

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

MAURICE DUMAS

Les épreuves séquentielles exhaustives ajustées

Journal de la société statistique de Paris, tome 128 (1987), p. 100-107

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1987__128__100_0

© Société de statistique de Paris, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES ÉPREUVES SÉQUENTIELLES EXHAUSTIVES AJUSTÉES

Maurice DUMAS

Ancien président de la Société de statistique de Paris

et Emmanuel RAVIART

L'épreuve séquentielle exhaustive — ou : ESE — est connue pour être économique, dans le cadre de deux risques (risque du producteur et risque du client) dont les valeurs figurent aux données. Mais, les risques réels de l'ESE correspondant directement aux données, peuvent être très différents des précédents; certains dépassements sont même à craindre, qui rendent l'ESE inacceptable en l'état.

Les auteurs montrent que, grâce à l'ordinateur, il est possible de substituer à l'ESE correspondant directement aux données une nouvelle ESE méritant d'être qualifiée de : ajustée, parce que ses risques réels sont inférieurs d'aussi peu que possible à ceux figurant aux données. Il s'ensuit que la nouvelle ESE — dite : ESEAj de la première — non seulement est toujours acceptable, mais de plus, est plus économique que la première.

Mots clés. Épreuve séquentielle... Plan progressif... Risques... Économie d'un plan d'échantillonnage.

The data of a sequential test without replacement (in french : épreuve séquentielle exhaustive, or ESE) include the producer's risk α and the consumer's risk β . Real risks are α' and β' , the differences $\alpha - \alpha'$ and $\beta - \beta'$ are generally positive; if so, the ESE is acceptable even if the differences are large; but, if one of these differences is negative, the ESE is unacceptable.

The paper shows, it is possible to substitute to ESE (α, β) a new ESE, always acceptable, the real risks of which being very near of α and β . The new ESE is an adjusted ESE (or : ESEAj) of the former ESE

The ESEAj has a better economy than the former ESE

By means of a computer, an ESEAj of an ESE is found in a very few minutes.

1 — INTRODUCTION : ESE ET ESEAJ

Dans une communication publiée en 1969 dans le Journal de notre Société, j'ai rappelé l'épreuve séquentielle (non-exhaustive) ou plan progressif, et j'ai donné les grandes lignes de l'épreuve séquentielle exhaustive — ou ESE — puis exposé les résultats intéressants que j'en attendais : grande économie, c'est-à-dire nombre moyen d'éléments à éprouver relativement faible, dans le cadre de risques donnés. Depuis lors, j'ai mené sur l'ESE, par à-coups successifs, une série d'études; puis, ayant pu travailler avec E. Raviart, inséparable de son micro-ordinateur, nous sommes arrivés à inventer et à mettre au point de nouvelles ESE, encore plus économiques que les précédentes, à savoir les *ESE dites ajustées*, ou *ESEAj* Même si leurs applications directes apparaissent limitées, sans doute sont-elles de nature à ouvrir certains horizons, dans des secteurs de la statistique comme celui des tests d'hypothèse envisagé par F. Boutros-Toni.

Nous nous proposons d'exposer ici les résultats auxquels nous sommes arrivés; toutefois, pour ne pas surcharger l'exposé, les programmes donnés à l'ordinateur ne sont pas reproduits.

La terminologie utilisée est celle des épreuves de réception par attribut.

2 — LES ÉPREUVES SÉQUENTIELLES EXHAUSTIVES, OU : ESE

Les données d'une ESE se réduisent à trois entiers : N , qui est l'effectif du lot à éprouver, ... a_1 et a_2 , avec $N > a_2 > a_1$, et à deux risques, à savoir α qui, associé à a_1 , définit le *risque du producteur*, et β qui, associé à a_2 , définit le *risque du client*.

Toute ESE en cours d'exécution peut donner lieu à une représentation graphique par un cheminement partant de l'origine des axes, et progressant d'une unité suivant Ox si le résultat de l'essai a été « bon », ou suivant Oy s'il a été « défectueux ».

