

A. BARRIOL

## **Théorie mathématique de la population**

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 61 (1920), p. 16-22

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_1920\\_\\_61\\_\\_16\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1920__61__16_0)

© Société de statistique de Paris, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## IV

# THÉORIE MATHÉMATIQUE DE LA POPULATION

(Annexe au Recensement de l'Australie)

PAR G.-H. KNIBBS, C. M. G., F. S. S., F. R. A. S.

Le travail considérable publié par notre excellent collègue M. KNIBBS est une monographie servant d'appendice au Rapport sur le recensement de l'Australie de 1910.

L'étude des nombreux documents qu'il a pu recueillir lui a donné l'idée de réunir les éléments d'une théorie mathématique de la population et de faire l'analyse des différents aspects des phénomènes vitaux.

On peut distinguer dans le travail de M. Knibbs deux parties principales : une partie purement technique et une partie concernant les applications pratiques.

\* \* \*

M. Knibbs a divisé son étude en 18 chapitres, dont chacun d'eux forme un tout qui aurait pu être publié à part.

### PREMIÈRE PARTIE (*Théorie*).

I. — Dans l'introduction, M. Knibbs rappelle les prédictions de Watson relatives à l'accroissement de la population des États-Unis, et montre par cet exemple l'importance, au point de vue économique, de l'étude du problème de la variation de population.

Il ne suffit pas évidemment d'examiner ce qu'a été le passé, mais il faut essayer de déduire de cet examen ce que sera l'avenir, et c'est pour cette raison qu'il convient d'employer toutes les ressources scientifiques dont on peut disposer, et en particulier les procédés d'analyse mathématique qui paraissent parfaitement convenir à des extrapolations dont on peut mesurer les erreurs.

La nature du mouvement de la population est très complexe; en se bor-

nant à une courte énumération, on distingue les causes de variation suivantes : taux de natalité, taux de mortalité, migrations, épidémies, modifications des mœurs, changement des conditions économiques provenant des effets naturels, etc...

L'étude des populations est donc excessivement ardue, car on doit s'attacher à rendre clairement les caractéristiques des fluctuations diverses, à définir leurs causes et leurs effets, à déterminer les moyennes, les taux, etc., à faire les interprétations des valeurs trouvées, à extrapoler, dans les limites convenables, les résultats trouvés et, enfin, à mettre en relief les caractères variables de la population.

II. — L'étude mathématique des divers types de mouvement de population peut se faire en supposant soit un taux de variation constant, soit un taux variable selon une fonction du temps; le second chapitre de l'ouvrage de M. Knibbs est consacré à cette étude, qui est complétée par l'indication des divers facteurs ayant une influence séculaire sur le taux d'accroissement de la population. M. Knibbs est ainsi conduit à donner quelques indications sur les variations probables du taux pendant de longues périodes exprimées par des séries contenant des termes exprimés en fonction trigonométrique du temps; M. Knibbs passe également en revue les modifications qui peuvent être apportées par l'homme dans les territoires nouveaux, les effets importants des migrations, et il arrive à calculer une courbe exponentielle exprimant la variation du taux d'accroissement considéré comme fonction du temps.

Il en fait une application en considérant pour le passé l'accroissement intrinsèque de différentes populations pendant la période 1790-1910 et la variation effective des taux d'accroissement (sauf pour l'Irlande) de ces mêmes populations.

Il est intéressant de rappeler les diverses évaluations que l'on a faites de la population du monde.

Vers le milieu du xvii<sup>e</sup> siècle, les évaluations varient de 500 millions (Struyck) à 1 milliard 600 millions (Voltaire), — il voyait grand — alors qu'à la même époque Sussmlich arrivait à 1 milliard 100 millions.

Vers 1800 (Malte-Brun) comptait 640 millions contre 437 indiqués par Volney; puis les chiffres varient peu : de 600 à 800 millions jusqu'en 1840, bien que Berghon estime la population mondiale à 1 milliard 272 millions en 1843; mais, à partir de 1860, les recensements se font plus exacts, les nombres paraissent plus corrects et croissent assez régulièrement pour atteindre 1 milliard 610 millions dans l'Annuaire statistique de la France et 1 milliard 649 millions, en 1914, d'après les travaux de Knibbs.

En appliquant à la population actuelle le taux de variation qu'il a calculé pour une période récente, M. Knibbs fait remarquer que le nombre actuel des humains pourrait descendre d'un seul couple à partir de l'année 132 de notre ère; si l'on appliquait le taux moyen d'accroissement de 1804-1914, il faudrait monter au temps de Darius (483 av. J.-C.); enfin, si le taux d'accroissement du doublement de la population en 60 ans environ se maintenait, on arriverait dans 10.000 ans au nombre colossal de  $22.184 \times 10^{46}$  habitants.

