

STANISLAS SCHNEIDER

## Sur l'ajustement des courbes à branches limitées

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 89 (1948), p. 218-227

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_1948\\_\\_89\\_\\_218\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1948__89__218_0)

© Société de statistique de Paris, 1948, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## V

### VARIÉTÉ

---

#### **Sur l'ajustement des courbes à branches limitées.**

On sait que l'ajustement d'une courbe de Gauss ou de toute autre courbe à branches illimitées, ne donne jamais entière satisfaction au voisinage des extrémités de la distribution expérimentale. En effet, la courbe de Gauss s'étendant à l'infini, implique une probabilité petite mais non nulle en dehors de ces extrémités, ce qui est manifestement contraire à la réalité. Le statisticien se trouve alors dans l'obligation d'abandonner la courbe ajustée dès qu'il s'intéresse au minimum ou au maximum d'une qualité dispersée. Cet abandon peut s'opérer de trois façons différentes :

1° Faisant abstraction de toute idée d'ajustement et de distribution continue préalable, on multiplie les essais pour atteindre coûte que coûte l'extrémum cherché. Méthode peu économique et dont le résultat (certitude ou plutôt probabilité d'avoir atteint cet extrémum) est souvent médiocre.

2° On considère la courbe ajustée comme valable jusqu'aux extrémités, mais on la tronque arbitrairement en décrétant que l'extrémum est atteint à 2, 3 ou 4 écarts moyens quadratiques à partir de la moyenne. Selon le problème étudié, l'expérience ou le flair du statisticien, cette méthode peut donner les

meilleurs résultats comme les pires. Elle introduit implicitement la notion de « certitude pratique », caractérisée par le déchet théorique que l'on convient de considérer comme négligeable; ce déchet étant estimé sur la courbe ajustée de façon que le déchet réel, lui, soit rigoureusement nul. Dans le cas d'ajustement de la courbe de Gauss, par exemple, si l'on suppose que :

$$x_{max} = x_m + 2,5 \sigma$$

cela revient à admettre qu'une probabilité totale de 0,994 équivaut à une « certitude pratique », ou qu'un déchet de 0,6% est « pratiquement nul ». Cette convention exprime alors le fait que, dans un grand nombre de séries d'expériences du même type, on n'a jamais constaté de mesure dépassant  $x_m + 2,5 \sigma$ , donc, que les distributions réelles semblent être limitées à cette valeur.

L'application correcte de ce procédé exige non seulement une parfaite connaissance des distributions caractérisant le genre d'expérience en question, mais encore la quasi-identité de l'expérience étudiée avec toutes celles qui ont servi à choisir le degré de certitude adopté.

3° On peut enfin remplacer l'ajustement d'une courbe de Gauss par celui d'une courbe à branches limitées, et admettre pour l'extrémum de la distribution — le point d'arrêt correspondant de la courbe.

Cette méthode paraît la plus correcte, mais pour donner des résultats escomptés, elle exige un ajustement aussi parfait que possible. Ceci nécessite la coïncidence du plus grand nombre de moments de la courbe avec ceux de la distribution expérimentale. Or, jusqu'à présent, on manquait de renseignements sur les moments des courbes à branches limitées qui pouvaient être utilisées à cet effet. L'objet de cette note est de combler partiellement cette lacune en indiquant les expressions des moments d'ordre deux et quatre pour les « courbes de répartition » de M. Baticle, ainsi que pour une nouvelle famille de courbes que l'on peut en déduire par un passage à la limite.

