe variationnel suivant.

Théorème 3..3 *Une solution admissible (ρ_α, u_α) sur $Q =]0, T[\times D$ est variationnelle si et seulement si elle réalise le minimimum de*

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} \int_Q \rho_\alpha |u_\alpha|^2 dxdt$$

parmi toutes les solutions admissibles $(\rho'_\alpha, u'_\alpha)$ telles que

$$\rho'_\alpha(t,.) = \rho_\alpha(t,.)$$

pour $t = 0$ et $t = T$.

Ce principe variationnel n'est bien sur pas étranger au principe "de moindre action" de la mécanique des fluides classiques [Se], mais on observera que les solutions sont ici toujours des minima globaux de l'énergie (alors qu'une solution classique des équations d'Euler ne correspond à un minimum global d'énergie que pour des intervalles de temps assez petits [Br2]). C'est cette propriété remarquable qui explique la borne sur KT^2 indiquée plus haut et que de telles solutions ne peuvent être globales en temps sans être triviales. La résolution, même locale, du problème de Cauchy dans ce cadre est un problème ouvert. En revanche, on montre sans grande difficulté [Br] que le "problème aux deux bouts" où on impose $\rho_\alpha(t,.)$ aux instants $t = 0$ et $t = T$ a toujours une solution variationnelle, sans aucune hypothèse de régularité sur les données, sous la seule condition que les conditions de compatibilité (dues à (19))

$$\int_D \rho_\alpha(0,x)dx = \int_D \rho_\alpha(T,x)dx$$

soient satisfaites pour $\alpha = 1,...,N$. Pour cela, on minimise l'énergie et on utilise des résultats de dualité tout à fait classiques. Un intéressant problème ouvert est de savoir si l'on peut minorer les ρ_α lorsque les données sont elles même minorées par une constante strictement positive.

3.3. Le cas des densités étagées

Contrairement aux densités polycinétiques les densités étagées peuvent conduire à des problèmes bien posés. Si l'on normalise la donnée initiale de sorte que

$$\int v f_0(x,dv) = 0,$$

on peut montrer [Gr2], que le système de lois de conservation (19),(20), (18) est hyperbolique pour peu que la donnée initiale ait la structure suivante. Il y a un entier $1 \leq M \leq N$, une constante $r > 0$, tels que tel que

$$u_0 < u_{M-1} \leq -r < 0 < r \leq u_M < ... < u_N$$

et

$$0 < c_1 < ... < c_{M-1} < c_M > c_{M+1} > ... > c_N.$$

Ainsi, à x fixé, la densité initiale $f_0(x,v)$ est croissante pour les $v < 0$ et décroissante pour les $v > 0$. Le système limite est alors bien posé (en temps petit) et décrit bien la limite $\epsilon \to 0$ du système de Vlasov- Poisson. Grenier montre en effet dans [Gr2] que le système de Vlasov-Poisson (1),(2) a pour une telle donnée initiale f_0 (ou éventuellement pour une perturbation de cette donnée) une solution f^ϵ de la forme

$$f^\epsilon(t,x,v) = \sum_{\alpha=1}^{N} H(u_\alpha^\epsilon(t,x) - v)H(v - u_{\alpha-1}^\epsilon(t,x))c_\alpha,$$

cela pour une plage de temps $]0, T[$ uniforme en ϵ (dépendant de la régularité des données) et que u_α^ϵ converge fortement vers la solution u_α du système limite. L'analyse de Grenier repose sur des estimations d'énergie similaires à celle de la théorie des faibles nombres de Mach, en mécanique des fluides faiblement compressibles [KM], à ceci près que la symétrisation du système de Vlasov-Poisson est effectuée de façon microlocale, ce qui nécessite une analyse délicate. Une fois établies les estimations d'énergie, il reste à "filtrer" en temps les oscillations temporelles générées à fréquence $\epsilon^{-1/2}$ par l'équation du potentiel électrique (7) où figure l'oscillateur $(\epsilon\partial_{tt} + 1)$.

References

[BL] C.K.Birdsall, A.B.Langdon, *Plasma Physics via computer simulation, Mc Graw-Hill, New York, 1985.*

[Br] Y.Brenier, *A homogenized model for vortex sheets, rapport LMENS 95-10, Ecole Normale Supérieure, 1995.*

[Br2] Y.Brenier, *On the motion of an ideal incompressible fluid, Conference on PDEs of elliptic type, Cortona, 1992.*

[CP] R.Caflisch, G.Papanicolaou, *SIAM J. Appl. Math. 43 (1983) 985-906.*

[DR] R.Duchon, R,Robert, *Relaxation of Euler equations, Quart. Appl. Math.50 (1992) 235-255.*

[Ge] P.Gérard, *Séminaire Bourbaki, 1992*

[Gr] E.Grenier, *Oscillations in quasineutral plasmas, à paraitre dans in Comm. PDEs*

[Gr2] E.Grenier, *Pseudodifferential estimates of singular perturbations, prépublication, 1995*

[KM] S.Klainerman, A.Majda.

[MP] C.Marchioro, M.Pulvirenti, *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids, Springer, New York, 1994.*

[Se] D.Serre, *Sur le principe variationnel des équations de la mécanique des fluides parfaits,* Math. Modelling and Num. Analysis, *27 (1993) 739-758.*

[Sa] L.Sainsaulieu, *habilitation, Ecole Polytechnique, 1995.*