Avec le taux d'accroissement de la France qui est particulièrement faible (0,0016), il aurait fallu 12.842 années pour qu'un couple pût produire le nombre actuel d'humains.

En définitive, il résulte de cette étude que le taux de variation a subi de grandes oscillations dans le passé; mais s'il paraît impossible de donner une indication précise sur le caractère de sa variation dans l'avenir, il semble bien que le taux actuel ne pourra être maintenu pendant une longue période. La guerre vient, hélas ! de confirmer les prévisions de M. Knibbs faites en 1914.

III. — Ce chapitre est consacré au calcul des constantes permettant de déterminer une courbe de variation des taux dans diverses hypothèses; les courbes examinées sont soit des exponentielles, soit diverses courbes se rapprochant de cette forme générale; de nombreux graphiques illustrent les calculs et permettent de faire un choix approprié aux résultats obtenus dans le passé afin de pouvoir extrapoler.

IV. — L'étude de fonctions :  $g = Pe - (\frac{x}{k})^n$  ou de fonctions dissymétriques analogues à une courbe de probabilité fait l'objet de ce chapitre, qui développe les résultats déjà obtenus par Palin Elderton dans son beau travail : *Frequency Curves and Correlation*.

V. — Une étude très complète des formules correspondant à des fonctions de différences successives est à signaler, car elle peut rendre de grands services dans de nombreux problèmes; elle est développée dans le chapitre V.

VI. — Le sixième chapitre est consacré à la sommation et à l'intégration qui conduisent à des surfaces et à des volumes correspondant à deux ou trois variables. Il se termine par un rappel des intégrales des fonctions  $\Gamma$ .

VII. — L'importance des graphiques et de l'ajustement est indiquée dans le chapitre VII, qui étudie quatre classes principales de phénomènes statistiques : la fréquence des phénomènes à différentes époques (variation de la population, des décès, etc.); les taux de fréquence (taux de natalité, etc.); la fréquence rapportée à divers caractères (nombre de personnes par âge); le taux de fréquence correspondant à ces caractères (taux de mortalité par âge).

L'ajustement peut être fait graphiquement ou numériquement soit à l'aide de différences successives des nombres, des logarithmes; mais l'auteur fait remarquer l'importance du nombre (poids) des observations.

VIII. — Les caractères divers d'une population peuvent être étudiés sous différents aspects :

Les phénomènes vitaux proprement dits : naissances, décès, maladies.

Les phénomènes anthropométriques : croissance, etc...

Les phénomènes anthropologiques : évolution générale de l'homme;

Les phénomènes sociologiques : densité, action de l'évolution économique;

Les phénomènes divers : migration, colonisation, etc...

Chaque classe est étudiée avec détail, et M. Knibbs énumère soigneusement les différents points de vue qui peuvent donner lieu à des classifications statistiques utiles à connaître.

M. Knibbs termine cet intéressant exposé par un rappel de notions actuarielles concernant l'espérance de vie (expectation of life) et la représentation par une formule du type Gompertz Makeham du nombre des vivants à l'âge  $x$  pour une population normale; cette formule est intéressante à citer :

$$y = K \alpha^{ax} \beta b^x = 52.674 (0,99961)^{1,40808x} \times (0,18998)^{1,01495x}.$$

## DEUXIÈME PARTIE (*Pratique*)

IX. — Ce chapitre est consacré à l'étude pratique d'un Censur : quelque soin que l'on apporte à son établissement, il faut compter sur les erreurs. M. Knibbs signale l'attirance de l'âge finissant par zéro, et une moins grande tendance pour la déclaration des âges finissant par 5, 6, 8, que pour la déclaration d'âges se terminant par 1, 3, 7, 9.

Il compare les répartitions par groupe d'âges des hommes et des femmes, d'après divers recensements, et il conclut de l'étude des courbes figuratives qu'il n'est pas possible de faire des prévisions sur la distribution des vivants par groupe d'âges dans le futur.

X. — Le rapport du nombre des représentants du sexe masculin et du sexe féminin est, on le sait, différent suivant les pays : inférieur à un en Norvège (0,932), presque égal à un aux États-Unis (1,044), supérieur à un à Ceylan (1,14); ce rapport varie d'ailleurs suivant l'âge, suivant la position géographique des populations étudiées et suivant le temps.

Une étude spéciale de la population de la Nouvelle-Galles du Sud, depuis 1829, montre qu'à l'origine, par suite de l'immigration, la population masculine l'emportait de beaucoup, mais la correction annuelle provenant des naissances l'a réduite peu à peu. A la naissance, le rapport de masculinité des enfants naturels paraît plus grand que celui des enfants légitimes.