\* \* \*

Au cours de ses travaux sur le problème de la « répartition », M. Edgar Baticle (1) a été amené à déterminer la probabilité que la somme de  $n$  variables aléatoires  $x_1, x_2, \dots, x_n$  soit comprise entre  $z$  et  $z + dz$ . En admettant que chaque variable peut varier entre  $(-a)$  et  $(+a)$ , avec une probabilité constante à l'intérieur de cet intervalle, la probabilité cherchée a pour valeur :

$$(1) \quad p(z) \cdot dz = \frac{dz}{(2a)^n \cdot (n-1)!} \sum_{i=0}^k (-1)^i C_n^i [z + (n-2i)a]^{n-1}$$

la probabilité totale correspondante étant :

$$(2) \quad P(z) = \frac{1}{(2a)^n \cdot n!} \sum_{i=0}^k (-1)^i C_n^i [z + (n-2i)a]^n.$$

Dans les deux expressions ci-dessus,  $k$  représente la plus grande valeur de  $i$  pour laquelle l'expression entre crochets est positive, on a donc :

$$[2k - n]a \leq z \leq [2(k+1) - n]a$$

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* : 26 juin 1933; 25 septembre 1933; 12 novembre 1935; 17 février 1936, et 11 novembre 1940.

La courbe de fréquence  $p(z)$  se compose d'une série d'arcs de paraboles de degré  $(n - 1)$ , raccordés aux points  $\mp (n - 2k)a$  où ils ont des contacts d'ordre  $(n - 1)$ . A partir de  $n = 3$ , elle présente l'allure d'une courbe en cloche (fig. 1) s'annulant aux deux extrémités  $\mp na$  et, comme il résulte d'une expérience graphique effectuée par M. Marcel Prot (1), à partir de  $n = 4$  il est possible de tracer une courbe de Gauss qui se confond pratiquement avec elle.

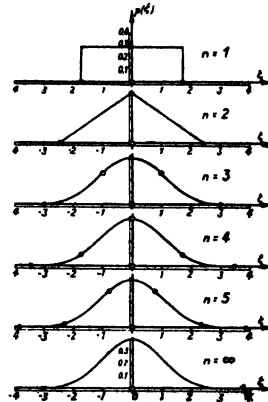


FIG. 1.

Pour justifier ce résultat, nous avons cherché l'expression générale des moments d'ordre pair  $(\mu_{2p})$  de  $p(z)$ , (les moments impairs étant tous nuls par raison de symétrie). Cette expression s'écrit :

$$(3) \quad \mu_{2p} = a^{2p} \sum \frac{n! \cdot (2p)!}{(n - \sum_j r_j)! \cdot \prod_j (r_j)! \cdot \prod_j [(\alpha_j + 1)!]^{r_j}}$$

la somme  $\Sigma$  comprenant autant de termes qu'il y a de décompositions possibles de  $2p$  en somme de nombres pairs positifs  $\alpha_j$

$$2p = \sum_j r_j \cdot \alpha_j.$$

[pour  $p = 4$  p. ex., on aura cinq termes correspondant à :

$$2 + 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 4 = 2 + 6 = 4 + 4 = 8]$$

Quand  $n$  croît indéfiniment, il suffit de considérer les deux termes prépondérants :

$$(\alpha_1 = 2, r_1 = p) \text{ et } (\alpha_1 = 2, r_1 = p - 2; \alpha_2 = 4, r_2 = 1).$$

On obtient ainsi :

$$\mu_{2p} = a^{2p} \left[ \frac{n! (2p)!}{(n-p)! p! (3!)^p} + \frac{n! (2p)!}{(n-p+1)! (p-2)! 1! (3!)^{p-2} (5!)^1} + \dots \right]$$

soit en développant suivant les puissances décroissantes de  $n$

$$(4) \quad \begin{aligned} \mu_{2p} &= a^{2p} \left[ \frac{(2p)!}{p! (3!)^p} n^p - \frac{(2p)!}{5 (p-2)! (3!)^p} n^{p-1} + \dots \right] \\ &= \frac{(2p)!}{2^p \cdot p!} (\mu_2)^p \left[ 1 - \frac{p(p-1)}{5n} + \dots \right]. \end{aligned}$$

(1) Note sur la composition des erreurs. Travaux et Mémoires de la Société française des Mécaniciens. Tome I (1939), p. 40.

