

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

RENÉ RISSER

A propos de l'application de la loi de Gauss

Journal de la société statistique de Paris, tome 91 (1950), p. 210-218

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1950__91__210_0

© Société de statistique de Paris, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

II

A PROPOS DE L'APPLICATION DE LA LOI DE GAUSS

Permettez-moi, avant d'aborder mon exposé, d'exposer les hypothèses qui sont à la base de la loi de Laplace-Gauss, et qui ont permis de la justifier; cette justification présentée par Laplace, reprise par Poincaré, a été précisée d'une façon complète par M. Paul Lévy (1).

On suppose que l'on peut donner un sens correct au terme « erreur d'observation », ce qui revient à dire que la grandeur soumise à l'expérience a une vraie valeur.

(1) Voir son traité de calcul des probabilités. (Voir également l'étude de LINDBERG, *Mathematische Zeitschrift*, t. XV, 1922, p. 211-225.)

Les hypothèses fondamentales consistent :

1° En ce que l'erreur étudiée ε est considérée comme la résultante d'erreurs élémentaires ε_i en nombre très grand, et à la prendre égale à $\varepsilon = \sum \varepsilon_i$ (et non à $\sum \alpha_i \varepsilon_i$);

2° A assimiler les ε_i à des variables aléatoires ayant chacune leur loi de probabilité et à supposer toutes ces erreurs ε_i indépendantes.

En désignant sous le vocable d'erreur systématique l'espérance mathématique de ε , on remarque alors que l'on obtient par soustraction une nouvelle erreur dont l'espérance mathématique ou valeur probable est nulle; de plus imaginons — après avoir d'ailleurs donné un sens convenable aux ε_i — que ces quantités soient dépourvues d'erreur systématique, on trouve alors définitivement une expression de l'erreur d'observation où n'apparaissent que des erreurs accidentelles.

Grâce à l'introduction de la fonction caractéristique $\sum p_m e^{itx_m}$ et des erreurs élémentaires réduites, c'est-à-dire rapportées à leurs écarts respectifs σ_i , on constate que le logarithme de la fonction caractéristique a pour valeur

$$\bar{\psi}_t = -\frac{t^2}{2} \left[1 + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma'} \right)^2 \lambda_i \left(\frac{\sigma_i t}{\sigma'} \right) \right]$$

où

$$\sigma' = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} \sigma_i^2}$$

Or si le terme complémentaire de la parenthèse devient infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, on obtiendra une loi réduite voisine de celle de Laplace-Gauss.

Cette éventualité se produit, si aucune des quantités ε_i n'est prépondérante, alors que les lois des erreurs composantes sont différentes; nous aboutirions au même résultat s'il y avait une erreur prépondérante suivant la loi de Gauss.

Rien de tout cela ne subsiste, si parmi les erreurs élémentaires il en est une ε_j prépondérante s'écartant notamment de la loi de Gauss.

Rappelons maintenant une série de formules fondamentales déduites de l'expression de la loi de Gauss, à laquelle répond la probabilité pour qu'une erreur soit comprise entre x et $(x + dx)$, soit $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$, formules se rapportant à l'écart moyen E_m , à l'écart quadratique E_q et enfin à l'écart probable E_p :

$$E_m = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-h^2 x^2} dx = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

$$E_q^2 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-h^2 x^2} dx = \frac{1}{2h^2}, \quad E_p = \frac{1}{h\sqrt{2}};$$

quant à la notion de l'écart probable η ou E_p , on l'introduit en faisant appel à l'équation

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(hx - \frac{1}{3} \frac{(hx)^3}{1} + \frac{1}{5} \frac{(hx)^5}{2!} + \dots \right)$$

dont la résolution donne :

$$h \eta = h E_p = 0,4769.$$

De ces relations donnant les valeurs de E_m , E_q et E_p , l'on déduit

$$(1) \quad E_p = 0,6745 E_q, \quad E_p = 0,8453 E_m, \quad \frac{E_q}{E_m} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

On pourrait de plus faire apparaître d'autres critères afférents aux rapports suivants :

$$\frac{\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^p e^{-h^2 x^2} dx}{\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-h^2 x^2} dx}, \quad \frac{\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^p e^{-h^2 x^2} dx}{\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-h^2 x^2} dx}, \quad \text{avec } p = (3, 4, \dots);$$

nous n'utiliserons dans la suite que ceux fournis par les relations (1).

