JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

J.-J. BOULANGER

La fonction « Utilité totale collective »

Journal de la société statistique de Paris, tome 117 (1976), p. 132-138

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1976__117__132_0>

LA FONCTION « UTILITÉ TOTALE COLLECTIVE »

Dans cette étude l'auteur analyse certaines conditions d'existence d'une fonction « Utilité totale » pour un groupe de consommateurs et en déduit diverses caractéristiques pour la fonction « Utilité totale collective » dans le cas d'un optimum économique.

In this paper the author analyses some conditions of a total utility function for a group of consumers and deducts some characters for the collective total utility function in the case of an economic optimum.

In dieser Studie analysiert der Verfasser gewisse Bedingungen für die Existenz einer Funktion « vollkommene Nützlichkeit » für eine Gruppe von Verbrauchern und leitet daraus verschiedene Charakteristika fur die Funktion « vollkommene kollektive Nützlichkeit » ab für den Fall eines okonomischen Optimums.

La fonction « Utilité totale individuelle » est à la base des décisions de dépenses et d'épargne individuelles. Rappelons les diverses caractéristiques de cette fonction dans le cas d'un optimum.

On suppose que les besoins et satisfactions d'un consommateur sont représentés par une fonction « Utilité totale » $u\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, E)$, x_i étant la quantité de biens i achetée au prix p_i avec un revenu mensuel par unité de consommation R. On a :

$$x_1p_1 + \ldots + x_np_n + E = M + E = R, \tag{1}$$

M représentant la part du revenu R qui est dépensée et E celle qui est épargnée.

La recherche d'une « utilité totale » maxima sous réserve de la relation (1) (R étant supposé constant), conduit à maximiser la fonction $u + \lambda\;(R - \sum_{i=1}^{n} p_i\,x_i - E)$, λ étant un multiplicateur de Lagrange; d'où, en posant $u_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ et $u_E = \dfrac{\partial u}{\partial E}$,

les conditions d'optimum :

$$\left|\begin{array}{l} u_1 - \lambda p_1 = 0 \\ u_2 - \lambda p_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n - \lambda p_n = 0 \\ u_E - \lambda \quad = 0, \end{array}\right. \tag{2}$$

ou encore : $\dfrac{u_1}{p_1} = \dfrac{u_2}{p_2} = \cdots = \dfrac{u_n}{p_n} = \dfrac{u_E}{1} = u_M = u_R = \lambda.$

On a en effet :

$$\lambda = \frac{u_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + u_n \mathrm{d}x_n}{p_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + p_n \mathrm{d}x_n} = \frac{\partial u}{\partial M} = u_M \; (\mathrm{d}E = 0)$$

et

$$\lambda = \frac{u_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + u_n \mathrm{d}x_n + u_E \mathrm{d}_E}{p_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + p_n \mathrm{d}x_n + \mathrm{d}_E} = \frac{\partial u}{\partial R} = u_R,$$

u_M, u_E, u_R étant les utilités marginales du Revenu dépensé, du Revenu épargné et du Revenu total, et λ l'utilité marginale de la monnaie.

En différenciant totalement les équations (1) et (2) [1] et en posant :

$$U = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & \ldots & u_n & u_E \\ u_1 & u_{11} & \ldots & u_{1n} & u_{1E} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n & u_{n1} & \ldots & u_{nn} & u_{nE} \\ u_E & u_{E1} & \ldots & u_{En} & u_{EE} \end{vmatrix} \quad \left(\text{avec } u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

U_i étant le mineur de u_i et U_{ij} étant le mineur de u_{ij}, on obtient à l'optimum :

$$\boxed{\frac{\partial x_j}{\partial R} = \lambda \frac{U_j}{U} \quad \text{et} \quad \frac{\partial E}{\partial R} = \lambda \frac{U_E}{U}} \tag{3}$$

et

$$\boxed{\frac{\partial x_j}{\partial p_i} = -\lambda x_i \frac{U_j}{U} + \lambda \frac{U_{ji}}{U} \quad \text{et} \quad \frac{\partial_E}{\partial p_i} = -\lambda x_i \frac{U_E}{U} + \lambda \frac{U_{Ei}}{U}} \tag{4}$$

On a d'autre part :

$$\frac{\partial u}{\partial R} = \lambda = u_R \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial p_i} = -\lambda x_i, \tag{5}$$

d'où, en posant : $\mathrm{d}I = \dfrac{x_1 \mathrm{d}p_1 + \ldots + x_n \mathrm{d}p_n}{x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n}$

(e^I étant un indice de prix continu spécifique du consommateur) :

$$\frac{\partial U}{\partial I} = -\lambda M, \tag{6}$$

d'où : $\dfrac{\partial \lambda}{\partial I} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial R \partial I} = -\dfrac{\partial(\lambda M)}{\partial R}$ (6 *bis*) et $\boxed{du = \lambda dR - \lambda M dI}$ (7)

ce qui signifie qu'à l'optimum u n'est fonction que de R et de I.

