

# JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

JACQUES DE PORTZAMPARC

## Discussion

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 91 (1950), p. 116-124

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_1950\\_\\_91\\_\\_116\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1950__91__116_0)

© Société de statistique de Paris, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## V

### DISCUSSION

relative à la communication de MM. René Malterre et Pierre Vendryes :  
*Théorie probabiliste de la foule.*

M. FOURASTIÉ indique qu'à son sens les résultats de l'expérience réalisée par MM. Vendryès et Malterre ne peuvent exactement être résumés par une phrase telle que la suivante : *les êtres vivants ont entre eux des relations aléatoires*, mais par une proposition telle que la suivante : *il est possible de placer certains êtres vivants dans des conditions telles que leur mouvement paraisse aléatoire.*

Il est intéressant de préciser que les conditions qui paraissent donner les résultats les plus voisins de la répartition aléatoire sont celles d'un milieu homogène, isotrope et symétrique par rapport à un centre. Il aurait été intéressant, si l'expérience avait pu être prolongée plus longtemps, de noter l'influence de facteurs physiques tels que l'élévation ou l'abaissement de la température de l'eau, le jeûne ou l'abondance de nourriture, l'intensité de la lumière, l'âge des sujets, etc...

Quelle que soit d'ailleurs l'interprétation à donner à l'expérience, celle-ci marque manifestement une date dans l'histoire de la biologie puisque pour la première fois on a constaté expérimentalement le comportement aléatoire de l'être vivant.

M. HÉNON. — L'intervalle de temps de quatre minutes qui a été signalé au cours de l'exposé, me semble faible.

En effet, mes souvenirs d'enfance, en matière de têtards, me font croire que ceux-ci ne sont pas en continus déplacements : certains, doivent rester immobiles dans l'intervalle des observations, et d'autres se déplacer lentement.

Ce phénomène doit se traduire par une interdépendance entre observations, ou, en d'autres termes, par une persistance entre les distributions statistiques successives constatées sur les clichés.

C'est un mécanisme d'auto-régression bien connu des économistes.

La tendance de l'histogramme à se rapprocher de sa forme limite, en multipliant les observations, est donc plus lente que s'il s'agissait d'un simple jeu du hasard (une roulette par exemple).

Le test de  $\chi^2$ , appliqué aux observations successives, deux à deux, permettrait de dire si l'on peut admettre pratiquement l'hypothèse de l'indépendance.

Si cette hypothèse n'était pas vérifiée, le test d'accord entre les observations serait *significativement trop bon.*

M. HÉMAR. — Je ne pense pas que l'instinct grégaire affecte le caractère gaussien de la distribution.

Soient  $N$  têtards dans le cristalliseur.

Si les têtards sont indépendants, on lira sur chaque photographie d'un octant le résultat global de  $N$  coups, la probabilité de l'événement favorable étant  $\frac{1}{8}$ . La courbe qui se dégagera de toutes les photographies sera une courbe de Gauss ayant pour unité d'écart  $\sqrt{2 N \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{8}}$ , soit  $\sqrt{\frac{7}{32}} \sqrt{N}$ .

Si les têtards sont groupés par groupes de  $n$  indépendants entre eux, les résultats des photographies se distribueront suivant la même loi de probabilité. L'unité d'écart sera pour le nombre de groupes  $\sqrt{\frac{7}{32}} \sqrt{\frac{N}{n}}$  et pour le nombre des têtards  $\sqrt{\frac{7}{32}} \sqrt{n N}$ .

Si l'on a  $N_1$  têtards isolés,  $N_2$  têtards groupés par 2,  $N_3$  têtards groupés par 3, etc..., l'unité d'écart de la distribution gaussienne sera donnée par :

$$\sigma^2 = \frac{7}{32} (N_1 + 2 N_2 + 3 N_3 \dots + r N_r \dots)$$

avec  $N_1 + N_2 + N_3 \dots + N_r \dots = N$ .

Les valeurs limites de la formule sont  $\frac{7}{32} N$  et  $\frac{7}{32} N^2$ ; ce sont aussi ses valeurs minimum et maximum.