On voit donc que pour  $n \rightarrow \infty$ , tous les moments de la loi de répartition de M. Baticle tendent vers ceux de la loi de Gauss, et ce d'autant plus rapidement que leur ordre est moins élevé.

Le tableau 1 donne quelques valeurs numériques de  $p(z/a)$  et  $P(z/a)$  pour les cinq premières courbes de répartition, les seules qui diffèrent encore sensiblement de la courbe de Gauss, comme le montre la fig. 1. Les courbes de cette figure ont été tracées en portant en abscisses

$$\zeta = \frac{z}{\sigma} \quad \text{avec } \sigma = \sqrt{\mu_2} = a \sqrt{\frac{n}{3}}$$

et en ordonnées

$$p(\zeta) = \sigma \cdot p(z).$$

L'écart absolu maximum s'exprime simplement comme un multiple de l'écart quadratique moyen

$$\zeta_{max} = \frac{z_{max}}{\sigma} = \sqrt{3n}.$$

L'ajustement d'une de ces courbes sur une distribution expérimentale pose le problème du choix de  $n$ . Ce choix peut être fait en partant des deux premiers moments non nuls

$$\mu_2 = a^2 \frac{n}{3} \quad \text{et} \quad \mu_4 = a^4 \frac{n(5n-2)}{15}$$

d'où l'on peut tirer, en posant

$$s = \frac{\mu_4}{3(\mu_2)^2},$$

$$n = \frac{2}{5(1-s)}.$$

On prendra pour  $n$ , le nombre entier le plus voisin de cette valeur.

\* \* \*

D'autres courbes de répartition à branches limitées peuvent être obtenues en admettant que chacune des  $n$  variables aléatoires  $x_1, x_2, \dots, x_n$  fluctue dans un intervalle différent :

$$\begin{array}{ll} - a_1 \leq x_1 \leq a_1 & p(x_1) = \frac{1}{2a_1} \\ - a_2 \leq x_2 \leq a_2 & p(x_2) = \frac{1}{2a_2} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ - a_n \leq x_n \leq a_n & p(x_n) = \frac{1}{2a_n} \end{array}$$

Leur somme  $x = \sum_{i=1}^n x_i$  varie alors dans un domaine borné  $(-\sum_{i=1}^n a_i, +\sum_{i=1}^n a_i)$  et la probabilité qu'elle soit comprise entre  $z$  et  $z + dz$  s'exprime par la formule suivante que l'on doit également à M. Baticle :

$$(5) \left\{ p(z) \cdot dz = \frac{dz}{2^n (n-1)! \prod_{i=1}^n a_i} \left\{ \left[ z + \sum_{i=1}^n a_i \right]^{n-1} - \sum_j \left[ \left( z + \sum_{i=1}^n a_i \right) - 2a_j \right]^{n-1} \right. \right.$$

$$\left. + \sum_{j,k} \left[ \left( z + \sum_{i=1}^n a_i \right) - 2(a_j + a_k) \right]^{n-1} - \dots \right\}$$

et dans laquelle les sommes  $\sum_j, \sum_{j,k}$  etc... sont limitées aux valeurs de  $j, k...$  pour lesquelles les expressions entre crochets restent positives.

Cette formule offre la possibilité de construire autant de courbes à branches limitées que l'on peut former de rapports :

$$a_1 : a_2 : a_3 \dots : a_n \quad \text{c'est-à-dire} \quad \infty^{n-1}$$

Elles présentent toutes une forme en cloche plus ou moins accusée et tendent, pour  $n \rightarrow \infty$ , vers la courbe de Gauss, tout au moins tant que les demi-amplitudes  $a_i$  restent du même ordre de grandeur. Cela résulte du théorème de Bienaymé-Tchebychef(1) qui établissent cette propriété limite pour tout ensemble de variables  $x_1, x_2... x_n$  satisfaisant aux conditions de Liapounoff, à savoir :

1° que leurs valeurs moyennes sont nulles

$$(x_i)_m = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_i) x_i dx_i = 0$$

2° Que leurs moments absolus d'ordre  $r$

$$(\lambda_r)_i = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_i) |x_i|^r dx_i$$

sont finis quel que soit  $r$ .

