JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

PAUL DAMIANI

Loi de mortalité générale, accidents inclus : expression analytique et variations dans le temps

Journal de la société statistique de Paris, tome 129, nº 3 (1988), p. 170-180
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1988__129_3_170_0>

II

ARTICLES

LOI DE MORTALITÉ GÉNÉRALE, ACCIDENTS INCLUS : EXPRESSION ANALYTIQUE ET VARIATIONS DANS LE TEMPS

Paul DAMIANI
administrateur de l'INSEE,
secrétaire général des Sociétés de statistique (1)

On a essayé de déterminer une loi de mortalité générale, accidents inclus, donnant par âge, suivant le sexe, la probabilité de décès. Pour cela, on a utilisé la méthode employée pour établir une loi de mortalité par maladie, dans laquelle on avait défini une nouvelle échelle des temps basée sur les variations de poids avec l'âge. La loi trouvée diffère de la loi de mortalité par maladie d'un terme supplémentaire représentant la mortalité par accident. On a ensuite étudié les variations dans le temps des paramètres de cette loi.

We tried to find a law of general mortality, including accidents, giving probability of death, according sex and age. For this purpose, we used the same method as for searching a law of mortality by disease, where we defined a new scale of time based on variations of weight according age. The law we found has an additional expression according to the mortality by accident. Then, we studied variations of this law according time.

INTRODUCTION

Une loi de mortalité est une fonction analytique donnant la probabilité de décès par âge, suivant le sexe. Pour trouver une telle loi, on a été amené, dans des études précédentes, à définir une nouvelle échelle des temps basée sur les variations de poids avec l'âge. On a pu ainsi établir une loi de mortalité non accidentelle, une loi de mortalité suivant la cause de décès, accidents exclus, et une loi de mortalité accidentelle. En appliquant la même méthode, on a cherché, dans la présente étude, à déterminer une loi de mortalité générale, accidents inclus. On a ensuite suivi l'évolution dans le temps de cette loi.

1. *TEMPS PROPRE*

On rappelle tout d'abord, la définition de la nouvelle échelle des temps proposée dans une étude de P. DAMIANI [1]

1. INSEE, 18, boulevard A.-Pinard, 75675 Paris Cedex 14.
Journal de la Société de statistique de Paris, tome 129, n° 3, 1988.

Définition du temps propre

On propose un changement d'échelle des temps basé sur la théorie de la relativité restreinte. On remplace le temps t observé par un *temps propre* t_o défini par :

$$\frac{dt}{dt_o} = \frac{P}{P_o} \tag{1}$$

où P, P_o sont les poids d'un individu respectivement à l'âge t et à la naissance.

Cette formule s'applique également à la période comprise entre la conception et la naissance, en remplaçant le poids de l'individu par celui de l'ensemble : mère et fœtus.

Si on appelle t_i et t_{i+1}, P_i et P_{i+1} les temps et les poids observés correspondant aux temps propres t_{oi} et $t_{o,i+1}$, on a en première approximation :

$$\Delta t_{oi} = \frac{2\ P_o}{P_i + P_{i+1}}\ \Delta t_i \tag{2}$$

Cette formule permet de calculer Δt_{oi} à partir de Δt_i, connaissant les variations de poids suivant le sexe et l'âge, tirées d'une étude précédente de P. DAMIANI [2]. On détermine t_{oi} en supposant que l'origine du temps propre correspond à l'origine du temps observé, c'est-à-dire au moment de la conception.

Quotient propre de mortalité

On considère une population fermée que l'on suit de la conception à la mort et soumise à une mortalité donnée. On établit une table de mortalité comprenant les éléments suivants :

l_i, nombre de survivant à l'âge i,

d_i, nombre de décès entre i et $i+1$.

Le quotient annuel de mortalité à l'âge i est la probabilité pour un individu d'âge i de mourir avant l'âge $i+1$; il a pour expression : $q_i = d_i/l_i$.

Au quotient annuel de mortalité q_i, correspond le *quotient propre* de mortalité q_{oi} défini par la relation :

$$q_{oi} = q_i\ \frac{\Delta t_i}{\Delta t_{oi}} \tag{3}$$

D'après (2), on a :

$$q_{oi} = q_i\ \frac{P_i + P_{i+1}}{2\ P_o} \tag{4}$$

$$\text{ou : } q_{oi} = q_i\ w_i$$

avec : $w_i = (P_i + P_{i+1})/2P_o$, coefficient pondéral.