Étant donné  $N^2 = \sum N_i^2 + 2 \sum N_i N_j$ , on a notamment :

$$N^2 \geq \sum N_i + \sum (i - 1) N_i, \text{ soit } N^2 \geq \sum i N_i$$

$$\text{Posons } \sigma^2 = \frac{1}{K} \frac{7}{32} N \quad \text{avec } \frac{1}{N} \leq K \leq 1.$$

Pour un nombre de têtards suffisamment grand, on peut admettre que la distribution de la population ne dépend pas de son importance.  $K$  est dans ces conditions un coefficient qui ne dépend pas de  $N$  et qui caractérise donc l'indépendance des têtards.

$\frac{1}{N}$  étant d'autre part négligeable, nous avons d'une manière générale :

$$K = \frac{2 p (1 - p) N}{\sigma^2} \text{ avec } 0 < K \leq 1$$

$\sigma$  : Unité d'écart relevée expérimentalement.

$N$  : Montant de la population étudiée.

$p$  : Probabilité de l'événement favorable pour un individu.

M. FRÉCHET. — Les communications présentées constituent une étude expérimentale très particulière inspirée par un problème très général. On pourrait dire qu'il s'agit de vérifier s'il existe des animaux disposant du libre arbitre. S'il en était ainsi, on pourrait penser que la multiplicité des décisions prises aurait

des effets comparables à ceux du hasard, que par conséquent les mouvements de ces animaux seraient soumis aux lois du hasard. C'est, en effet, à peu près ce que semble démontrer l'expérience des têtards. Toutefois, la réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que, si les mouvements des têtards étaient tout à fait aléatoires, il n'en résulterait nullement qu'ils disposent du libre arbitre. Néanmoins, il reste intéressant de savoir si un ensemble d'animaux peut se comporter comme si, non seulement chacun obéissait au hasard, mais encore comme s'ils étaient indépendants. Pour cela, il faut que, pour chaque octant, la loi de probabilité du nombre de têtards dans cet octant, lors de la prise d'un cliché, obéisse à la loi de Laplace (dite autrefois, à tort, de Gauss). Ici encore, la réciproque n'est pas vraie. Il faut encore que ce soit la loi de Laplace correspondant à l'écart quadratique moyen  $\sqrt{npq} \sqrt{150 \frac{1}{8} \frac{7}{8}}$  (et bien entendu à la moyenne  $np = 150 \times \frac{1}{8}$ ). Ou mieux, puisqu'on n'observe que des fréquences et non des probabilités, il faudrait s'assurer si l'écart entre cette loi théorique particulière et la loi empirique observée est admissible, si ces calculs ont été faits.

Le véritable chiffre de nos expériences est  $n = 80$  têtards, mais peut-être M. Fréchet a-t-il voulu parler des 150 clichés).

L'un d'eux nous a dit qu'il s'agissait de substituer une appréciation quantitative à l'appréciation qualitative de l'instinct grégaire et pour cela de mener (ou plutôt repérer) cet instinct grégaire par l'écart entre la courbe observée et celle de Laplace (et ici je répète que cette dernière devrait être celle qui correspond à  $np$  et  $\sqrt{npq}$ ). Mais la manière de définir et mesurer cet écart n'a pas été précisée. Peut-être pourrait-on à cet effet calculer chi carré et employer pour indice la probabilité correspondante?

M. Vendryés a accompagné la description de l'expérience d'observations d'ordre général sur la distinction entre la statistique et la probabilité sur lesquelles je ne suis pas sûr que tous les statisticiens soient d'accord. Mais c'est là une question en dehors du sujet principal et qu'il n'est pas nécessaire ici de traiter à fond.

L'idée générale d'étudier l'indépendance ou la dépendance des êtres composant une population (petite ou grande), est intéressante et je signalerai un autre essai dans cette voie. Notre confrère, M. Dugué, a bien voulu m'informer (sans l'avoir encore publié) qu'il a voulu utiliser le schéma proposé par M. Émile Borel pour donner une image simple de la dépendance. Ce schéma consiste en un tirage de boules dans une urne en supposant ces boules attachées l'une à l'autre, par grappes).