L'auteur passe en revue les différentes théories de la masculinité qui ont été étudiées très en détail dans le bel ouvrage de René Worms, et il termine par un tableau relatif à la France qui montre que l'excès des naissances masculines se maintient à peu près le même avant et après la guerre de 1870; il sera intéressant de constater, dans quelques années, l'effet de l'effroyable guerre de 1914-1918.

XI. — La natalité s'étudie généralement par les taux de natalité; l'auteur montre que ces taux ne sont pas nécessairement comparables, même pour les populations réparties de la même manière par âge; un grand nombre de phénomènes affectent en effet la natalité; la répartition des femmes par âge, la fécondité relative à chaque âge, le nombre relatif de femmes mariées et célibataires.

L'auteur examine, au point de vue mathématique, l'allure générale du nombre des naissances, celle de la mortalité infantile dans divers pays, et il

indique des considérations intéressantes sur la représentation à l'aide de surfaces de natalité; des tableaux très complets résument la variation des taux en divers pays, de 1860 à 1914; notre pays tient, malheureusement, la dernière place avec 19 ‰, alors que la moyenne est de 25 et que certains pays (Hongrie) atteignent 36.

Une étude fort intéressante du malthusianisme est à signaler.

Les fluctuations saisonnières sont chiffrées pour l'Australie et ont conduit M. Knibbs à étudier l'influence, au point de vue de la natalité, de la position de certaines fêtes dans le calendrier.

XII. — Le taux de nuptialité est défini par le rapport entre le nombre de mariés et de célibataires; il faut évidemment l'étudier par âge; sa considération est naturellement importante en ce qui concerne les femmes et est en relation directe avec la fécondité; le taux de nuptialité part, naturellement, de zéro, puis croît et décroît ensuite; l'époque du maximum est très variable suivant les pays et oscille entre 35 et 45 ans.

Quant à sa valeur intrinsèque, elle est également très différente et dans le voisinage du maximum varie de 1,67 à 4,50.

Une table de nuptialité relative à l'Australie donne pour chaque âge les proportions de célibataires, de mariés et de divorcés. Le maximum de mariés apparaît à l'âge de 48 ans pour les hommes (73 %) et de 41 ans pour les femmes (76 %).

Il est curieux de constater que la proportion des veufs est très inférieure à celle des veuves et que le rapport est voisin de 1/2.

Un grand tableau donne les âges respectifs des époux pour 302.000 mariages. On peut noter une différence de 5,1 ans; la représentation de ces données peut être faite à l'aide d'une surface dont M. Knibbs étudie complètement les diverses particularités.

La moyenne de différence d'âge des conjoints donne lieu à une étude très intéressante, et M. Knibbs a pu calculer une formule donnant pour la population étudiée la différence moyenne d'âge par groupe; la voici pour les femmes, à titre de curiosité :

$$D_h = - 6.275 + 0,058 \times (\text{âge de la femme}).$$

Cette formule s'applique de 30 à 67 ans.

XIII. — La fertilité et la fécondité peuvent être étudiées soit au regard de la femme seule en considérant son âge, soit au regard du couple et des différences d'âge; il est peut-être bon de rappeler la différence entre ces deux termes qui sont souvent confondus; le premier est relatif à la qualité et le second à la quantité.

Le problème étudié est donc extrêmement complexe, et on est amené ainsi à considérer :

- a) Le rapport du nombre des naissances à la population;
- b) Le rapport du nombre des naissances à celui des femmes;
- c) Le rapport du nombre des naissances à celui des femmes en âge de reproduction;

d) Le rapport du nombre des naissances par rapport à l'effectif dans chaque groupe d'âge des femmes;

e) Le rapport du nombre des naissances légitimes par groupe d'âge de femmes mariées;

f) Le rapport du nombre des naissances illégitimes par groupe d'âge de femmes célibataires.

D'autre part, il y a lieu d'étudier l'âge des femmes aux premières naissances et d'après la durée du mariage; on conçoit que cette étude amène à la considération de surfaces extrêmement intéressantes.

XIV. — Les naissances multiples sont étudiées dans ce chapitre ainsi que la répartition par sexe des jumeaux; en fait, les différences constatées par exercice sont excessivement faibles et il y a une quasi-constance; les calculs relatifs aux taux de naissance de jumeaux par âge montrent qu'il y a un maximum vers 12 à 13 ans de mariage, et vers l'âge de 32 ans pour la femme. Les tables ainsi dressées sont très intéressantes et pourront éventuellement servir pour des calculs sociaux qui paraissent devoir être faits dans l'avenir, tels que les secours de famille d'après le nombre des enfants: il manquerait encore, cependant, la distribution des enfants par âge et par famille.