Signalons enfin que l'examen de la table des valeurs de l'intégrale P définie par $P = \frac{h}{\sqrt{\eta}} \int_{-x}^{+x} e^{-h^2 x^2} dx$, où l'argument d'entrée est pris égal à $\frac{x}{E_p}$ montre que l'on a pour :

$\frac{x}{E_p} =$	0	1	2	3	4
P =	0	0,500	0,823	0,957	0,993

Cela revient à dire que dans une bande AA' un écart probable au-dessus et au-dessous de la valeur moyenne x' , on trouve 500 observations sur 1.000,

D

C

B

A

A'

B'

C'

D'

x' x
 dans une bande BB' de deux écarts probables 823 observations, dans une bande CC' de trois écarts probables 957 observations, et dans une bande DD' de quatre écarts probables 993 observations; les 7 observations restantes seraient réparties au-dessus et au-dessous des droites limitant les 4 écarts probables au-dessus et au-dessous de la valeur moyenne.

On peut donc dire, — si l'on assimile les expériences à un tir au canon par exemple, — qu'on trouverait dans un tir indéfiniment prolongé dans les bandes

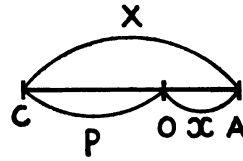
A.B.C.D. les nombres respectifs de coups.

250, 161, 67, 18 sur 1.000 coups, ou à très peu près,
25, 16, 7, 2 sur 100 coups.

On peut donc — en s'inspirant de la méthode qui vient d'être exposée — vérifier d'une manière rapide qu'une distribution statistique vérifie la loi de Gauss; c'est cette méthode qui a servi de thème à une question posée aux examens écrits de l'Institut des actuaires français en 1923 (Voir Bulletin n° 103, 1920).

Il est un autre mode de vérification expérimentale de la loi de Gauss, dû au commandant Henry, qui professa en 1892 la balistique tant intérieure qu'extérieure à l'École d'Application de l'Artillerie et du Génie à Fontainebleau, ainsi que le calcul des probabilités; voici le principe de cette méthode aujourd'hui classique.

Supposons que nous examinons les grandeurs des portées réalisées au cours d'un tir balistique (tir d'un projectile donné avec une charge déterminée sous un angle donné (1) et désignons par p la probabilité d'avoir non un écart x , mais une portée inférieure à X . Si la pièce est en C, la portée vraie P étant C O, et l'écart x étant mesuré à partir de O, on sait que :



$$(3) \quad p = \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-k^2 x^2} dx,$$

en admettant que les écarts suivent la loi de Gauss, et que le point de chute A correspondant à X soit à droite de O.

En posant $t = kx$ et remplaçant x par $(X - P)$, on voit de suite que les valeurs de t et de p s'écrivent ainsi qu'il suit :

$$(4) \quad t = k (X - P) \quad (3) \quad p = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$$

A une valeur arbitraire X_1 de X, correspond le pour cent des coups qui sont courts par rapport à X, c'est-à-dire la grandeur p_1 , et par suite la valeur t_1 afférente à p_1 .

On peut donc sur un graphique marquer les points définis par (t_i, X_i) avec $i = (1, 2, 3... n)$, et l'on remarque immédiatement que si la loi de Gauss s'applique, les points en question se trouvent sur une droite de coefficient angulaire k dont l'abscisse à l'origine est égale à la portée vraie P. Le graphique donne donc le module de précision et la grandeur P avec une approximation suffisante, ainsi que l'écart probable et l'écart moyen.

Si la fonction $p(X)$ est définie mathématiquement, ou fait apparaître la loi de Gauss approchée en construisant la courbe C définie par l'équation (3), soit :

$$p(X) = \frac{1 + \Theta [k(X - P)]}{2}$$

et en traçant la droite H qui s'en écarte le moins.