Sur un tel plan, les formules mathématiques relatives à une ESE, sont celles de la figure 1. Les courbes de la figure 2 marquées ACC et REJ correspondent aux équations de la figure 1. Dès qu'au cours d'une épreuve le cheminement dépasse une de ces courbes, l'épreuve est arrêtée. Il y a acceptation du lot si le cheminement a traversé la ligne ACC; il y a rejet s'il a traversé la ligne REJ : le cheminement se trouve ainsi arrêté à un « *point de sortie* » qui est soit un « *point d'acceptation* », soit un « *point de rejet* ». Ainsi, il y a une ESE et une seule correspondant aux données; pour $N... a_1$ et a_2 connus, ESE (α, β) représente sans ambiguïté l'ESE correspondant directement aux données.

Pratiquement, avant une épreuve, il n'y a pas lieu de tracer les courbes ACC et REJ; il suffit de déterminer les points de sortie correspondant aux données. Pour cela, on peut se servir des Tables de Dumas (1971); sans doute est-il encore plus simple, si l'on dispose d'un ordinateur, d'utiliser un programme adéquat. En 1966, G. Panizzon a publié un algorithme; nous avons utilisé un programme qui, établi par E. Raviart, est bien adapté aux micro-ordinateurs. La figure 3 donne le plan de l'ESE tel qu'il a été obtenu par nous, avec les mêmes données qu'à la figure 2.

3 — RISQUES RÉELS ET DÉPASSEMENT ÉVENTUEL

Il ne faut pas croire que les développements mathématiques qui ont conduit aux formules de la figure 1, aient permis d'obtenir une ESE (α, β) faisant courir aux parties des risques exactement chiffrés par α et β . En réalité, ces risques sont chiffrés par α' et β' dont les expressions sont notées sur la figure 1.

Lors des applications, le calcul montre que les différences $\alpha - \alpha'$ et $\beta - \beta'$, sont généralement positives; mais il montre également ce fait surprenant au premier abord — voir Dumas, 1974 — qu'un dépassement est à craindre; plus précisément, des deux différences $\alpha - \alpha'$ et $\beta - \beta'$ l'une ou l'autre peut être négative, mais il n'arrive jamais que l'une et l'autre le soient.

Toute ESE (α, β) dont les risques réels donnent lieu à un dépassement est dite : *inacceptable* et est à considérer comme telle; par opposition, toute ESE autre est dite *acceptable*, même si les différences, positives, $\alpha - \alpha'$ et (ou) $\beta - \beta'$ sont relativement grandes.

De cela résulte que l'établissement d'un plan d'ESE est incomplet s'il ne comporte pas le calcul des risques réels. Dans l'exemple de la figure 3, les valeurs des risques réels sont donnés en fin du tableau; elles montrent que l'ESE en cause est acceptable.

4 — LES ESE AJUSTÉES, OU ESEAJ

La question se pose de remédier à tout dépassement constaté. Il est manifestement admissible, partant de ESE (α, β) , de substituer à cette dernière, une ESE $(\alpha_1; \beta_1)$ à la condition que ses risques réels α_1' et β_1' satisfassent à $\alpha - \alpha_1' > 0$ et $\beta - \beta_1' > 0$.

Beaucoup de couples $(\alpha_1; \beta_1)$ peuvent être envisagés. Notre proposition est d'ajouter aux conditions qui précèdent, celle que les différences $\alpha - \alpha_1'$ et $\beta - \beta_1'$ soient aussi petites que possible, estimant qu'ainsi l'index d'économie de la nouvelle ESE sera des plus faible, et en tout cas, inférieur à celui de l'ESE de départ, supposée acceptable.

Les numéros qui suivent montrent comment il est possible d'atteindre les buts envisagés; pour la simplicité de l'exposé, nous admettons que tous les risques $\alpha \dots \beta \dots \alpha_1$ et β_1 sont des multiples entiers d'un risque faible e ; par exemple $e = 0,010$ ou $0,001$.