Pour poursuivre l'analyse de la fonction « Utilité totale individuelle » les hypothèses assez générales suivantes ont été faites [2] :

$$u_{MM} = \frac{\partial^2 u}{\partial M^2} = -\frac{[c + (a-c)e^{2I}]R + be^{3I}}{R^3},$$
$$u_{EE} = \frac{\partial^2 u}{\partial E^2} = -\frac{cR + de^{3I}}{R^3} \quad \text{et} \quad u_{ME} = \frac{\partial^2 u}{\partial M \partial E} = -\frac{cR + be^{3I}}{R^3}, \tag{8}$$

formules qui se simplifient en cas de fixité des prix ($I = 0$) en

$$u_{MM} = -\frac{aR + b}{R^3}, \quad u_{EE} = -\frac{cR + d}{R^3} \quad \text{et} \quad u_{ME} = -\frac{cR + b}{R^3}$$

1. Voir : *Journal de la Société de statistique de Paris*, n° 4, 1973 : Utilité marginale de la monnaie et Utilité totale, par J.-J. Boulanger, p. 334.
2. *Journal de la Société de statistique*, n° 4, 1973, p. 345.

Les hypothèses (8) sont équivalentes aux hypothèses :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial R} = - c\left[\frac{1}{R^2} + \frac{Be^{3I}}{R^3}\right] \quad \text{et} \quad M = R'_d e^I \mathcal{L}\left(1 + \frac{R}{R'_d e^I}\right), \tag{9}$$

($\mathcal{L}$ = logarithme népérien) dans lesquelles R est le Revenu mensuel nominal par unité de consommation, e^I l'indice des prix spécifique du consommateur, R'_d égal à $\dfrac{d-b}{a-c}$, c une constante spécifique du consommateur et $\dfrac{Be^{3I}}{R^3}$ un terme correctif.

De l'équation (6 *bis*) :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial I} = -\frac{\partial(\lambda M)}{\partial R} = -\lambda\frac{\partial M}{\partial R} - M\frac{\partial\lambda}{\partial R}$$

on obtient en dérivant par rapport à R :

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial R\partial I} = -\lambda\frac{\partial^2 M}{\partial R^2} - 2\frac{\partial\lambda}{\partial R}\cdot\frac{\partial M}{\partial R} - M\frac{\partial^2\lambda}{\partial R^2},$$

d'où λ, puisque les autres termes se déduisent des équations (9). D'où pour 3 valeurs de R par unité de consommation : 250 F, 1 000 F et 4 000 F (il s'agit d'une étude remontant à plusieurs années depuis laquelle il y a eu une amélioration du standard de vie et surtout beaucoup d'inflation) :

$R =$ 250 F	$\lambda = 4{,}28c \cdot 10^{-3}$	$\lambda R = 1{,}07c$ F
$R =$ 1 000 F	$\lambda = 1{,}23c \cdot 10^{-3}$	$\lambda R = 1{,}23c$ F
$R =$ 4 000 F	$\lambda = 0{,}42c \cdot 10^{-3}$	$\lambda R = 1{,}68c$ F,

c étant une constante spécifique du consommateur, qui dans le cas d'un seul consommateur peut être prise égale à 1, puisque λ n'est connu qu'à un facteur près.

Passons maintenant à la fonction « Utilité totale collective ». Une fonction « Utilité totale collective » u peut être conçue comme la somme de N fonctions « Utilité totale individuelle » u_y relatives à N consommateurs y. Supposons qu'aucun bien n'est rationné et qu'il n'y a aucune restriction aux importations d'un bien dont la production est déficitaire. Dans ces conditions chaque consommateur y dispose d'un revenu R_y, en dépense une partie M_y et épargne l'autre partie E_y au mieux de ses préférences, donc u_y est maximum. La somme de N fonctions u_y maxima est elle-même maxima. Mais rien ne prouve que la fonction u, somme des fonctions u_y, s'exprimera uniquement en fonction des X_1, X_2, ..., X_n et de E, sommes des achats des N consommateurs : $X_1 = \sum_{y=1}^{N} x_{1y}, \ldots, X_n = \sum_{y=1}^{N} x_{ny}$ et des épargnes $E = \sum_{y=1}^{N} E_y$, au voisinage de l'optimum.