On peut, d'une part, évaluer l'erreur commise ϵ sur $p(X)$, en faisant cette approximation, et, d'autre part, apprécier l'écart algébrique α entre la droite et la courbe, et l'on a — en supposant α très petit.

$$\epsilon = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Si n est trop petit, la méthode de Henry ne peut être utilisée avec efficacité; néanmoins si l'on a plusieurs séries de n déterminations, portant sur des gran-

(1) La méthode s'applique aussi bien à des mesures de longueurs, de tailles, d'angles, etc..

deurs analogues à X , mais dont les droites de Henry peuvent varier, on peut faire une vérification intéressante basée sur le procédé suivant dû au commandant Lhoste.

En effet, si l'on pose :

$$(5) \quad \xi = \frac{\Sigma x_i}{n}, S = \sqrt{\Sigma (x_i - \xi)^2}, \quad \mathcal{X}_i = \frac{\sqrt{n} (x_i - \xi)}{S},$$

et si l'on remarque que les nouvelles variables ne changent pas, lorsque l'on effectue sur les x_i une substitution linéaire quelconque, on constate que l'on peut remplacer tous les \mathcal{X}_i par les y_i correspondants.

Le calcul montre que la probabilité pour que l'un quelconque des \mathcal{X}_i soit compris entre \mathcal{X} et $\mathcal{X} + d\mathcal{X}$ est :

$$\varphi_n(\mathcal{X}) d\mathcal{X} = \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \frac{1}{2^{n-2}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \left(1 - \frac{\mathcal{X}^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} d\mathcal{X}$$

On peut alors réunir tous les \mathcal{X}_i des différentes séries, et vérifier que leur fréquence est conforme à cette loi; toutefois, ce mode de vérification exige que toutes les séries comprennent le même nombre de mesures.

J'ai choisi à dessein des expériences faites dans des commissions d'expériences se rapportant à des tirs d'un nombre limité de coups effectués avec le canon de 75; ce sont les résultats de ces tirs que nous allons analyser.

Si j'ai été amené à faire un tel choix, cela tient que peu de temps après la guerre de 1914-1918, certains auteurs ont considéré comme illégitime l'application du calcul des probabilités aux règles du tir, et cela en raison du nombre de coups relativement restreint de chaque expérience; certains même ont nié l'existence d'une loi de dispersion quelle qu'elle fut et ont par suite contesté qu'on pût appliquer la loi de Gauss au tir.

Avant de procéder à l'étude critique, il est utile de donner quelques indications sur le calcul des trajectoires appliqué à la confection des tables de tir.

Le point moyen d'un tir exécuté dans des conditions identiques dépend, toutes choses égales d'ailleurs, des éléments atmosphériques, température, pression et vent; il importe donc de définir les conditions types pour l'établissement des tables de tir, quitte à donner ensuite le moyen de passer de ces conditions à d'autres conditions bien définies.

On a adopté les conditions types suivantes :

- 1° Température au sol 15°,
- 2° Pression atmosphérique 750 mm,
- 3° État hygrométrique 3/4.

A ces trois conditions correspond pour le poids du mètre cube d'air à l'altitude 0, la valeur 1 kg 208;

4° Coefficient h de décroissance de densité de l'air avec l'altitude :

$$h = 10^{-4}$$

- 5° Vent nul, c'est-à-dire atmosphère calme;
- 6° Canon neuf.

Obus 1900.

Obus 1917.