3° Que les rapports  $\frac{\sum_{i=1}^n (\lambda_r)_i}{[\sum_{i=1}^n (\lambda_2)_i]^{\frac{r}{2}}}$  tendent vers zéro, quel que soit le nombre entier  $r$  supérieur à 2.

Ces trois conditions sont *suffisantes* mais ne sont pas toutes *nécessaires*, comme on peut s'en rendre compte sur l'exemple suivant : prenons  $a_i = a \cdot i^q$ ,  $q$  étant un nombre entier positif fini. Dans le cas particulier des probabilités élémentaires constantes,  $p(x_i) = \frac{1}{2a_i}$  pour tout  $x_i$  compris entre  $(-a_i)$  et  $(+a_i)$ , et :

$$(\lambda_r)_i = \frac{a_i^r}{r+1} = \frac{a^r}{r+1} \cdot i^{qr}$$

La seconde des conditions ci-dessus n'est donc pas satisfaite puisque les moments absolus augmentent indéfiniment avec  $i$ . Par contre, la troisième condition est remplie car les rapports caractéristiques de Liapounoff prennent la forme :

$$\frac{\sum (\lambda_r)_i}{[\sum (\lambda_2)_i]^{\frac{r}{2}}} = \frac{3^{r/2}}{r+1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n i^{qr}}{[\sum_{i=1}^n i^{2q}]^{\frac{r}{2}}}$$

dont le terme principal

$$\frac{[3(2q+1)]^{r/2}}{(r+1)(q+1)} \cdot \frac{1}{n^{\frac{r}{2}-1}}$$

tend vers zéro pour  $r > 2$ .

(1) Pour l'énoncé complet et la démonstration, voir : R. DELTHEIL, *Erreurs et moindres carrés*, Fasc. II du tome I du *Traité du Calcul des probabilités et de ses applications*, par E. BOREL. Éd. Gauthier-Villars, Paris, 1930, p. 71.

Un calcul direct des moments d'ordre pair de la loi de distribution de  $x = \sum_{i=1}^n x_i$  conduit à une formule analogue à (4)

$$\mu_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p \cdot p!} (\mu_2)^p \left[ 1 - \frac{p(p-1)}{5n} \cdot \frac{(2q+1)^2}{4q+1} + \dots \right]$$

ce qui prouve que pour  $n \rightarrow \infty$  cette loi tend encore vers la loi de Gauss, malgré que la deuxième condition de Liapounoff n'est pas satisfaite.

\* \* \*

Si l'on choisit volontairement pour la loi des amplitudes  $a_i = f(i)$ , une relation telle que la troisième condition de Liapounoff ne soit pas satisfaite, on peut établir en passant à la limite ( $n \rightarrow \infty$ ), des courbes de distribution différentes de celle de Gauss.

Soit, par ex.  $a_i = a \cdot b^{i-1}$  avec  $0 < b < 1$

$$(\lambda_r)_i = \frac{a_i^r}{r+1} = \frac{a^r}{r+1} \cdot b^{r(i-1)}$$

la seconde condition est remplie car  $(\lambda_r)_n \rightarrow 0$ , par contre, la troisième ne l'est pas

$$\frac{\sum (\lambda_r)_i}{[\sum (\lambda_1)_i]^{r/2}} = \frac{3^{r/2}}{r+1} \cdot \frac{1-b^{rn}}{1-b^r} \cdot \left( \frac{1-b^2}{1-b^{2n}} \right)^{r/2} \rightarrow \frac{[3(1-b^2)]^{r/2}}{(r+1)(1-b^r)} \neq 0.$$

Les distributions limites ainsi définies sont bornées par la condition

$$|z| \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{a}{1-b}.$$

Elles affectent la forme de courbes en cloche à sommet plus ou moins aplati selon la valeur de  $b$  (fig. 2); pour  $b < 0,5$  elles comportent même une plage à probabilité constante  $p(z/a) = 0,5$  dans l'intervalle  $|z| \leq a \frac{1-2b}{1-b}$ .