D'une manière générale on dira qu'un groupe de N consommateurs est un ensemble homogène relativement aux achats qu'il fait en bien i, si les consommateurs se répartissent en fonction de leurs achats en bien i selon une courbe de Gauss.

Considérons un groupe homogène de consommateurs dont le revenu par unité de consommation est compris entre deux limites R_1 et R_2. On peut admettre en première approximation que l'accroissement de la consommation de bien i par le consommateur y [1] s'écrit sous la forme :

$$\Delta x_{iy} = \overline{\Delta x_i}\left[1 + a_{1i}\left(\frac{R_y}{\overline{R}} - 1\right) + a_{2i}t_{iy}\right]$$

1. Pour être tout à fait précis il s'agit d'un accroissement de consommation par unité de consommation.

sachant que :

— $\overline{\Delta x_t}$ est la moyenne des Δx_{ty} pour l'ensemble des consommateurs du groupe,

— $\overline{R}$ le revenu moyen par unité de consommation,

— a_{1t} et a_{2t} deux constantes,

— et que t_{ty} suit une loi réduite, gaussienne ou non gaussienne, donc que l'on a :

$$(t_{ty}) = 0.$$

Nous allons supposer d'autre part que le produit $\lambda_y R_y$ peut s'écrire sous la forme :

$$\lambda_y R_y = \overline{\lambda R}\,[1 + b_1 \left(\frac{R_y}{\overline{R}} - 1\right) + b_2 t_y]$$

sachant que :

— $\overline{\lambda R}$ est la moyenne des produits $\lambda_y R_y$ pour le groupe de consommateurs considéré,

— $\overline{R}$ le revenu moyen par unité de consommation,

— b_1 et b_2 deux constantes,

— et que t_y suit une loi réduite, gaussienne ou non gaussienne, donc avec $E\,[t_y] = 0$.

Nous avons vu plus haut que, avec les hypothèses faites sur les u_{MM}, u_{EE}, u_{ME}, le produit $\lambda_y R_y$ varie peu en fonction de R_y. En effet pour un consommateur, donc une valeur de c, λR passe de 1,07 c à 1,68 c, soit une augmentation de 57 % quand R passe de 250 F à 4 000 F, donc est multiplié par 16. L'augmentation est même plus faible pour les revenus modestes puisque le produit λR passe de 1,07 c à 1,23 c, soit une augmentation de 15 %, quand R passe de 250 F à 1 000 F, donc est multiplié par 4.

Considérons un groupe de consommateurs appartenant à la tranche de revenus 250 F-1 000 F (par unité de consommation) et supposons que dans cette tranche on a en moyenne $\frac{\Delta(\lambda R)}{\lambda R} = k\,\frac{\Delta R}{R}$. λR est en moyenne multiplié par $\frac{1{,}23}{1{,}07} = 1{,}15$ quand R passe de 250 F à 1 000 F. Il est donc multiplié par $\sqrt{1{,}15} = 1{,}075$ quand R passe de 500 F à 1 000 F, donc quand R est doublé. Il est donc multiplié par 1,04 quand R est multiplié par $\sqrt{2} \# 1{,}40$, donc augmente de 40 %. λR augmente donc en moyenne de 5 % quand R augmente de 50 %, donc λR passe de 0,975 $\overline{\lambda R}$ à 1,025 $\overline{\lambda R}$ quand R passe de 0,8 $\overline{R}$ à 1,2 $\overline{R}$ ($\overline{R}$ étant la valeur moyenne de l'intervalle considéré).