Nous disons que ESE $(\alpha_1; \beta_1)$ est une ESE ajustée de ESE $(\alpha; \beta)$ si ESE $(\alpha_1; \beta_1)$ est acceptable, tandis que les trois ESE suivantes.

ESE $(\alpha_1 + e; \beta_1) \dots$ ESE $(\alpha_1 + e; \beta_1 + e) \dots$ ESE $(\alpha_1; \beta_1 + e)$
sont soit inacceptables, soit équivalentes à ESE $(\alpha_1; \beta_1)$. Ainsi, α_1 et β_1 sont tels que, majorés l'un ou (et) l'autre de la petite quantité e , chacune des trois nouvelles ESE donne lieu à dépassement, à moins qu'elle reste équivalente à ESE $(\alpha_1; \beta_1)$.

Remarque. Il ne résulte pas de la définition d'une ESEAJ qu'à une ESE bien déterminée corresponde une seule et même ESEAJ. Chacun des deux numéros qui suivent est consacré à un processus d'obtention d'une ESEAJ; si le processus suivi comporte, en tout ou en partie, une période de tâtonnement, le résultat peut dépendre de ce que fait l'opérateur; si l'on ne suit pas exactement les procédures du numéro 6, le résultat peut s'en ressentir. Il y a seulement lieu de penser que, si différence il y a, cette différence reste minime.

5 — RECHERCHE D'UNE ESEAJ PAR TÂTONNEMENT

L'opérateur utilise le programme de l'ESE donnant les risques réels. Il part de ESE (α, β) et en retient α' et β' . Il choisit α_1 et β_1 en se laissant guider, s'il n'a pas de raison d'agir autrement, par la règle que voici, bien que cette règle soit loin de conduire toujours à des variations de risques réels dans le sens désiré :

Règle : si α_1' (ou β_1') est trop petit (ou trop grand), choisir une plus grande (ou une plus petite) valeur de α_1 (ou de β_1).

L'opération est renouvelée jusqu'à ce que satisfaction soit obtenue.

Ainsi, avec les données de l'exemple des figures 1 et 2, nous sommes rapidement arrivés, en opérant par tâtonnement sans craindre d'essayer de larges fourchettes, à déterminer que ESE $(0,102; 0,156)$ est une ESEAJ de l'ESE de départ, soit ESE $(0,050; 0,150)$. On remarque sur la figure 2, les positions relatives des points de sortie de l'une et de l'autre des deux ESE

6 — RECHERCHE D'UNE ESEAJ PAR PROGRAMME

L'opérateur utilise le programme de l'ESE, programme préalablement complété de manière à comprendre les deux procédures que voici :

— *Procédure d'approche.* Calcul des risques réels $k\alpha_1'$ et $k\beta_1'$ de ESE $(k\alpha_1; k\beta_1)$ pour les valeurs successives de k , à partir de ${}_1\alpha_1 = \alpha$ et ${}_1\beta_1 = \beta$, étant entendu qu'à chaque fois, il y a remplacement des risques, d'après :

- si ${}_k\alpha'_1 < \alpha$, prendre ${}_{k+1}\alpha_1 = {}_k\alpha_1 + e$;
- si ${}_k\alpha'_1 > \alpha$, prendre ${}_{k+1}\alpha_1 = {}_k\alpha_1 - e$;
- si ${}_k\beta_1 < \beta$, prendre ${}_{k+1}\beta_1 = {}_k\beta_1 + e$;
- si ${}_k\beta_1 > \beta$, prendre ${}_{k+1}\beta_1 = {}_k\beta_1 - e$.

