Journal de la société statistique de Paris

G. Cauderlier

Note sur le calcul de la mortabilité

Journal de la société statistique de Paris, tome 44 (1903), p. 219-224
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1903__44__219_0>

IV.

NOTE SUR LE CALCUL DE LA MORTABILITÉ.

(*Suite et fin* [1].)

A partir de 9 ans, B devient de plus en plus petit et la valeur de $\frac{x_0}{x_0 + y_0}$ devient de plus en plus égale à $\frac{1}{2}$.

Nous pouvons donc, sans faire une trop grande erreur, simplifier encore notre formule générale, tout au moins à partir de 9 ans, et écrire :

$$M_1 = \frac{D_1}{P_0 + \frac{1}{2}(P_1 - P_0 + D_1)}.$$

Remarquons toutefois que cette formule n'est exacte que lorsque la mortabilité ne varie pas entre le début et la fin de l'âge considéré. Mais si nous supposons maintenant en outre que la population reste stationnaire, c'est-à-dire que $P_1 = P_0$, cette formule se simplifie encore et devient :

$$M_1 = \frac{D_1}{P_0 + \frac{1}{2} D_1}.$$

(1) Voir numéro de mai, p. 177.

Ce qui nous ramène à la formule de Bertillon. Cette formule est donc exacte pour une population stationnaire et pour une mortabilité constante pendant toute l'année. Ces deux conditions ne se rencontrent que très rarement et il vaudra mieux s'en tenir à la formule :

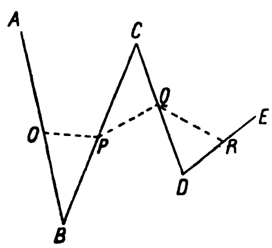
$$M_1 = \frac{D_1}{P_0 + \frac{1}{2}(P_1 - P_0 + D_1)} = \frac{2D_1}{P_0 + P_1 + D_1}$$

qui, du reste, n'est pas beaucoup plus compliquée.

Les statisticiens allemands emploient, au contraire, une formule qui ne donne pas la mortabilité de l'année, mais la mortabilité moyenne de deux années consécutives, car ils suivent le nombre N_0 de personnes arrivant à l'âge de 20 ans en 1890, à travers les deux années 1890 et 1891, jusqu'à ce qu'elles aient toutes 21 ans, et leur formule s'établit alors en réalité comme suit :

$$M_0 = \frac{x_0 + y_1}{N_0}.$$

Il est clair qu'ils n'obtiennent ni la mortabilité de 1890 ni celle de 1891, mais une moyenne entre les deux, et s'ils voulaient employer cette formule pour étudier les variations de la mortabilité d'année en année, ils commettraient de très grandes erreurs, pouvant aller jusqu'à 10 et 15 p. 100.



En somme, si la mortabilité annuelle réelle est représentée pour plusieurs années par la ligne sinueuse ABCDE l'emploi de la formule allemande donnerait la ligne OPQR qui est tout autre chose et ne donne qu'une faible idée de la réalité.

***

Il nous reste à examiner l'influence de l'émigration ou de l'immigration.

Soit I l'immigration totale pendant un an.

Divisons l'année en un nombre n d'intervalles de temps t aussi petits qu'on voudra. L'immigration pendant chaque intervalle sera $\frac{I}{n}$ en supposant qu'elle soit également répartie pendant toute l'année.

Cette immigration $\frac{I}{n}$ sera, du reste, composée d'un nombre n de sous-groupes âgés respectivement de 20 ans, $20 + t$, $20 + 2t$, etc., etc., jusque $20 + (n - 1)t$.

Et chacun de ces sous-groupes comportera $\frac{I}{n^2}$ individus.

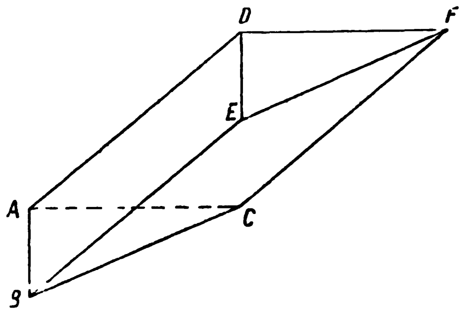
Si nous appelons M la mortalité annuelle, la mortalité pendant l'intervalle de temps t sera $\frac{M}{n}$.

Considérons, maintenant, chacun des groupes $\frac{I}{n}$.

Ce groupe est composé de sous-groupes $\frac{I}{n^2}$ à différents âges. Le premier sous-groupe âgé de 20 ans perdra par la mort des individus pendant tout le temps tn et le déchet total sera $\frac{I}{n^2}\frac{M}{n}n$.

Ce déchet peut être représenté par une ligne droite AB.