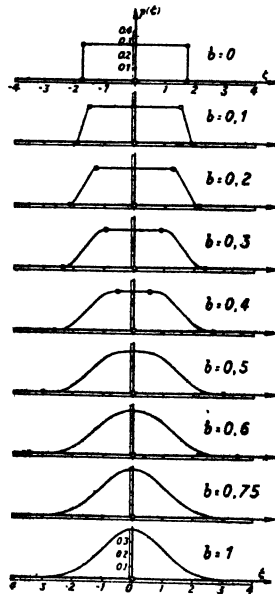


Fig. 2.

Le tableau II donne, pour sept valeurs de  $b$ , quelques valeurs numériques de  $p(z/a)$  et  $P(z/a)$ , que nous avons calculées directement par la formule (5) en prenant successivement  $n = 1, 2, 3, \dots$  et en arrêtant le calcul dès que le résultat ne variait plus. La convergence de ce procédé étant d'autant plus lente que  $b$  est plus grand, pour  $b$  voisin de l'unité, il est préférable d'utiliser le développement en série de Bruns-Charlier, dont nous indiquons plus loin les coefficients.

La fig. 2 montre l'allure des courbes de répartition obtenues. Comme pour la figure 1, nous avons porté en abscisses  $\zeta = \frac{z}{\sigma}$  et en ordonnées  $p(\zeta) = \sigma \cdot p(z)$ , pour faciliter la comparaison des différentes courbes entre elles et en particulier avec la courbe de Gauss ( $b = 1$ ).

L'écart moyen quadratique  $\sigma$  peut être tiré du moment d'ordre 2

$$\mu_2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = \frac{a^2}{3} \frac{1}{1-b^2}$$

ce qui donne

$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{3(1-b^2)}}$$

et l'écart maximum exprimé en multiple de  $\sigma$ .

$$\zeta_{max} = \frac{z_{max}}{\sigma} = \sqrt{3 \frac{1+b}{1-b}}$$

Les moments d'ordre supérieur s'expriment par des formules assez complexes qui n'offrent pas d'intérêt particulier. Nous nous bornerons donc à indiquer celui d'ordre 4 qui peut être utile dans les problèmes d'ajustement :

$$\mu_4 = \frac{a^4}{15} \cdot \frac{3+7b^2}{(1-b^2)(1-b^4)}$$

En effet, en éliminant  $a$  entre  $\mu_2$  et  $\mu_4$ , on obtient :

$$b^2 = 1 - 10 \frac{1-s}{7-5s} \quad \text{avec} \quad s = \frac{\mu_4}{3(\mu_2^2)}$$

ce qui permet de choisir la courbe de la famille qui s'ajuste le mieux sur une distribution expérimentale dont on connaît  $\mu_2$  et  $\mu_4$ .

Quand la valeur de  $b$  ainsi obtenue est voisine de 1, on aura intérêt à employer le développement en série de Bruns-Charlier (1)

$$p(\zeta) = \frac{e^{-\frac{\zeta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \delta_k \cdot H_k(\zeta)$$

dans lequel  $H_k(\zeta)$  désigne les polynômes d'Hermite et dont nous donnons ci-

(1) C. V. L. CHARLIER, *Application de la théorie des probabilités à l'astronomie*. Fasc. IV du Tome II du *Traité du Calcul des probabilités et de ses applications*, par E. BOREL. Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1931, p. 41.



après les premiers coefficients  $\delta_k$  (les coefficients d'ordre impair sont tous nuls, par raison de symétrie).