Comme on a supposé que l'on a en moyenne $\frac{\lambda_y R_y - \overline{\lambda R}}{\overline{\lambda R}} = k\,\frac{R_y - \overline{R}}{\overline{R}}$

on en déduit : $0{,}025 = k \cdot 0{,}2$ d'où $k = 0{,}125$ d'où $b_1 = 0{,}125$ d'où :

$$\lambda_y R_y = \overline{\lambda R}\,[0{,}875 + 0{,}125 - \frac{R_y}{\overline{R}} + b_2 t_y]$$

Or, t_y correspondant à un facteur émotionnel individuel, il n'y a aucune raison pour que R_y et t_y soient liés. Dans ces conditions on peut éliminer pour l'intégration le terme $b_2 t_y$,

d'où :
$$\lambda_y = \overline{\lambda R}\left[\frac{0{,}875}{R_y} + \frac{0{,}125}{\overline{R}}\right]$$

et la valeur moyenne de λ_y est obtenue très simplement par :

$$\overline{\lambda} = \frac{\overline{\lambda R}}{\int_{0,8\overline{R}}^{1,2\overline{R}} dR_y} \cdot \int_{0,8\overline{R}}^{1,2\overline{R}} \left(\frac{0{,}875}{R_y} + \frac{0{,}125}{\overline{R}}\right) dR_y = \frac{\overline{\lambda R}}{0{,}4\,\overline{R}}\,[0{,}875\,\mathcal{L}\left(\frac{1{,}2}{0{,}8}\right) + 0{,}125 \cdot 0{,}4] \# 1{,}01\,\frac{\overline{\lambda R}}{\overline{R}}$$

On a donc : $\overline{\lambda R} = \overline{\lambda} \cdot \overline{R}$ à 1 % près.

On obtient également $\overline{\lambda R} = \bar{\lambda} \cdot \bar{R}$ à 1 % près pour les revenus par unité de consommation situés dans la zone 1 000 F — 4 000 F et compris entre des valeurs $0{,}8\,\bar{R}$ et $1{,}2\,\bar{R}$.

Pour des tranches de revenu plus larges, variant du simple au double par exemple $\left(\frac{2}{3}\bar{R} < R < \frac{4}{3}\bar{R}\right)$, on obtient encore des résultats satisfaisants puisque l'on a $\overline{\lambda R} = \bar{\lambda} \cdot \bar{R}$ à 3 % près. Mais on doit tenir compte de ce que le calcul précédent de $\bar{\lambda}$ n'est qu'un calcul approché, le calcul rigoureux étant donné par

$$\bar{\lambda} = \frac{\overline{\lambda R}}{\int_{R=0,8\bar{R}}^{R=1,2\bar{R}} dN} \cdot \int_{R=0,8\bar{R}}^{R=1,2\bar{R}} \left(\frac{0{,}875}{R} + \frac{0{,}125}{\bar{R}}\right) dN \text{ avec } dN = f(R)\,dR,$$

si N est le nombre d'unités de consommation correspondant à la tranche de revenus $R_1 < R < R_2$. Dans la mesure où l'on peut admettre que $f(R)$ est égal à une constante L (et ceci sera d'autant plus vrai que l'intervalle R_1—R_2 est petit), on aura $dN \# L \cdot dR$, et l'on retrouve le calcul précédent et approché de $\bar{\lambda}$. Donc pour un domaine de variations de R suffisamment étroit on a $\overline{\lambda R} \# \bar{\lambda} \cdot \bar{R}$.

Naturellement des hypothèses sur u_{MM}, u_{EE} et u_{ME}, autres que les hypothèses (8), entraîneraient peut-être des conclusions différentes, mais les hypothèses (8) sont sans doute les seules à conduire à des calculs qui ne sont pas pratiquement inextricables.

L'accroissement de l'utilité totale du consommateur y, Δu_y, consécutif à la seule variation Δx_{iy} s'écrit (si u_{iy} est l'utilité marginale du bien i pour le consommateur y) :

$$\Delta u_y = u_{iy}\,\Delta\,x_{iy} = \lambda_y p_i\,\Delta\,x_{iy} \quad \text{(en raison des relations (2))}$$
$$= p_i\,\overline{\Delta x_i} \cdot \lambda_y \left[(1 - a_{1i}) + a_{1i}\frac{R_y}{\bar{R}} + a_{2i}\,t_{iy}\right]$$

puisque l'on a supposé :

$$\Delta x_{iy} = \overline{\Delta x_i}\left[1 + a_{1i}\left(\frac{R_y}{\bar{R}} - 1\right) + a_{2i}\,t_{iy}\right]$$

En sommant par rapport à y on obtient :

$$\Delta u = \sum_y \Delta u_y = p_i\,\overline{\Delta x_i}\,(1 - a_{1i}) \sum_y \lambda_y + p_i\,\overline{\Delta x_i} \cdot a_{1i}\,\frac{\sum_y (\lambda_y R_y)}{\bar{R}} + p_i\,\overline{\Delta x_i} \cdot a_{2i} \sum_y \lambda_y\,t_{iy}$$