M. Dugué a cherché quel nombre de votants, attachés ainsi par grappes, donnerait des résultats analogues à ceux d'un vote récent. Le nombre qu'il a obtenu de 80 votants s'influençant les uns les autres ou influencés par l'un d'entre eux ne semble pas déraisonnable comme moyenne de grappes de dimensions certainement très variées. Mais ce qui me semble le plus frappant, c'est qu'en appliquant la même hypothèse aux abstentionnistes, il a trouvé que les grappes se réduisaient à deux individus, ce résultat correspondant bien à la prévision

qu'on pouvait faire. Il est clair, en effet, que les abstentions sont dues à des causes beaucoup plus individuelles que les similitudes de vote.

Notre président a cité un autre exemple tiré de l'économique et qui me paraît bien, en effet, relever de la tendance moderne à faire entrer en ligne de compte dans le comportement de chaque individu, l'influence (positive ou négative) exercée sur lui par les autres individus de la collectivité à laquelle ils appartiennent.

*Réponses de M. Vendryés.*

I. — A M. FOURASTIÉ.

a) Notre expérience ne concerne que des têtards, et nous n'en avons pas conclu que les êtres vivants, en général, ont entre eux des relations aléatoires. Voici comment j'écrirais la phrase de M. Fourastié : « Il est possible de placer certains être vivants (ceux qui sont indépendants les uns des autres) dans des conditions telles (celles qui respectent cette indépendance) que leurs relations soient (et non paraissent) aléatoires ».

II. — A M. HÉNON.

Comme le remarque très justement M. Hénon, il faut réaliser l'indépendance des répartitions d'un cliché à l'autre. L'intervalle de deux à trois minutes entre les divers clichés nous a paru suffisant parce que, dans le cristalliseur, les têtards ont fait preuve d'une grande activité et ont eu beaucoup moins tendance à s'immobiliser sur le fond comme lorsqu'ils sont dans un étang.

On échapperait certainement mieux aux critiques en laissant entre les clichés des intervalles plus longs. Mais en observant des intervalles de l'ordre de dix minutes, il faudrait, en se contentant de 150 clichés, et en poursuivant, sans arrêt l'expérience, vingt-cinq heures. Les clichés devraient alors être pris par un appareil automatique, que nous n'avons pas.

III. — A M. HÉMAR.

La critique de M. Hémar, qui atteint au fonds théorique même de l'expérience comporte, à mon avis, deux idées :

a) M. Hémar montre que si les têtards, au lieu d'être isolés les uns des autres, s'assemblaient par petits groupes indépendants les uns des autres, leur répartition serait encore gaussienne. Je suis de son avis.

La courbe théorique de notre expérience correspond au cas où les têtards sont indépendants un à un, et a été calculée avec une unité d'écart  $\sigma = \sqrt{2 p q} \sqrt{r}$ , (soit  $r = 4,18$ ). M. Hémar calcule que si les têtards se rassemblaient par groupes indépendants,  $n$  deviendrait égal à  $\sqrt{2 p q} \cdot \sqrt{n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots rn_r + \dots}$ . Or, la somme  $n_1 + n_2 + \dots + n_r$  est égale à  $n$ . Par conséquent, cette nouvelle valeur de  $n$  est plus grande que la première, et elle le serait d'autant plus que  $r$  serait plus grand par rapport à  $n$ . La courbe reste bien gaussienne, mais elle s'effondre d'autant plus que  $n$  est plus grand. Plus les têtards tendent à se réunir par petits groupes, et plus leur répartition s'éloigne de celle qui correspond au cas de l'indépendance parfaite.

Telle est bien la conclusion de l'expérience. Notre courbe expérimentale

est bien gaussienne; mais elle est moins aiguë que la courbe théorique parfaite; et en fait, comme nous l'avons fait remarquer, nos têtards ont formé de petits groupes : ils n'ont pas été parfaitement indépendants les uns des autres. Au lieu d'être égal à 4,18, notre unité d'écart expérimentale a été supérieure à 5.

Cette croissance de l'unité d'écart correspond à une diminution de l'indépendance des têtards : *elle pourrait servir à mesurer leur instinct grégaire.*

L'augmentation de la grégarité laisse donc à la courbe sa « gaussité », mais elle l'affecte, contrairement à ce que dit M. Hémar, puisqu'elle l'étale de plus en plus.

b) Il y a plus. Il arrive, en effet, un moment dans cette augmentation de la grégarité où la courbe perd sa gaussité.