2. PREMIÈRES APPLICATIONS AUX LOIS DE MORTALITÉ

Il existe deux types de mortalité obéissant à des lois différentes : la mortalité par maladie et celle due aux accidents. Chacune de ces mortalités sera étudiée, d'abord, séparément.

On adoptera, dans cette étude, les notations suivantes : q_i sera le quotient annuel de mortalité par maladie, $q_i^{(k)}$ celui de mortalité de la maladie k, $q_i^{(a)}$ celui de mortalité par accident; on appellera Q_i le quotient de mortalité générale, accidents inclus. A ces quotients annuels, correspondent des quotients propres définis par la formule (4).

Mortalité non accidentelle

On a indiqué les principaux résultats tirés de l'étude citée précédemment [1].

Données de base

Les données de base sont tirées de la table de mortalité par maladie de la France, établie par l'INSEE pour la période 1966-1970 [3]. Les quotients annuels de mortalité par maladie q_i de cette table sont calculés en rapportant les décès par maladie à la population soumise à ce risque. En appelant d_{mi} et d_{ai} les décès par maladie et par accident de l'âge i, on a :

$$d_i = d_{mi} + d_{ai}$$

On estime le quotient annuel de mortalité par maladie à l'âge i par :

$$q_i = \frac{d_{mi}}{l_i - \frac{d_{ai}}{2}}$$

ou :

$$q_i = Q_i \frac{1 - \theta_i}{1 - \frac{\theta_i}{2} Q_i}$$

avec : $\theta_i = d_{ai}/d_i$

La loi de mortalité non accidentelle

On trouve expérimentalement la loi de mortalité par maladie, ou loi de mortalité non accidentelle, suivante, quel que soit le sexe :

$$\text{Log } q_{oi} = -ct_i \exp\{-\lambda t_{oi}\} \tag{5}$$

avec : $c = 12{,}8942$

$\lambda = 1{,}130$

Interprétation de la loi

On démontre que le logarithme du quotient propre de mortalité doit être de la forme :

$$\text{Log } q_{oi} = K + \beta\, E_i$$

où E_i est le niveau d'énergie atteint à l'âge t_{oi}.

Or, d'après la définition adoptée pour le temps propre, l'énergie E_i est égale à t_i. Il s'ensuit, en comparant avec la formule (5), que le coefficient β a pour expression :

$$\beta = A \exp\{-\lambda t_{oi}\}$$

où A est une constante.

On admettra que le coefficient λ est un facteur correctif tenant compte de l'amoindrissement de l'énergie avec l'âge, face à la maladie.

MORTALITÉ PAR CAUSE

Les résultats, proposés ci-après, proviennent d'une étude de P. DAMIANI et H. MASSÉ, pour la mortalité par cause, accidents exclus [4], et d'une étude de P. DAMIANI, pour la mortalité par accident [5].

Données de base

Les données de base sont tirées d'une étude de M. AUBENQUE, P. DAMIANI et L. DERUFFE [6] qui donne l'évolution des taux annuels de mortalité par cause de décès, par groupe d'âge, suivant le sexe, de 1925 à 1974. Les taux observés ont été rectifiés pour tenir compte des décès de cause non spécifiée. Les groupes d'âge retenus sont les suivants : moins d'un an, 1-14, 15-44, 45-64, 65-74, 75 et plus.

On a admis que, pour un sexe donné, le taux annuel moyen d'un groupe d'âge était égal au quotient annuel de mortalité de l'âge central i de ce groupe d'âge.

Lois de mortalité par cause

On trouve expérimentalement les lois suivantes :

– pour la cause k, à l'exclusion des accidents :

$$\text{Log } q_{oi}^{(k)} = -a_k - c_k\, t_i \exp\{-\lambda_k\, t_{oi}\} \tag{6}$$

— pour les accidents :

$$\text{Log } q_{oi}^{(a)} = -ht_i - c_a\, t_i \exp\{-\lambda_a\, t_{oi}\} \tag{7}$$

où les coefficients de ces lois sont des paramètres positifs dépendant du sexe et de la période considérée; les paramètres de la première loi dépendant également de la cause étudiée.

3. *MORTALITÉ GÉNÉRALE, ACCIDENTS INCLUS : EXPRESSION ANALYTIQUE*

Données de base

Les données de base sont les quotients annuels de mortalité générale, accidents inclus, tirés de la table de mortalité de la France, établie par l'INSEE pour la période 1966-1970 [3].

Loi de mortalité générale, accidents inclus

Connaissant le quotient annuel de mortalité par maladie q_i et le quotient annuel de mortalité générale, accidents inclus, Q_i, on étudie les variations du rapport $Q_i/q_i = Q_{oi}/q_{oi}$, en fonction de t_o.