Le second sous-groupe, âgé de 20 ans $+ t$, perdra des individus pendant le temps $t(n-1)$ et le déchet total sera $\frac{I}{n^2}\frac{M}{n}(n-1)$ et pourra être représenté par une seconde ligne droite accolée à la première, et un peu plus petite que la première.



Le déchet subi par tous les sous-groupes peut être ainsi successivement représenté par des droites que nous accolons toujours aux précédentes, de manière à former la surface ABC qui représente le total des déchets par la mort du premier groupe $\frac{I}{n}$.

Et cette surface totale sera égale à :

$$\frac{I}{n^2}\frac{M}{n}n \times \frac{n}{2} = \frac{IM}{2n}.$$

De même, les déchets successifs de tous les autres groupes $\frac{I}{n}$ seront représentés par des triangles égaux au premier, qui viendront s'appliquer en retrait sur le premier, de manière à ce que l'ensemble constitue un parallélipipède à base triangulaire ABCDEF.

Remarquons maintenant que si nous faisons passer un plan par les points DCE, il partagera le volume ci-dessus en deux parties correspondantes aux deux années consécutives 1890-1891, pendant lesquelles les immigrants de tout âge de 1890 restent dans le champ d'observation.

Le volume total ABCDEF sera :

$$\frac{IM}{2n} \times n = \frac{IM}{2},$$

valeur qui représente la perte totale subie par les immigrants de 1890, pendant les deux années 1890-1891, entre les âges de 20 à 21 ans.

Le volume DEFC sera une pyramide dont la base est DEF, son volume sera :

$$\frac{IM}{2n} \times \frac{n}{3} = \frac{IM}{6},$$

valeur qui représente la perte totale subie par les immigrants de 1890 pendant l'année 1891 entre les âges de 20 à 21 ans, et par conséquent :

$$\frac{IM}{2} - \frac{IM}{6} = \frac{IM}{3}$$

représente la perte totale subie par les immigrants de 1890 pendant l'année 1890, entre les âges de 20 à 21 ans.

Reprenons, maintenant, la formule générale pour les enfants de 0 à 1 an :

$$M_1 = \frac{D_1}{N_0 + \frac{x_0}{x_0 + y_0}(N_1 - N_0)}.$$

Le nombre total de décès constatés sera D_1 dus aux naissances, plus $\frac{I_0 M_1}{6} + \frac{I_1 M_1}{3}$, pour les décès des immigrants de l'année 1890 et de l'année 1891 ; on aura par conséquent pour la valeur D des décès constatés :

$$D = D_1 + \frac{I_0 M_1}{6} + \frac{I_1 M_1}{3}$$

ce qui nous donne :

$$M_1 = \frac{D - \frac{I_0 M_1}{6} - \frac{I_1 M_1}{3}}{\frac{y_0}{x_0 + y_0} N_0 + \frac{x_0}{x_0 + y_0} N_1}$$

ce qui donne :

$$M_1 \left(\frac{y_0}{x_0 + y_0} N_0 + \frac{x_0}{x_0 + y_0} N_1\right) = D - \left(\frac{I_0}{6} + \frac{I_1}{3}\right) M_1$$

$$M_1 = \frac{D}{\frac{y_0}{x_0 + y_0} N_0 + \frac{x_0}{x_0 + y_0} N_1 + \frac{I_0}{6} + \frac{I_1}{3}}.$$

Et, si nous pouvons admettre $I = I_0 = I_1$, on aura :

$$M_1 = \frac{D}{\frac{y_0}{x_0 + y_0} N_0 + \frac{x_0}{x_0 + y_0} N_1 + \frac{I}{2}}.$$

Remarquons ici que l'influence de l'immigration ou de l'émigration est très marquée, puisque, dans certains cas, I pourra être égal au tiers ou à la moitié des naissances.

Nous pouvons appliquer la même transformation à la formule qui donne M_1 en fonction de P_0 et P_1.

Reprenons la formule :

$$M = \frac{D_1}{P_0 + \frac{x_0}{x_0 + y_0}(P_1 - P_0 + D_1)}.$$

Nous avons pour les décès constatés :

$$D = D_1 + \frac{I_0 M_1}{6} + \frac{I_1 M_1}{3};$$

pour la population constatée au 31 décembre 1890

$$P = P_0 + \frac{I_0}{2} - \frac{I_0 M}{6}$$

et au 31 décembre 1891

$$P' = P_1 + \frac{I_1}{2} - \frac{I_1 M_1}{6}.$$

Mais nous pouvons, sans inconvénient, faire :

$$I = I_0 = I_1 \qquad \text{et} \quad I_0M = I_0M_1 = I_1M_1$$

ce qui nous donnera alors, en remplaçant dans la formule générale D_1, P_0, P_1 par leurs valeurs tirées des égalités précédentes :