Les remarques de M. Hémar portent sur les cas où les têtards se réunissent par petits groupes : mais ces groupes sont indépendants les uns des autres. Entre les têtards, il y a moins d'indépendance que lorsqu'ils nagent isolés, mais il y a encore de l'indépendance, et, par conséquent, d'après mes idées, de l'aléatoire.

Pour que les remarques de M. Hémar soient exactes, il faut que le nombre  $r$  des têtards par groupes soit petit par rapport au nombre total  $n$ . Passons, en effet, à la limite, admettons que la grégarité soit absolue, que tous les têtards se réunissent en un seul groupe et que le nombre  $r$  devienne égal à  $n$ . Dans nos octants, nous trouverions alors très souvent la fréquence zéro, et très souvent de hautes fréquences, égales et supérieures à 20. Mais nous ne trouverions que rarement les moyennes fréquences, aux environs de 10. La courbe aurait un sommet aux petites fréquences, et un sommet aux grandes fréquences; entre ces deux sommets, elle aurait la forme d'une vallée, et non plus la forme d'une montagne, comme la courbe de Gauss. Pourrait-on encore la qualifier de « gaussienne »?

A partir de quel moment la répartition ne sera-t-elle plus gaussienne? C'est une question de proportion entre l'importance numérique  $r$  des groupes et la valeur du nombre total  $n$  des animaux. C'est une question de proportion d'indépendance.

Ainsi, la grégarité affecte si bien le caractère gaussien de la distribution qu'elle finit pas le détruire.

#### IV. — A M. FRÉCHET.

a) La réponse que je viens de faire à M. Hémar me semble être aussi une réponse à certaines des questions de M. Fréchet. Par l'étude de la valeur numérique  $r$  des groupes, par rapport au nombre total  $n$ , on peut définir la valeur de la grégarité, de la diminution d'indépendance. A l'augmentation de la grégarité correspond une augmentation de l'unité d'écart  $\sigma$ , et aussi un affaissement du sommet des courbes expérimentales. Nous n'avons d'ailleurs fait aucun calcul dans ce sens.

b) M. Fréchet soulève la question passionnante du libre arbitre. Mais je ne pense pas que notre expérience décèle le libre arbitre des têtards. Je dirais même, au contraire, qu'elle prouve que les têtards ont bien peu de libre arbitre.

Notre expérience a pour fonds l'*indépendance* des têtards. Mais, entre l'*indépendance* et le libre arbitre, il y a un abîme.

Lorsque les gaz sont à l'état parfait, les molécules sont indépendantes les unes des autres : elles ne sont liées par aucun champ de force. Cette indépendance a un caractère négatif. Lorsque les animaux se rendent indépendants du milieu extérieur, ils le font, comme je l'ai montré dans mon livre *Vie et Probabilité*, à l'aide de fonctions physiologiques, les fonctions régulatrices. Leur indépendance est acquise; elle résulte d'actes physiologiques. C'est de l'autonomie physiologique. Elle se prolonge par l'autonomie motrice des animaux. Mais, pour être acquise, cette autonomie est encore au niveau de l'indépendance simple. Pour qu'il y ait libre arbitre, il faut encore que les animaux acquièrent quelque chose de plus : le choix de leurs actions. L'autonomie physiologique est le fondement du libre arbitre, sans plus.

Or, devenant indépendants du milieu extérieur, les animaux entrent avec lui en relations aléatoires. C'est le stade de nos têtards. Le libre arbitre, au contraire, implique le choix de l'action, et enlève à l'action ce qu'elle aurait d'aléatoire si l'animal en restait au stade de la simple indépendance. Que les têtards nagent au hasard, cela prouve qu'ils sont indépendants, mais cela prouve aussi qu'ils ne pensent guère.

#### *Réponse de M. Malterre.*

M. Vendryès ayant répondu aux questions ou objections faites par MM. Fournastié, Hénon, Hémar et Fréchet, je ne retiendrai pour ma part que la partie de l'intervention de M. Fréchet sur la mesure de l'instinct grégaire.

J'ai dit que l'écart entre la courbe de Gauss correspondant à une répartition théorique parfaite d'une foule d'animaux et celle construite d'après les résultats expérimentaux pouvait servir de mesure de l'instinct grégaire. Nous n'avons pas chiffré cet écart mais je pense comme M. Vendryès que nous pouvons adopter pour cela la différence entre l'unité d'écart donnée par la formule

$$\sigma = \sqrt{2n \times p q} \text{ soit ici } \sigma = \sqrt{2 \times 80 \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{8}} = 4,18.$$

et celle obtenue expérimentalement, soit environ + 5.