Lorsque le moment arrive où ${}_{k+1}\alpha_1 = {}_{k-1}\alpha_1$ et ${}_{k+1}\beta_1 = {}_{k-1}\beta_1$, et où par suite il y aurait des répétitions, la procédure d'approche s'arrête et la valeur de k est retenue pour le début de la procédure de finition; pour simplifier l'écriture de cette dernière, nous posons :

$${}_k\alpha_1 = \alpha_2 \text{ et } {}_k\beta_1 = \beta_2$$

— *Procédure de finition.* Calcul des risques réels de chacune des quatre ESE indiquées sur la figure 4 en fonction de m (de 1 à 4) et de j , dont une seule valeur (de 1 à 4) est retenue, conformément aux indications de la figure 4.

La figure 4 a été établie de manière que, très généralement, les ESE correspondant à $m = 1$, ou 2, ou 3, soient inacceptables, et que celle correspondant à $m = 4$ soit acceptable. Le programme comporte l'écriture du plan complet de l'ESE correspondant à $m = 4$, ainsi que celle des risques réels des quatre ESE successivement considérées. Cela permet de vérifier que la répartition en ESE acceptable et inacceptable est bien celle attendue; si oui, l'ESE correspondant à $m = 4$ est bien une ESE_{Aj} de ESE (α, β); si non, l'ESE_{Aj} cherchée sera obtenue par tâtonnement, à partir de l'une des ESE de la procédure de finition.

7 — EXEMPLE

La figure 5 donne, par groupes de 2 ou 3 lignes :

- les données de l'exemple et la valeur de e ;
- les groupes de lignes correspondant à la procédure d'approche; ces groupes sont marqués $k = \dots$; les valeurs de α_2 et de β_2 sont lues en face de $k = n$; en l'occurrence, ces valeurs conduisent, d'après les indications de la figure 4, à prendre dans la suite $j = 2$;
- les quatre groupes de lignes correspondant à la procédure de finition, en face des valeurs de m ; le groupe $m = 4$ est interrompu par le plan complet correspondant.

Il reste à vérifier que les trois premières ESE de la procédure de finition sont inacceptables, et que la quatrième est acceptable. En l'occurrence, la vérification est satisfaisante, ce qui justifie les indications du Résumé de l'exemple.

Remarque : 1. Pour éviter des calculs à la machine, le développement de l'exemple a comporté deux procédures d'approche : la première, avec $e = 0,010$ a été immédiatement suivie de la seconde avec pour e , la valeur 0,001 figurant aux données.

2. Les lignes relatives à la procédure d'approche sont écrites parce qu'il s'agit ici d'un exemple de démonstration; le programme pratique n'a pas à en comporter l'écriture.

8 — ÉCONOMIE

Il n'y a pas à douter que toute ESE_{Aj} d'une ESE de départ (celle-ci : supposée acceptable) ait un index d'économie inférieur à celui de l'ESE de départ. Nous nous bornons à le vérifier sur un exemple, celui des figures 2 et 3.

Les formules nécessaires sont données en fin de la figure 1. Des compléments ont dû être apportés au programme donnant une ESEAJ; ils ont permis d'obtenir les résultats consignés sur la figure 6.

Remarque : Les compléments de programme dont il vient d'être question imposent à la machine de nombreux calculs. Sans doute jugera-t-on très généralement inutile de les introduire dans un programme de recherche d'ESEAJ; savoir de combien l'index d'économie de l'ESEAJ déterminée, est inférieur à celui de l'ESE de départ, n'est important qu'exceptionnellement.