$$M = \frac{D - \frac{IM}{2}}{P - \frac{I}{2} + \frac{IM}{6} + \frac{x_0}{x_0 + y_0}\left(P' - \frac{I}{2} + \frac{IM}{6} - P + \frac{I}{2} - \frac{IM}{6} + D - \frac{IM}{2}\right)},$$

$$M = \frac{D - \frac{IM}{2}}{P - \frac{I}{2} + \frac{IM}{6} + \frac{x_0}{x_0 + y_0}\left(P' - P + D - \frac{IM}{2}\right)},$$

$$M\left(P - \frac{I}{2} + \frac{IM}{6} + \frac{x_0}{x_0 + y_0}\left[P' - P + D - \frac{IM}{2}\right]\right) = D - \frac{IM}{2},$$

$$M = \frac{D}{P + \frac{IM}{6} + \frac{x_0}{x_0 + y_0}\left(P' - P + D - \frac{IM}{2}\right)},$$

$$M = \frac{D}{P + \frac{x_0}{x_0 + y_0}\left(P' - P + D\right) + \frac{IM}{6}\left(1 - 3\frac{x_0}{x_0 + y_0}\right)}.$$

Le dernier terme $\frac{IM}{6}\left(1 - 3\frac{x_0}{x_0 + y_0}\right)$ peut être négligé, car $\frac{x_0}{x_0 + y_0}$ est égal ou presque égal à $\frac{1}{2}$, donc le terme vaut pratiquement :

$$\frac{IM}{6}\left(1 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{IM}{12},$$

valeur qui sera toujours extrêmement petite à côté de P.

On peut donc écrire :

$$M = \frac{D}{P + \frac{x_0}{x_0 + y_0}\left(P' - P + D\right)}.$$

On voit que l'influence de l'immigration ou de l'émigration est beaucoup plus petite que dans la formule applicable aux enfants de 0 à 1 an, puisque le terme I est toujours assez petit pour pouvoir être négligé. Cela provient de ce que, dans la première formule, le terme N est tout à fait indépendant de l'immigration dont il ne tient aucun compte, tandis que dans la seconde formule les relevés de la population PP′ comprennent déjà tout ce qui reste des immigrants de l'année, et par conséquent ces termes tiennent déjà compte de l'influence des immigrants. Il sera donc toujours plus sûr, quand on ne connaît pas le nombre des immigrants, de calculer la mortalité à l'aide des formules établies en fonction de P. L'erreur sera presque nulle.

*
* *

Nous pouvons donc nous résumer en disant :

La formule générale s'établit comme suit :

$$M = \frac{D}{P + \frac{x_0}{x_0 + y_0}\left(P' - P + D\right)}.$$

Dans cette formule la valeur de $\frac{x_0}{x_0 + y_0}$ sera, comme nous l'avons vu, de :

0,65	de 0 à 1 an.
0,55	de 1 a 2 —
0,55	de 2 a 3 —
0,534	de 3 a 4 —
0,534	de 4 à 5 —
0,528	de 5 à 6 —
0,524	de 6 a 7 —
0,524	de 7 a 8 —
0,513	de 8 a 9 —
0,5	au delà de 9 ans.

Mais à partir de 80 ans cette valeur s'éloignera de nouveau de 1/2.

Si la population reste stationnaire, alors $P' = P$.

En même temps, dans la formule :

$$\frac{x_0}{x_0 + y_0} = \frac{3 + A + B + \frac{AB}{2}}{6 + 3A + 3B + \frac{3AB}{2}}$$

A devient égal à 0, de sorte que notre formule devient :

$$M = \frac{D}{P + \frac{3 + B}{6 + 3B} D}.$$

Enfin, dans le cas où nous admettons que la mortabilité reste uniforme pendant tout le cours de l'âge étudié, B devient égal à 0 et la formule devient :

$$M = \frac{D}{P + \frac{1}{2} D},$$

ce qui nous ramène à la formule de Bertillon père.

Cette formule est donc exacte dans le cas où la population reste stationnaire et lorsque, en même temps, la mortabilité reste constante pendant le cours de l'âge étudié. Ces deux cas ne se présentent que très rarement, mais on peut admettre que la mortabilité varie très peu à partir des âges de 10 ans jusqu'à 90 ans; c'est-à-dire que dans ces limites $\frac{x_0}{x_0 + y_0} = \frac{1}{2}$. Dans ce cas :

$$M = \frac{D}{P + \frac{1}{2}(P' - P + D)} = \frac{2D}{P + P' + D}.$$

C'est la formule que nous recommandons

G. Cauderlier.