JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

D. WOLKOWITSCH

Ajustement d'une ligne polygonale

Journal de la société statistique de Paris, tome 89 (1948), p. 409-411

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1948__89__409_0>

Ajustement d'une ligne polygonale.

Le diagramme des points figuratifs est divisé en régions numérotées 1, 2, 3 ...n, séparées par des verticales A, B, C,...N. La verticale A sépare les régions 1 et 2, B les régions 2 et 3 etc...

Nous voulons déterminer une ligne polygonale dont les sommets se trouvent sur les verticales A, B..., dont les côtés seront désignés par D_1, D_2..... et telle que la somme des carrés des écarts verticaux soit minimum.

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots\ldots = \text{minimum.}$$

Nous nous limiterons dans le présent travail à $n = 3$; le cas de trois régions conduisant au cas général par une généralisation simple.

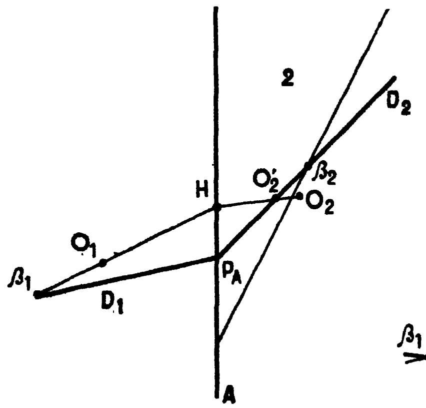
Soient e_1, e_2, e_3 les ellipses centrales d'inertie des systèmes S_1, S_2, S_3 des poids des expériences, considérés comme des masses ponctuelles appliquées aux points figuratifs correspondants, enfin O_1, O_2, O_3 les centres de gravité.

I. — *Région unique.* — La droite D_1 est le diamètre conjugué de la verticale dans l'ellipse e_1; nous écrirons, pour abréger, le d. c. v. dans e_1.

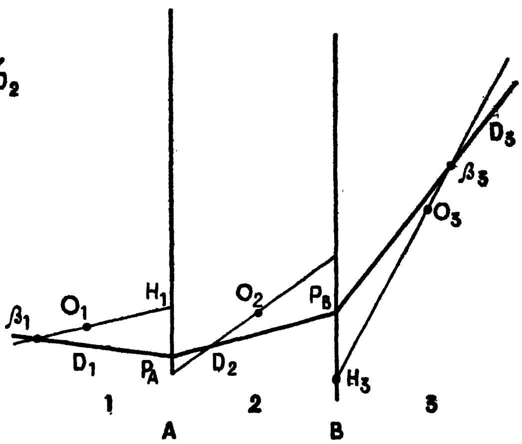
La droite D_1 qui passe par un point P quelconque du plan et donne le minimum de la somme des carrés des écarts (de Σ_1), est le d. c. v. dans l'ellipse d'inertie relative au point P pour le système S_1. Si nous appelons β_1 l'antipôle de la verticale du point P dans e_1, la droite D'_1 n'est autre que P β_1.

II. — *Deux régions.* — Il s'agit de construire les deux côtés D_1 et D_2 qui se coupent sur A et rendent minimum la somme $\Sigma_1 + \Sigma_2$.

Le d. c. v. dans e_1 coupe la verticale A en un point H_1. Partant du poids M_1



2 régions



3 régions

(somme des poids de la région 1), nous définissons un poids résultant μ_1 de gauche pour la verticale A, appliqué au point H_1 et dont la grandeur est $\mu_1 = M_1 \dfrac{\beta_1 O_1}{\beta_1 H_1}$. Il se trouve que la somme des carrés des écarts du système S_1 par rapport à une droite β_1 P_A (P_A sommet de la ligne polygonale sur A) a pour expression

$$\Sigma_1 = \mu_1 \left(\overline{H_1 P_A}^2 + k^2\right)$$

k étant une constante quand P_A varie.

μ_1 $\overline{H_1 \ P_A^2}$ *est aussi bien le carré de l'écart du poids* μ_1, *par rapport à* D_2 *qui passe par* P_A, *de sorte que* D_2 *qui rend minimum* $\Sigma_2 + \mu_1 \overline{P_A H_1}^2$ *sera le d.c.v. dans l'ellipse centrale du système* $S'_2 = S_2 + \mu_1$.

D_2 connue nous donne P_A et D_1 s'en déduit puisque c'est la droite P_A β_1.

III. — *Trois régions.* — Utilisons la voie suivie au paragraphe II.

Nous définirons comme ci-dessus le poids résultant μ_1 à gauche pour la verticale A, et de la même façon le poids résultant μ_3, à droite pour la verticale B;

$\mu_3 = M_3 \frac{\beta_3 O_3}{\beta_3 H_3}$ (β_3 antipôle de B dans e_3) et nous pouvons dire immédiatement que *le côté* D_2 *est le d. c. v. dans l'ellipse centrale d'inertie du système* $S_2 + \mu_1 + \mu_3$.

D_2 détermine les sommets P_A et P_B, le côté D_1 est la droite $P_A\,\beta_1$, et le côté D_3 la droite $P_B\,\beta_3$.

IV. *2e méthode.* — Désignons par Θ'_2 l'ellipse centrale du système $S'_2 = S_2 + \mu_1$. O'_2 est le centre de gravité de ce système, β'_2 l'antipôle de B; le d. c. v. dans Θ'_2 détermine sur B un point H'_2.

Nous définissons un poids μ'_2 à gauche pour la verticale B analogue au poids μ_1 et dont le point d'application est H'_2 et la grandeur $(M_2 + \mu_1). \frac{\beta'_2 O'_2}{\beta'_2 H'_2} = \mu'_2$.

En répétant le raisonnement du paragraphe III, nous voyons que D_3 est le d. c. v. dans l'ellipse Θ'_3 du système $S'_3 = S_3 + \mu'_2$.

D_3 coupe B au point P_B; le côté D_2 est la droite $P_B\,\beta'_2$; elle coupe A en P_A, le côté D_1 est la droite $P_A\,\beta_1$.

Remarque 1. — Pour le problème général nous aurions à cheminer de proche en proche en déterminant les points μ_1, μ'_2, μ'_3.... μ'_{n-1}. Le dernier côté se trouvera déterminé et sa détermination entraîne celle des n — 1 autres.

Remarque 2. — Il importe de souligner que les ellipses n'interviennent que pour concrétiser les relations géométriques entre certains éléments; en fait, leur construction est superflue. Il est seulement nécessaire de connaître leurs centres et les divers antipôles; ces points s'obtiennent au cours des calculs familiers à tous les statisticiens.

Octobre 1947.

D. Wolkowitsch.