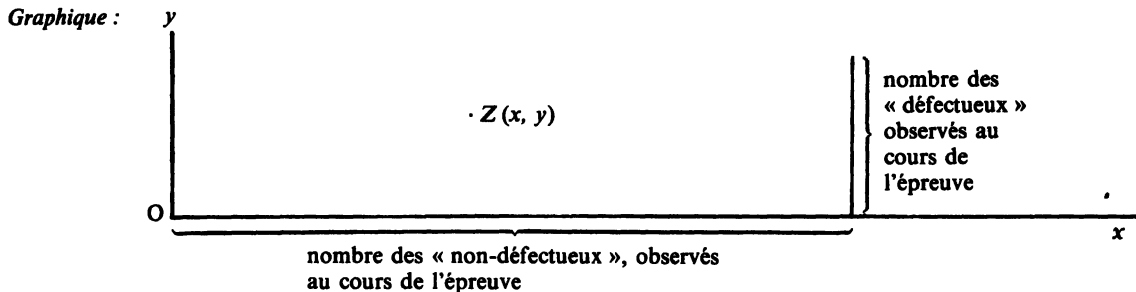
9 — RÉFÉRENCES

- BOUTROS TONI F. (1981). L'analyse séquentielle exhaustive. Application en médecine. Rev. de statistiques appliquées. Vol. XXIX.
- DUMAS M. (1969). Les interprétations non classiques des épreuves de réception. Journal de la Soc. de statistique de Paris. 2^e trimestre.
- DUMAS M. (1971). Tables commentées des épreuves séquentielles exhaustive et non exhaustive. Sciences et tech. de l'armement. Fasc. 1, et Dunod Paris.
- DUMAS M. (1974). Dépassement des risques en cas d'épreuve séquentielle. Rev. de statistique appliquée. Vol. XXII.
- PANIZZON G. (1966). Controllo sequentiale per attributi. Statistica. Avril Juin. Bologna.

FIGURE 1. — *Formules mathématiques de l'ESE*

DONNÉES : $N... a_1 ... a_2 ... \alpha$ et β .

a est le nombre, inconnu, des « défectueux » contenus dans le lot.



ESE :

$$\Gamma(x, y) = \frac{a_2!}{a_1!} \frac{(a_1 - y)!}{(a_2 - y)!} \frac{(N - a_2)!}{(N - a_1)!} \frac{(N - a_1 - x)!}{(N - a_2 - x)!}$$

Courbe d'acceptation (ACC) $\Gamma(x, y) = \beta / (1 - \alpha)$

Courbe de rejet (REJ) $\Gamma(x, y) = (1 - \beta) / \alpha$

Point d'acceptation : $Z_A(x_A; y_A)$ si $\Gamma(x_A - 1; y_A) > \frac{\beta}{1 - \alpha} > \Gamma(x_A; y_A)$

Point de rejet : $Z(x_R; y_R)$ si $\Gamma(x_R; y_R - 1) < \frac{1 - \beta}{\alpha} < \Gamma(x_R; y_R)$

RISQUES RÉELS : α' et β'

La probabilité d'atteindre le point $Z(x, y)$ est : $Pr(x, y/a)$.

$$Pr(x, y/a) = \binom{N-x}{a-y} / \binom{N}{a}$$

Le nombre des cheminements différents, possibles de O à $Z(x, y)$ est $M(x, y)$

$$M(x, y) = M(x-1; y) + M(x; y-1)$$

Les formules donnant α' et β' sont respectivement :

$$\alpha' = \sum_{\text{REJ}} M(x_R; y_R) \cdot \text{Pr}(x_R; y_R/a_1);$$

$$\beta' = \sum_{\text{ACC}} M(x_A; y_A) \cdot \text{Pr}(x_A; y_A/a_2)$$

ÉCONOMIE : Pour $a_1 \leq a \leq a_2$, l'index d'économie est pris égal au maximum des effectifs moyens d'échantillons, c'est à dire au maximum de :

$$\sum_{\text{ACC}} (x_A + y_A) \cdot M(x_A; y_A) \cdot \text{Pr}(x_A; y_A/a) +$$

$$\sum_{\text{REJ}} (x_R + y_R) \cdot M(x_R; y_R) \cdot \text{Pr}(x_R; y_R/a)$$

FIGURE 2. — Représentation graphique d'une ESE

Exemple :

$N = 50 \dots a_1 = 4 \dots a_2 = 10$

ESE (0,050; 0,150) : traits pleins;
points de sortie \odot
ESE (0,102; 0,156) : traits interrompus;
points de sortie Δ

(N.B. : ESE (0,102; 0,156) est une ESEAj de la précédente.)