Ces tables donnent lieu à une représentation par des surfaces en prenant comme coordonnées le nombre des enfants, l'âge des femmes et la durée du mariage.

XV. — La mortalité peut être considérée à deux points de vue: d'une manière générale, d'après l'âge et sans distinguer les causes de décès; d'une manière particulière, en tenant compte de ces causes.

M. Knibbs rappelle les différentes formules actuarielles connues permettant de calculer les taux de mortalité et il compare, dans un premier tableau, les variations de ce taux par sexes pour quatre périodes concernant l'Australie; il est évident qu'on ne peut pas tirer de ce tableau des conclusions générales en raison de la composition spéciale de la population australienne, et l'extrapolation que fait notre collègue en étendant les courbes de taux de mortalité par groupes d'âge d'après les divers recensements qu'il étend jusqu'en 1940 nous paraît un peu osée.

Une table intéressante est relative au taux de mortalité en tenant compte des conditions conjugales; les observations australiennes concordent bien avec celles que l'on a faites en Europe: pour les hommes, sauf dans les âges extrêmes ( $< 19$  et  $> 80$ ) la mortalité des célibataires est supérieure à celle des mariés; pour les femmes, la mortalité des femmes mariées est supérieure à celle des célibataires jusqu'à 44 ans et inférieure ensuite; cette différence devrait faire l'objet d'études plus approfondies, mais les statistiques utiles manquent encore.

XVI. — L'effet des migrations est très complexe, car elles influencent l'âge; le sexe et la constitution de la race; ces divers facteurs peuvent être étudiés dans un pays tel que l'Australie et donnent lieu à des remarques fort intéressantes; des tables montrent par exemple la proportion par âge des individus nés hors de l'Australie, la corrélation entre l'âge et la durée de la résidence, etc...

XVII. — Dans ce dernier chapitre, M. Knibbs récapitule divers résultats qu'il a pu obtenir et qui ne trouvent pas place dans les chapitres précédents; il donne des considérations très justes sur la mesure de la précision des résultats statistiques et montre par des courbes les relations indirectes qui peuvent exister entre les divers phénomènes concernant la population; il termine par une table des diverses intégrales et de formules diverses qui lui ont servi dans le cours de son travail.

XVIII. — M. Knibbs conclut en signalant l'intérêt que les peuples auraient à établir des statistiques comparables; c'est le but que se proposait l'Institut International de Statistique, dont la vitalité semble aujourd'hui bien compromise.

M. Knibbs rappelle que la consommation du blé est d'environ 5,7 bushels par acre correspondant pour 33 milliards d'acres de terre labourable à une production de 132 milliards de bushels à consommer par le milliard et demi d'êtres actuellement vivants; si l'accroissement de la population se maintenait au taux de 1 %, il faudrait moins de 700 ans (681 ans) pour que la production supposée au plein (22,8 bushels par acre) soit inférieure à la consommation; en admettant que la consommation par individu reste constante, la loi de Malthus jouerait en plein; mais il est bien probable que des modifications importantes, et que nous ne pouvons actuellement concevoir, seront alors intervenues; quoi qu'il en soit, le problème de la population est un de ceux qui doivent retenir l'attention.

La conclusion de M. Knibbs serait à citer tout entière; il dit que l'homme est à la fois le jouet du destin et la victime de ses propres désirs; il doit donc se rendre compte des formidables problèmes non encore effleurés qui vont se présenter dans un avenir prochain, touchant la puissance reproductive de la race humaine, la constitution organique de la nature et les moyens dont dispose l'humanité pour combattre l'influence de ses actions défavorables, l'accroissement de la productivité de la nature et les limites de son exploitation, le mécanisme intime de l'organisation sociale et le plan de son contrôle, enfin l'internationalisation et la solidarité de tous les êtres humains.

Il faudra que les organismes directeurs forment une opinion générale intelligente comprenant la nécessité des enquêtes statistiques relatives à la population et à la richesse. Les recensements sont coûteux (moins qu'une guerre), mais ils sont la base de toutes les études statistiques concernant l'humanité; leur valeur serait immense s'ils pouvaient être établis avec précision.

En résumé, le travail de M. Knibbs est une œuvre magistrale qui fera époque et sera souvent consultée dans l'avenir; l'abondance des matières, la technique sûre de l'auteur font de ce livre un véritable traité rassemblant les éléments dispersés avec des études absolument inédites et personnelles. L'auteur a fait soigner particulièrement la présentation générale, — tous les travaux qui nous viennent de l'office dirigé par M. Knibbs sont d'ailleurs admirablement édités — et il a fait une œuvre réellement utile qui lui fera le plus grand honneur; nous tenons à l'en féliciter de tout cœur.

A. BARRIOL.