	5°	10°	15°	25°	35°	5°	10°	15°	25°	35°	5°	10°	15°	25°	35°
Angle de tir.															
Portée dépuillée.	3.523	5.599	6.966	7.009	9.250	9.010	10.384	10.492	2.799	2.840	4.493	5.560	5.642	7.172	8.069
Portée des tables.	3.592	5.595	7.154	7.154	9.403	9.403	10.758	10.758	2.884	2.884	4.492	5.602	5.602	7.168	
Zone totale de dispersion.	140 ^m	130 ^m	225 ^m	303 ^m	370 ^m	500 ^m	440 ^m	633 ^m	107 ^m	106 ^m	141 ^m	223 ^m	230 ^m	1.942 ^m	522 ^m
Écart probable en portée.	22,9	23,1	36,2	68,7	50,9	95,5	74,8	97,5	15	18	19,7	33,5	35,2	48,9	84,5
Écart probable des tables.	14,2	27,8	41	41	61	61	76	76	11,9	11,9	16,2	20,5	20,5	29,6	
	4	2	0	0	4	0	2	2	8	0	2	2	0	2	0
	4	10	4	14	4	6	10	8	6	6	8	4	10	6	2
	12	16	24	14	14	22	18	10	10	21	12	22	14	16	26
Répartition des points de chute en % sur des bandes distantes de 1 écart probable.	28	26	24	18	24	28	23	28	21	23	29	29	30	30	32
	22	22	26	24	26	14	21	30	33	24	23	15	24	20	20
	26	14	14	30	22	22	18	14	14	18	14	14	12	20	8
	4	8	2	0	2	8	6	6	4	8	10	12	6	6	8
	0	2	6	0	2	0	2	2	4	0	2	2	4	0	4
Écart probable en portée, en % de la portée.	0,65	0,41	0,51	0,91	0,55	1,06	0,72	0,93	0,53	0,63	0,44		0,62	0,68	1,05
Écart probable en direction, en % de la portée.	1,2	3,2	3,5	1,9	3,8	5,6	7,6	0,1	0,8	1,0	2,2		4,1	3,6	6,8
Écart probable en direction des tables.	2	3	4	4	5	5	6	6	0,7	0,7	2,3		3,4	5,5	

Je n'entrerai pas dans le détail de l'établissement des tables de tir qui renferment des renseignements qui sont le résultat de la coopération de la théorie simplifiée du mouvement du projectile et de l'expérience. La façon dont elles sont établies permet de penser que le résultat obtenu est satisfaisant, c'est-à-dire qu'il y a bon accord entre la théorie et l'expérience. Mais pour cela, il est de toute nécessité que les expériences ou tirs balistiques soient exécutés avec toute la précision désirable, et en nombre suffisant pour atténuer les erreurs.

Il est utile de rappeler qu'elles se rapportent à un canon neuf, et que le fait d'utiliser un canon dont on ne connaît pas le régime, des munitions mal confectionnées ou conservées dans des conditions médiocres, surtout au point de vue de l'humidité, ou encore le fait d'opérer dans des conditions atmosphériques mal définies, peut conduire à des écarts exagérés qu'on ne saurait leur imputer.

Le calcul a donné à peu près tout ce qu'il veut donner; il serait vraisemblablement sans intérêt pratique de lui demander plus de précision.

Ceci étant, appliquer la loi de Gauss au tir revient à admettre :

1° Que la valeur la plus probable de la portée correspondant à un angle donné, est la moyenne des portées réalisées par les différents coups tirés avec cet angle;

2° Qu'il y a une courbe de dispersion, c'est-à-dire que la probabilité d'un écart donné est uniquement fonction de la valeur de cet écart.

Le cours de probabilités du tir, professé en 1892 par le commandant Henry de l'École d'Application de l'Artillerie et du Génie, donne des exemples de tir de 8 groupes de 1.000 balles; l'examen de ces exemples permet de constater que la dispersion du tir suit une loi et que celle-ci est très voisine de la loi de Gauss.

Avec 8 courbes de distribution, le commandant Henry a substitué le tracé de 8 droites, en utilisant la méthode fort ingénieuse exposée ci-dessus.

Nous devons rappeler que l'estimation correcte de la valeur moyenne m est évidemment la moyenne arithmétique X .

$$m = \frac{\sum x}{n} = X,$$

et que l'estimation absolument correcte de la variance est définie par la relation.

$$\mu'_2 = \sigma'^2 = \frac{\sum (x - X)^2}{n - 1}.$$

Ceci étant, nous allons présenter les résultats de tir avec un canon de 75 :

1° De 8 séries de 50 coups chacune avec obus du type 1917 armé de la fusée R Y 1917;

2° De 7 séries de 50 coups chacune, avec obus du type 1900 armé de la fusée R Y 17.