On constate qu'on peut ajuster expérimentalement une loi de la forme :

$$\text{Log } \frac{Q_{oi}}{q_{oi}} = c' t_i \exp\{-\lambda' t_{oi}^2\}$$

En tenant compte de la formule (5), on obtient donc la loi suivante, pour la mortalité générale, accidents inclus :

$$\text{Log } Q_{oi} = -ct_i \exp\{-\lambda t_{oi}\} + c' t_i \exp\{-\lambda' t_{oi}^2\} \tag{8}$$

avec, pour le sexe masculin :

$$\begin{cases} c' = 0{,}2646 \\ \lambda' = 0{,}165 \end{cases}$$

pour le sexe féminin :

$$\begin{cases} c' = 0{,}1654 \\ \lambda' = 0{,}160 \end{cases}$$

Les valeurs des coefficients c et λ sont celles indiquées pour la formule (5) :

$$c = 12{,}8942 \text{ et } \lambda = 1{,}130.$$

Calcul pratique

On calcule les rapports Q_i/q_i d'après les tables de mortalité. Connaissant la relation entre t et t_o, on en déduit graphiquement les valeurs de ce rapport en fonction de t_o.

On calcule : $y_i = \text{Log } Q_i/q_i$

puis : $u_i = \text{Log } y_i/t_i$

On ajuste le modèle de régression, par sexe :

$$u_i = a+b\ t_{oi}^2$$

On a : $c = e^a, \lambda = -b$

Résultats

Dans le tableau 1, on a indiqué, par sexe, en fonction de t_o, les valeurs du temps observé t et du coefficient pondéral w, calculées dans l'étude citée précédemment [1]; on a précisé également les valeurs du quotient annuel de mortalité générale calculées d'après la formule (8) ainsi que les valeurs observées.

Interprétation

On propose l'interprétation suivante de la loi de mortalité générale.

Cette loi comporte deux termes, le premier se rapportant à la mortalité par maladie, le deuxième à la mortalité par accident. Dans chacun de ces termes les exponentielles représentent les facteurs d'amoindrissement de l'énergie t avec l'âge, face à la maladie et aux accidents respectivement. Cet amoindrissement est d'autant plus important que les coefficients λ et λ' sont plus élevés. Ces coefficients seraient de nature endogène.

Les coefficients c et c', par contre, seraient de nature exogène, liés aux progrès de la médecine et aux conditions extérieures. La mortalité par maladie diminue quand la valeur de c augmente; la mortalité par accident diminue quand la valeur de c' diminue.

Validité des résultats

Dans la formule proposée pour la loi de mortalité générale, le terme complémentaire, correspondant à la mortalité accidentelle, a été choisi pour sa simplicité et pour sa ressemblance avec celui représentant la mortalité par maladie, c'est en effet, comme ce dernier, le produit de l'énergie t par une exponentielle. D'autres expressions auraient, sans doute, été possibles.

TABLEAU 1

Temps observé, coefficient pondéral, quotient de mortalité, par sexe, en fonction du temps propre

Temps propre t_{oi}	Temps observé calculé (1) t_i	Coefficient pondéral w_i	Quotient annuel de mortalité pour 100 000	
			calculé q_i	observé q_i (obs.)
		Sexe masculin		
0	0	1,2027	8315	...
0,5	0,366	1,6839	446	...
1	1,121	2,6025	46	100
1,5	2,512	3,9430	7	9
2	4,711	5,5924	4	6
2,5	7,827	7,6268	7	5
3	12,152	10,6020	10	4
3,5	18,326	14,9769	14	13
4	26,943	19,8061	19	17
4,5	37,640	22,3671	31	29
5	48,700	20,7875	66	76
5,5	58,166	16,4744	150	170
6	65,570	12,7569	326	330
6,5	71,206	4,9680	1180	520
		Sexe féminin		
0	0	1,2389	8072	...
0,5	0,392	1,7937	336	...
1	1,199	2,7474	29	90
1,5	2,688	4,1916	6	11
2	5,041	5,9612	3	4
2,5	8,375	8,1367	3	3
3	13,003	11,3190	5	4
3,5	19,609	16,0051	8	6
4	28,829	21,1834	12	8
4,5	40,275	23,9373	22	17
5	52,109	22,2586	50	46
5,5	62,238	17,6443	123	100
6	70,160	13,6799	280	230
6,5	76,190	5,5515	1014	420