Or on a $\Sigma\lambda_y = N \cdot \bar{\lambda}$, $\Sigma\lambda_y R_y \# N \cdot \bar{\lambda} \cdot \bar{R}$ et $\Sigma\lambda_y t_{iy} \# 0$ (car il est raisonnable de supposer λ_y et t_{iy} indépendants). D'où :

$$\Delta u = N p_i\,\overline{\Delta x_i}(1 - a_{1i})\bar{\lambda} + N p_i\,\overline{\Delta x_i} \cdot a_{1i} \cdot \bar{\lambda} = N p_i\,\overline{\Delta x_i} \cdot \lambda$$

Il en est de même pour tout autre accroissement $\overline{\Delta x_j}$. On a donc :

$$\Delta u = N\bar{\lambda}(p_1\,\overline{\Delta x_1} + \ldots + p_n\,\overline{\Delta x_n} + \overline{\Delta E})$$

Posons :

$$\Delta X_i = N\overline{\Delta x_i} = \sum_{y=I}^{N} \Delta x_{iy} \text{ et } \Delta E = N\overline{\Delta E} = \sum_{y=I}^{N} \Delta E_y$$

On en déduit :

$$\Delta u = \bar{\lambda}\,(p_1 \Delta X_1 + \ldots + p_n \Delta X_n + \Delta E)$$

u s'exprime donc uniquement en fonction de X_1, X_2, ..., X_n et E. Donc si l'on prend soin de ne pas considérer des zones de revenus trop larges (et de séparer les diverses catégories socio-professionnelles), on peut définir pour le groupe de consommateurs ainsi caractérisé une fonction « Utilité totale collective ». Et tout ce qui a été dit pour la fonction « Utilité totale individuelle » peut être étendu à la fonction « Utilité totale collective ».

Mais on peut obtenir sur la fonction « Utilité totale collective » des précisions qu'il est impossible d'avoir pour la fonction « Utilité totale individuelle ». En effet, si $e_{j,R}$ est l'élasticité par rapport au Revenu total du groupe considéré, R, de la Demande totale en bien j, X_j, on a :

$$\frac{\partial X_j}{\partial R} = e_{j,R}\cdot\frac{X_j}{R} \text{ et } \frac{\partial E}{\partial R} = e_{E,R}\cdot\frac{E}{R}\,.$$

Or on peut considérer que l'accroissement de la consommation de bien j, ΔX_j, entraîné par l'accroissement ΔR du revenu total du groupe, correspond au choix optimum pour le groupe de consommateurs considéré. Donc en comparant les équations précédentes aux équations (3) on a :

$$\lambda\frac{U_j}{U} = e_{j,R}\frac{X_j}{R} \text{ et } \lambda\frac{U_E}{U} = e_{E,R}\frac{E}{R} \tag{10}$$

De même si e_{j,p_i} est l'élasticité, par rapport au prix du bien i, de la Demande de bien j, on a, en comparant l'équation $\dfrac{\partial X_j}{\partial p_i} = e_{j,p_i}\dfrac{X_j}{p_i}$ aux équations (4) :

$$-\lambda X_i\frac{U_i}{U} + \lambda\frac{U_{ii}}{U} = e_{i,p_i}\frac{X_i}{p_i}$$

$$-\lambda X_i\frac{U_j}{U} + \lambda\frac{U_{ji}}{U} = e_{p,p_i}\frac{X_j}{p_i} \qquad (j \neq i)$$

$$-\lambda X_i\frac{U_E}{U} + \lambda\frac{U_{Ei}}{U} = e_{E,p_i}\frac{E}{p_i},$$

d'où en comparant aux équations (10) :

$$\begin{aligned}\lambda\frac{U_{ii}}{U} &= e_{i,R}\frac{X_i^2}{R} + e_{i,p_i}\frac{X_i}{p_i}\\ \lambda\frac{U_{ji}}{U} &= e_{j,R}\frac{X_iX_j}{R} + e_{j,p_i}\frac{X_j}{p_i} = e_{i,R}\frac{X_jX_i}{R} + e_{i,p_j}\frac{X_i}{p_j}\\ \lambda\frac{U_{Ei}}{U} &= e_{E,R}\frac{X_iE}{R} + e_{E,p_i}\frac{E}{p_i}\end{aligned} \tag{11}$$