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 1 \\ \delta_2 &= 0 \\ \delta_4 &= -\frac{1}{20} \cdot \frac{(1-b^2)^2}{1-b^4}, \\ \delta_6 &= \frac{1}{105} \cdot \frac{(1-b^2)^3}{1-b^6}, \\ \delta_8 &= -\frac{1}{5600} \cdot \frac{(1-b^2)^4}{1-b^8} \cdot \frac{5-19b^4}{1-b^4}, \\ \delta_{10} &= \frac{1}{23100} \cdot \frac{(1-b^2)^5}{1-b^{10}} \cdot \frac{1-12b^4-12b^6+23b^{10}}{(1-b^4)(1-b^6)}. \end{aligned}$$

\*\*\*

Nous terminerons par un exemple d'application pratique. Nous avons étudié la distribution des résistances à la traction de 940 éprouvettes prélevées dans la production mensuelle d'une usine de duralumin. Le calcul des paramètres statistiques de cette distribution nous a donné

$$\begin{aligned} \text{une moyenne } R_m &= 48,65 \text{ kg/mm}^2, \\ \text{les deux moments } \mu_2 &= 6,25 \text{ et } \mu_4 = 92,1, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \text{l'écart moyen quadratique } \sigma &= \sqrt{\mu_2} = 2,52 \text{ kg./mm}^2 \\ \text{et le rapport caractéristique } s &= \frac{\mu_4}{3(\mu_2)^2} = 0,762. \end{aligned}$$

Une tentative d'ajustement de la courbe de Gauss a été effectuée; elle montre les différences sensibles entre la distribution expérimentale et la courbe ajustée définie par  $R_m$  et  $\sigma$ , surtout au voisinage du sommet de cette dernière. Un calcul de la « valeur d'ajustement » nous a donné

$$\chi^2 = N \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - P_i)^2}{P_i} = 940.0,0455 = 43,$$

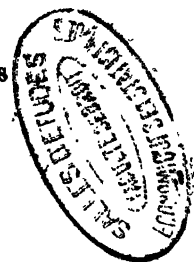
ce qui, pour  $k = 15$ , correspond dans les Tables de Pearson à une probabilité  $P$  inférieure à 0,0002, d'obtenir par le seul effet du hasard une distribution s'écartant davantage de la courbe de Gauss.

Nous avons alors opéré un ajustement au moyen de la courbe  $b = 0,5$  qui correspond très sensiblement à la valeur de  $s$  trouvée plus haut. La concordance entre la courbe ajustée et la distribution expérimentale est nettement meilleure, ce que confirme d'ailleurs le calcul du critère de Pearson :

$$\chi^2 = 940.0,0109 \approx 10 \quad \text{d'où} \quad P = 0,762.$$

On remarquera enfin que cet ajustement reproduit bien la position des extrémités de la distribution. En effet, pour  $b = 0,5$ ,  $\zeta_{\max} = 3$ , donc

$$\begin{aligned} R_{\min} &= R_m - 3\sigma = 41,09 \text{ contre } 42 \text{ kg-mm}^2, \\ R_{\max} &= R_m + 3\sigma = 56,21 \text{ contre } 55 \text{ constatés.} \end{aligned}$$



Pour comparer les deux ajustements à ce point de vue, nous avons calculé la probabilité que le maximum d'une série de 940 éprouvettes soit inférieur à 55 kg./mm<sup>2</sup>, ainsi que la probabilité que le minimum soit supérieur à 42 kg./mm<sup>2</sup>. En admettant que les N éprouvettes ont été tirées au hasard d'une population infiniment plus nombreuse et caractérisée par une loi de probabilité totale P (ζ), la probabilité que le maximum soit inférieur à ζ<sub>1</sub>, s'exprime par :

$$Q(\zeta_1) = [P(\zeta_1)]^N$$

tandis que la probabilité que le minimum soit supérieur à ζ<sub>2</sub> est :

$$R(\zeta_2) = [1 - P(\zeta_2)]^N.$$

En appliquant ces formules à la loi de Gauss, on obtient :

avec N = 940

$$\begin{aligned} \text{pour } R = 55; \quad \zeta_1 = + 2,52; \quad P(\zeta_1) = 0,9941323; \quad Q(\zeta_1) = 0,004; \\ \text{pour } R = 42; \quad \zeta_2 = - 2,64; \quad P(\zeta_2) = 0,0041453; \quad R(\zeta_2) = 0,025. \end{aligned}$$

Ces résultats expriment que si les N éprouvettes provenaient d'une population gaussienne, il est presque certain que le maximum et le minimum seraient plus éloignés de la moyenne.