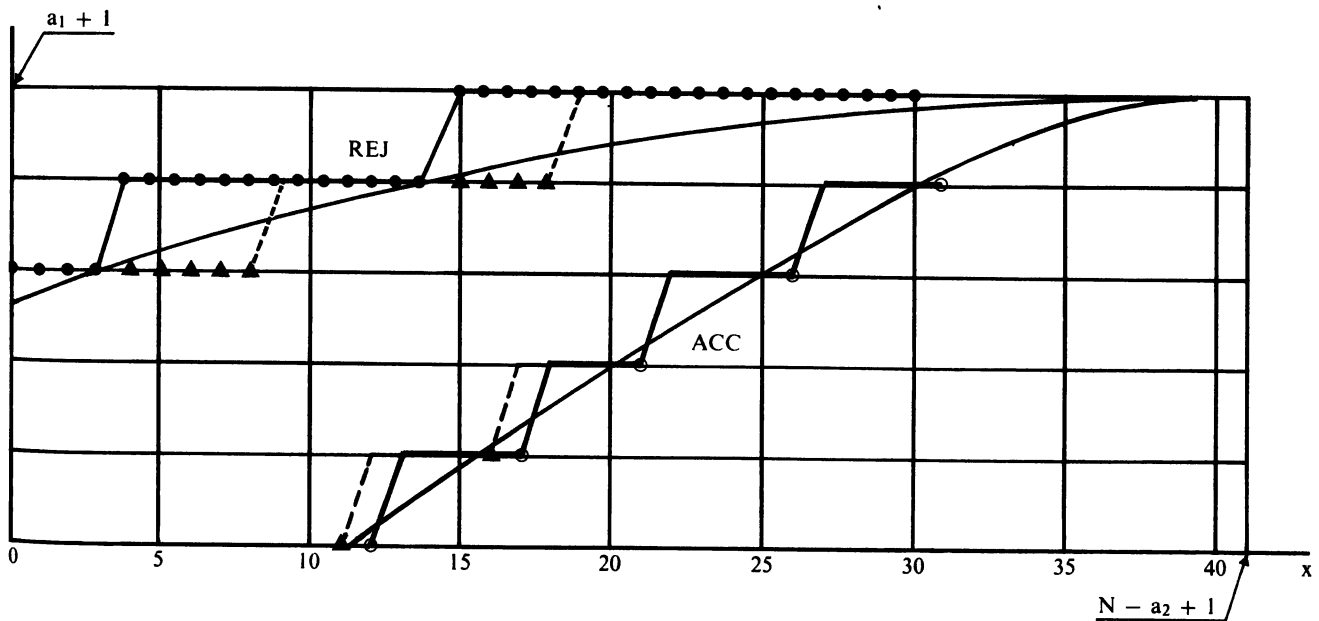


FIGURE 3 — Plan d'une ESE

Exemple : $N = 50... a_1 = 4... a_2 = 10$
 ESE (0,050; 0,150)

(N.B. : voir sa représentation graphique sur la figure 2)

Dans cet exemple :

$x = 17$ et $y_A = 1$ sont les coordonnées d'un point d'acceptation; sur $17 + 1 = 18$ essais, il y a eu un seul « défectueux »;

$x = 15$. Si 0... 1... 2... 3 ou 4 « défectueux » ont été constatés, l'épreuve est poursuivie; si 5, il y a rejet. $x_R = 15$ et $y_R = 5$ sont les coordonnées d'un point de rejet.

x	y_A	y_R
0		3
1		3
2		3
3		3
4		4
5		4
6		4
7		4
8		4
9		4
10		4
11		4
12	0	4
13		4
14		4
15		5
16		5
17	1	5
18		5
19		5
20		5
21	2	5
22		5
23		5
24		5
25		5
26	3	5
27		5
28		5
29		5
30		5
31	4	5