puisque $U_{ji} = U_{ij}$. D'où, en multipliant les 2 équations du milieu par $\dfrac{p_ip_j}{R}$ et en posant $a_i = \dfrac{p_iX_i}{R}$ (part du revenu affectée aux achats de bien i) et $a_j = \dfrac{p_jX_j}{R}$:

$$a_ia_j\,(e_{j,R} - e_{i,R}) + a_je_{j,p_i} - a_ie_{i,p_j} = 0$$

d'où :

$$\boxed{(e_{j,R} - e_{i,R}) + \left(\frac{e_{j,p_i}}{a_i} - \frac{e_{i,p_j}}{a_j}\right) = 0} \tag{12}$$

Ces C_n^2 relations sont à ajouter aux $(n + 1)$ relations obtenues en dérivant l'équation (1) par rapport au Revenu et aux prix, soit :

$$p_1\frac{\partial X_1}{\partial R} + \dots + p_i\frac{\partial X_i}{\partial R} + \dots + p_n\frac{\partial X_n}{\partial R} + \frac{\partial E}{\partial R} = 1$$

et

$$p_1\frac{\partial X_1}{\partial p_i} + \dots + \left(p_i\frac{\partial X_i}{\partial p_i} + X_i\right) + \dots + p_n\frac{\partial X_n}{\partial p_i} + \frac{\partial E}{\partial p_i} = 0,$$

d'où, en tenant compte de $\dfrac{\partial X_j}{\partial R} = e_{j,R}\dfrac{X_j}{R}$ et de $\dfrac{\partial X_j}{\partial p_i} = e_{j,p_i}\dfrac{X_j}{p_i}$:

$$\boxed{\begin{aligned}&a_1e_{1,R} + \dots\dots + a_ie_{i,R} + \dots + a_ne_{n,R} + a_Ee_{E,R} = 1\\ \text{et}\quad &a_1e_{1,p_i} + \dots\dots + a_i\,(1 + e_{i,p_i}) + \dots\dots + a_ne_{n,p_i} + a_Ee_{E,p_i} = 0\end{aligned}} \quad \begin{matrix}(13)\\(14)\end{matrix}$$

Si l'on cherche à préciser les résultats (12), on peut ajouter que l'expression $\lambda \frac{U_{ji}}{U}$, appelée par Hicks : « Effet de substitution de l'équation de Slutsky » [1], est > 0 si les biens i et j sont des substituts (concurrents) et < 0 si ces biens sont complémentaires. On a donc dans le premier cas : $e_{j,R} \frac{X_i X_j}{R} + e_{j,p_i} \frac{X_j}{p_i} > 0$ ou, en multipliant par $\frac{p_i}{X_j}$: $a_i e_{j,R} + e_{j,p_i} > 0$ et dans le second cas : $a_i e_{j,R} + e_{j,p_i} < 0$.

Pour les biens qui ne sont ni concurrents ni complémentaires, et que nous appellerons « biens indifférents », on peut admettre que l'on a : $a_i e_{j,R} + e_{j,p_i} \# 0$. D'autre part on pourrait penser que si l'on remplace le bien j par l'épargne E on a également : $a_i e_{E,R} + e_{E,p_i} \# 0$, mais il n'est pas certain qu'il en soit ainsi pour tous les biens (ainsi un bien précieux peut être également un placement d'argent, donc un concurrent de l'épargne proprement dite).

Enfin on a $\lambda \frac{U_{ii}}{U} < 0$ pour la raison que l'une des conditions pour que le maximum de u soit un vrai maximum est que le déterminant U d'une part, les mineurs tels que U_{ii} d'autre part soient de signe contraire. On a donc :

Biens i et j concurrents	$a_i e_{j,R} + e_{j,p_i} > 0$
Biens i et j complémentaires	$a_i e_{j,R} + e_{j,p_i} < 0$
Biens i et j indifférents	$a_i e_{j,R} + e_{j,p_i} \# 0$
Épargne E et bien i	$a_i e_{E,R} + e_{E,p_i} \# 0$?
Pour tout bien i	$a_i e_{i,R} + e_{i,p_i} < 0$

Ajoutons que si les biens i et j ont même élasticité par rapport à R l'équation (12) se simplifie et l'on a : $a_j e_{j,p_i} = a_i e_{i,p_j}$.

J.-J. Boulanger

1. Hicks J. R. : « Valeur et Capital », Dunod, p. 287-288.