Par contre, l'application des mêmes formules à la courbe  $b = 0,5$ , donne :

avec N = 940

$$\begin{aligned} \text{pour } R = 55; \quad \zeta_1 = + 2,52; \quad P(\zeta_1) = 0,999692; \quad Q(\zeta_1) = 0,749; \\ \text{pour } R = 42; \quad \zeta_2 = - 2,64; \quad P(\zeta_2) = 0,000053; \quad R(\zeta_2) = 0,951. \end{aligned}$$

Donc, si les éprouvettes proviennent d'une telle population, il est très probable que les extréma d'une autre série de 940 exemplaires, ne soient pas plus éloignés de la moyenne que dans la série étudiée.

Ce résultat, rapproché du critère de Pearson calculé plus haut, prouve que l'ajustement de la courbe  $b = 0,5$  est beaucoup plus plausible que celui de la courbe de Gauss.

Paris, octobre 1947.

Stanislas SCHNEIDER.

TABLEAU I

|       |          |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |     |
|-------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| n = 2 | $z/a$    | 0     | 0,2   | 0,4   | 0,6   | 0,8   | 1,0   | 1,2   | 1,4   | 1,6   | 1,8   | 2,0 |
|       | $p(z/a)$ | 0,500 | 0,450 | 0,400 | 0,350 | 0,300 | 0,250 | 0,200 | 0,150 | 0,100 | 0,050 | 0   |
|       | $P(z/a)$ | 0,500 | 0,595 | 0,680 | 0,775 | 0,820 | 0,875 | 0,920 | 0,955 | 0,980 | 0,995 | 1   |
| n = 3 | $z/a$    | 0     | 0,3   | 0,6   | 0,9   | 1,2   | 1,5   | 1,8   | 2,1   | 2,4   | 2,7   | 3,0 |
|       | $p(z/a)$ | 0,375 | 0,364 | 0,330 | 0,274 | 0,202 | 0,141 | 0,090 | 0,051 | 0,022 | 0,006 | 0   |
|       | $P(z/a)$ | 0,500 | 0,611 | 0,716 | 0,807 | 0,879 | 0,930 | 0,964 | 0,985 | 0,996 | 0,999 | 1   |
| n = 4 | $z/a$    | 0     | 0,4   | 0,8   | 1,2   | 1,6   | 2,0   | 2,4   | 2,8   | 3,2   | 3,6   | 4,0 |
|       | $p(z/a)$ | 0,333 | 0,315 | 0,269 | 0,207 | 0,141 | 0,083 | 0,043 | 0,018 | 0,005 | 0,001 | 0   |
|       | $P(z/a)$ | 0,500 | 0,631 | 0,749 | 0,844 | 0,914 | 0,958 | 0,983 | 0,995 | 0,999 | 1,000 | 1   |
| n = 5 | $z/a$    | 0     | 0,5   | 1,0   | 1,5   | 2,0   | 2,5   | 3,0   | 3,5   | 4,0   | 4,5   | 5,0 |
|       | $p(z/a)$ | 0,299 | 0,280 | 0,229 | 0,162 | 0,099 | 0,05  | 0,021 | 0,007 | 0,001 | 0,000 | 0   |
|       | $P(z/a)$ | 0,500 | 0,647 | 0,775 | 0,873 | 0,938 | 0,97  | 0,992 | 0,998 | 1,000 | 1,000 | 1   |