Ce résultat devra nécessairement être comparé avec ceux obtenus sur des animaux particulièrement grégaires, des moutons par exemple, au cours d'expériences qui devront être réalisées de manière à permettre cette comparaison. Si nous notons 0 une répartition parfaitement homogène, nous dirons que dans l'expérience des têtards ce 0 correspondait à  $\sigma = 4,18$ , c'est-à-dire à l'absence totale d'instinct grégaire. Une répartition totalement groupée serait notée 100 pour une valeur de  $\sigma$  à calculer.

Cependant, avant d'adopter une échelle de comparaison, je pense qu'il sera nécessaire de réaliser toute une série d'expériences sur les animaux de races différentes. Mais de telles expériences, en particulier celles qui auront pour objet des gros animaux, posent des problèmes matériels difficiles à résoudre pour nous.

NOTE COMPLÉMENTAIRE DE M. VENDRYÈS :

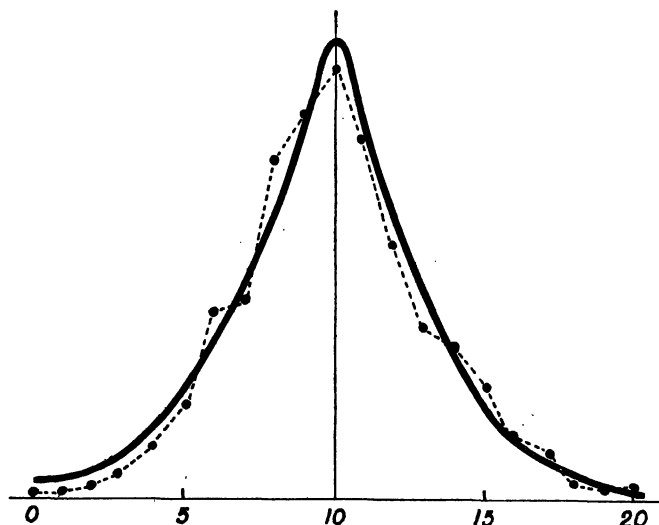
*Remarques sur la grégarité.*

Dans l'article que nous avons fait paraître, mon ami Malterre et moi, sur la théorie probabiliste de la foule (numéro de janvier-février), il est apparu qu'il y avait une différence (fig. 5 de la page 26) entre la courbe théorique, tracée en trait plein, et la courbe expérimentale, dessinée en pointillés. Nous avons attribué, en principe, cette différence à l'influence modérée que les têtards exercèrent les uns sur les autres. Il y avait eu un certain reste de grégarité chez nos têtards, qui ne furent pas parfaitement indépendants les uns des autres.

La courbe théorique fut établie, dans l'hypothèse de l'indépendance parfaite, en prenant pour unité d'écart  $\sigma$  la valeur :  $\sqrt{2 npq} = \sqrt{2 \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{8} \times 80} = 4,18$ .

Toute limitation de cette indépendance doit tendre à étaler la courbe et à abaisser son sommet. Elle doit tendre à augmenter la valeur de l'unité d'écart  $\sigma$ . Cet accroissement doit être proportionnel à la grégarité, et doit pouvoir servir à la mesurer.

Notre courbe expérimentale était bien un peu plus étalée et moins saillante que la courbe théorique. J'ai donc essayé d'établir par approximations quelle devait être, dans le cas de notre expérience, la valeur réelle de l'unité d'écart. J'ai constaté qu'elle devait être supérieure à 5, et un peu inférieure à 6, au lieu de 4,18 dans le cas de l'indépendance parfaite. La valeur 5,7 m'a donné une bonne correspondance avec la courbe expérimentale. C'est ce qui apparaît sur la figure que je reproduis à la même échelle que notre précédent graphique, en laissant en pointillés la courbe expérimentale et en traçant en trait plein la courbe théorique correspondant à l'unité d'écart = 5,7.