$\alpha' = 0,016000$
 $\beta' = 0,132055$

FIGURE 4. — Procédure de finition

I. Détermination de j									
$\alpha'_j > \alpha$									
$\beta'_j > \beta$									
$\beta'_j < \beta$									
$\alpha'_j < \alpha$									
$\beta'_j > \beta$									
$\beta'_j < \beta$									
II. Valeurs de mV_j et de mW_j									
en vue du calcul de ESE ($\alpha_2 + e \cdot mV_j$; $\beta_2 + e \cdot mW_j$)									
$m \backslash j$	1		2		3		4		
	mV_1	mW_1	mV_2	mW_2	mV_3	mW_3	mV_4	mW_4	
1	0	0	0	+1	+1	0	+1	+1	
2	0	-1	0	0	0	0	0	+1	+1
3	-1	0	-1	+1	+1	-1	+1	0	0
4	-1	-1	-1	0	0	-1	0	0	0

FIGURE 6. — Recherche d'index d'économie

Exemple : $N = 50... a_1 = 4... a_2 = 10$

(N.B. : ESE (0,102; 0,156) est une ESEAj de ESE (0,050; 0,150)

a	ESE (0,050; 0,150)	ESE (0,102; 0,156)	Différences
4	19,556	17,768	1,788
5	21,402	19,013	2,389
6	22,215 Max	19,361 Max	2,854
7	22,012	18,921	3,091
8	21,082	17,958	3,124 Max
9	19,747	16,732	3,015
10	18,259	15,433	2,826

a est le nombre, inconnu, des éléments défectueux contenus dans le lot, avant toute épreuve.

Conclusions. Les index d'économie sont respectivement de 22,215 et de 19,361... Les différences d'index en faveur de l'ESEAj sont de près de 3 unités pour toutes les valeurs de a comprises entre 5 et 10.

FIGURE 5. — Déroulement d'une recherche d'ESEAj par programme

N = 45	a2 = 7	Données de l'exemple
a1 = 3	Beta = 0.10000	
Alpha = 0.10000	Beta = 0.10000	Début
e = 0.00100	BetaPrime = 0.09332	
AlphaPrime = 0.02565	BetaPrime = 0.09332	k = 1
Alpha = 0.21600	Beta = 0.09600	k = n - 3
AlphaPrime = 0.09577	BetaPrime = 0.09781	k = n - 2
Alpha = 0.21700	Beta = 0.09700	k = n - 1
AlphaPrime = 0.09577	BetaPrime = 0.09781	k = n
Alpha = 0.21800	Beta = 0.09800	m = 1
AlphaPrime = 0.09577	BetaPrime = 0.10474	m = 2
Alpha = 0.21900	Beta = 0.09700	m = 3
AlphaPrime = 0.10677	BetaPrime = 0.09660	m = 4
Alpha = 0.21900	Beta = 0.09800	
AlphaPrime = 0.10677	BetaPrime = 0.10353	
Alpha = 0.21900	Beta = 0.09700	
AlphaPrime = 0.10677	BetaPrime = 0.09660	
Alpha = 0.21800	Beta = 0.09800	
AlphaPrime = 0.09577	BetaPrime = 0.10474	
Alpha = 0.21800	Beta = 0.09700	

Abscisse	Ordonnée	
	Acc.	Rej.
0		2
1		2

25	2	4
26		4
27		4
28		4
29		4
30	3	4
31		

Plan pour m = 4, plan admis comme plan d'ESEAj sous réserve de vérification.
Remarque qu'en l'occurrence, la vérification est satisfaisante.

AlphaPrime = 0.09577

BetaPrime = 0.09781

RÉSUMÉ de l'exemple :

Risques figurant aux données : 0,10000 et 0,10000

Risques réels de l'ESE de départ : 0,02565 et 0,09332

Risques réels de l'ESEAj déterminée : 0,09577 et 0,09781

ESE (0,218; 0,097) est une ESEAj de ESE (0,100; 0,100), pour N = 45... a1 = 3 et a2 = 7.