RÉPARTITION DES POINTS DE CHUTE

OBUS 1917 Ensemble des 8 séries	OBUS 1900 Ensemble des 7 séries	ENSEMBLE des 15 séries	MOYENNES générales	TOTAUX DONNÉS par l'application de la loi de Gauss	MOYENNES Loi de Gauss
14	14	28	1,9	30	2
60	42	102	6,8	105	7
130	121	257	16,7	240	16
199	194	393	26,2	375	25
187	159	346	23,1	375	25
160	100	260	17,3	240	16
36	54	90	6	105	7
14	16	30	2	30	2
800	700	1.500	100	1.500	100

L'examen des tableaux qui précèdent montre que la dispersion des 400 obus de 75 modèle 1917, est caractérisée par les éléments suivants :

1,75	7,50	16,25	24,375	23,375	20,	4,5	1,75
1,8	7,	16,	25,	25,	16,	7,	1,8

Alors que la dispersion théorique est représentée par.

quant à la dispersion en portée de 350 obus modèle 1900, elle est définie par les chiffres :

2,	6,	17,28	27,71	22,71	14,28	7,71	2,28
----	----	-------	-------	-------	-------	------	------

La dispersion expérimentale accusée par l'ensemble de 1.500 coups qui fait apparaître les moyennes.

1,9 6,8 16,7 26,2 23,1 17,3 6,2

est assez voisine de la dispersion théorique.

En définitive, on peut dire que les tirs effectués tant avec le matériel de 75 qu'avec des matériels différents, nous confirment dans l'idée que le calcul des probabilités peut être appliqué aux règles du tir, alors même que le nombre de coups tirés n'est pas élevé et, par suite, affirmer que les critiques qui ont été formulées à ce sujet sont sans valeur.

René RISSER.

**Note complémentaire sur la recherche de l'approximation
avec laquelle une grandeur obéit à la loi de Gauss.**

On suppose connues des déterminations expérimentales x_1, x_2, \dots, x_n de la grandeur x , on les range par ordre de grandeur croissante, et l'on désigne par x_i l'une quelconque d'entre elles.

Pour toute valeur x , comprise entre x_i et x_{i+1} , il y a i déterminations inférieures à x , de sorte que la fréquence est égale à $\frac{i}{n}$. La valeur correspondante

y_i de y , est donnée par l'équation : $\Theta(y_i) = \frac{2i}{n} - 1$, si l'on introduit la probabilité empirique. Ceci étant, on trace le segment $M_i N_i$, dont les coordonnées extrêmes sont (x_i, y_i) (x_{i+1}, y_i) , puis l'escalier construit à l'aide de tous les segments $M_i N_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$); on réalise ainsi l'escalier représentatif des expériences. On procède ensuite au tracé de la droite compensatrice.

A chaque valeur de x correspond une erreur ε ; si la grandeur x obéit à la loi de Gauss, cette erreur n'est pas forcément petite, surtout si le nombre des expériences est peu élevé.

Admettons que la droite de Henry ainsi tracée représente rigoureusement la loi de probabilité cherchée, et désignons par p la probabilité pour qu'une mesure faite au hasard soit plus petite que x , et par q la probabilité complémentaire.

On a effectué n mesures, et constaté qu'il y en a i inférieures s à x . L'écart relatif à $\varepsilon = \left(\frac{n}{i} - p\right)$ obéit approximativement à la loi de Gauss, avec l'unité d'écart $u = \sqrt{\frac{2pq}{n}}$, à la condition que n soit assez grand.

Il résulte de là que la probabilité *a priori* pour que l'erreur fût inférieure à l'erreur réalisée expérimentalement ε est $\Theta\left(\frac{\varepsilon}{u}\right)$; le calcul effectué pour les divers points de la droite de Henry permet d'avoir une idée de l'approximation avec laquelle la grandeur x obéit à la loi de Gauss.

R. RISSER.

DISCUSSION

M. André LEFÈVRE. — Les résultats indiqués dans l'étude de M. Risser ne sont que dans la mesure où les épreuves sont indépendantes les unes des autres. Il n'en est plus de même actuellement dans certains tirs d'artillerie où les pointages et leurs corrections sont réalisés automatiquement, ou bien lorsque l'on se sert de procédés modernes de tirs rapides et multiples, tels que ceux réalisés par des « Roquettes » groupés sur tubes de lancement. Il serait intéressant d'étudier dans quelle mesure la loi de répartition de Gauss leur est applicable.