M. Hémar m'a fait remarquer que, si l'on pouvait utiliser, pour l'unité d'écart  $\sigma$ , la valeur  $\sqrt{2 pqn}$ , dans le cas où les têtards seraient parfaitement indépen-

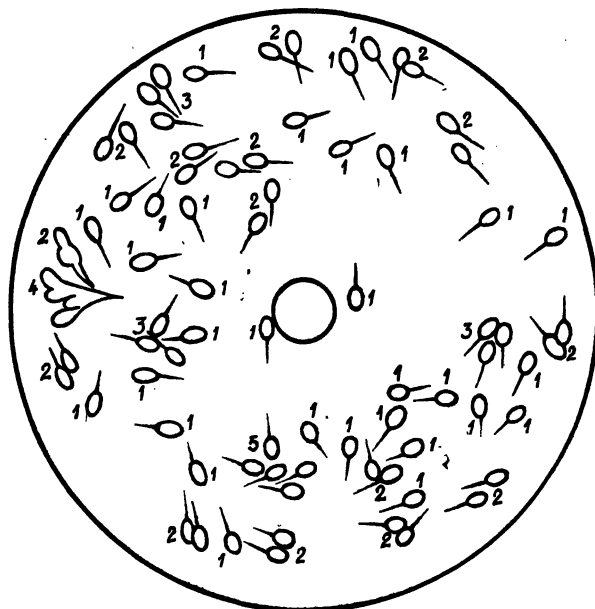


dants, il fallait utiliser la valeur  $\sigma = \sqrt{2 pq (n_1 + 2n_2 + \dots + rn_r + \dots)}$  dans le cas où il y aurait, non seulement  $n_i$  têtards isolés, mais aussi de petits groupes de 2, 3, ...,  $r$ , ..., têtards. Voilà une façon précise de mesurer la grégarité des animaux.

J'ai voulu appliquer à mes têtards la formule que me donnait M. Hémar. Sur un de nos clichés, agrandi, j'ai essayé de repérer les têtards isolés et les têtards groupés par 2, 3, ..., ou  $r$ ... Cette appréciation est assez subjective. Comme l'espace attribué aux têtards était relativement limité, ils pouvaient très bien se trouver voisins les uns des autres sans faire partie d'un groupe par influence réciproque. De même un gaz un peu comprimé n'est pas à l'état gazeux parfait. J'ai pris comme règle de considérer comme groupés soit les têtards qui nageaient parallèlement, soit ceux qui convergeaient vers un même point, en admettant que ce parallélisme et cette convergence pouvaient signifier l'action d'une influence mutuelle. Mon étude, ne portant que sur un seul de nos 150 clichés, ne peut d'ailleurs donner qu'une simple indication.

Entre les têtards, les liens sont, de toute façon, très lâches. Les petits groupements ne peuvent être qu'éphémères; ils doivent se former et se disperser rapidement. Une foule de têtards diffère peu de la foule parfaite. Elle ressemble à un gaz qui tendrait un peu vers l'état liquide. On voit par quelle sorte de mathématique il faut aborder l'étude de l'état liquide.

Sur mon cliché, j'ai trouvé, comme le montre le décalque que je reproduis,



32 têtards isolés, marqués d'un signe 1, 15 groupes de 2, 3 groupes de 3, 1 groupe de 4, et 1 groupe de 5. La valeur expérimentale de  $\sigma$  est donc, dans ce cas :  $\sqrt{2 \times 1/8 \times 7/8 \times (32 + 30 \times 2 + 9 \times 3 + 4 \times 4 + 5 \times 5)} = \sqrt{0,22 \times 160} = \sqrt{35,2}$  L'unité d'écart est donc égale à 5,94. Cet ordre de grandeur ne diffère pas excessivement de la valeur 5,7.

En étudiant la foule des têtards, non plus comme une foule parfaite dont tous les constituants soient parfaitement indépendants les uns des autres, mais en tenant compte de leur légère tendance à se grouper, on trouve une unité d'écart voisine de 6 qui représente mieux les faits que l'unité 4,18, celle de l'indépendance parfaite et de l'aléatoire pur.

En résumé, la foule des têtards n'est pas parfaite, mais elle diffère peu de la perfection. Elle est faite, en effet, soit d'individus indépendants, soit de petits groupes indépendants. La tendance associative est minime. Elle est suffisante pour éloigner la foule d'un état aléatoire pur. Tant il est vrai que l'aléatoire est une manifestation de l'indépendance.

P. VENDRYÈS

---