1. A partir de la conception.

4. *MORTALITÉ GÉNÉRALE, ACCIDENTS INCLUS : VARIATIONS DANS LE TEMPS*

DONNÉES DE BASE

On a choisi les tables de mortalité pour lesquelles on disposait de la série rétrospective homogène la plus longue dans le temps. Ce sont les tables de mortalité abrégées établies d'abord par l'INED (Institut national d'études démographiques) puis par l'INSEE (Institut national de la statistique et des études économiques) depuis la fin du XVIII^e siècle [7]. Ces tables donnent les taux annuels moyens de mortalité, accidents inclus, par groupe d'âge, suivant le sexe, pour les périodes suivantes : vers 1770, par période de trois ans entourant chaque recensement depuis celui de 1806 jusqu'à celui de 1954 et ensuite par année. Les groupes d'âge sont : moins d'un an, 1-4, puis des groupes d'âge décennaux jusqu'au recensement de 1946 et quinquennaux au-delà.

On a admis que, pour un sexe donné, le taux annuel moyen d'un groupe d'âge était égal au quotient annuel de mortalité Q_i de l'âge central i de ce groupe d'âge.

Calcul pratique

Connaissant la relation entre t et t_o, on en déduit graphiquement les valeurs du quotient annuel Q_i pour différentes valeurs de t_o. On calcule ensuite : $Q_{oi} = Q_i w_i$. Pour un sexe donné et par période, on ajuste sur les valeurs de Q_{oi} la loi de mortalité générale donnée par la formule (8).

On a constaté précédemment, pour la période 1966-1970, que les valeurs correspondant à la mortalité par accident étaient petites par rapport à celles de la mortalité par maladie et qu'elles étaient pratiquement constantes sauf pour les valeurs extrêmes de t_o. On en déduit qu'on peut découper l'ajustement en deux phases.

Dans une première étape, on considère l'expression :

$$\text{Log}\ Q_{oi} = -ct_i \exp\{-\lambda t_{oi}\} + h$$

où h est une constante.

Pour différentes valeurs de h, on calcule :

$$u_i = \frac{1}{t_i}[-\text{Log}\ Q_{oi} + h]$$

On ajuste ensuite le modèle de régression linéaire :

$$\text{Log}\ u_i = \text{Log}\ c - \lambda t_{oi}$$

On conserve la valeur de h pour laquelle l'ajustement est le meilleur.

On en déduit les valeurs des coefficients c et λ correspondantes.

Dans une deuxième étape, on considère l'expression :

$$h = c' t_i \exp\{-\lambda' t_{oi}^2\}$$

On calcule : $v_i = \text{Log}\ h/t_i$

On ajuste, sur les valeurs de t_o comprises entre 1,5 et 4, le modèle de régression linéaire :

$$v_i = \text{Log}\ c' - \lambda' t_{oi}^2$$

On en tire les valeurs des coefficients c' et λ'.

On remarquera que l'hypothèse faite sur la constance de h avec l'âge conduit à admettre que, pour un sexe donné, le coefficient λ' reste constant quelle que soit la période étudiée.

Supposons, en effet, que h prenne les valeurs h_1 et h_2 pour les périodes 1 et 2. On ajuste :

— pour la période 1 : $v_{1i} = \text{Log}\ c_1' - \lambda_1' t_{oi}^2$

— pour la période 2 : $v_{2i} = \text{Log}\ c_2' - \lambda_2' t_{oi}^2$

Or :

$$v_{1i} = \text{Log}\ \frac{h_1}{t_i}$$

$$v_{2i} = \text{Log}\ \frac{h_2}{t_i} = \text{Log}\ \frac{h_1}{t_1} + \text{Log}\ \frac{h_2}{h_1}$$

On en déduit :

$$v_{1i} = \text{Log}\ c_2' - \text{Log}\ \frac{h_2}{h_1} - \lambda_2'\ t_{io}^2$$

d'où :

$$\lambda_2' = \lambda_1'$$

$$\text{Log}\ c_2' = \text{Log}\ c_1' + \text{Log}\ \frac{h_2}{h_1}$$

Résultats

Le tableau 2 donne, suivant le sexe, les valeurs des coefficients de la loi de mortalité générale. On a indiqué les valeurs moyennes de ces paramètres par période d'une dizaine ou d'une vingtaine d'années environ, afin d'éliminer les fluctuations aléatoires.

Tableau 2

Valeurs des paramètres de la loi de mortalité générale, accidents inclus, par période, suivant le sexe

$$\text{Log } Q_{oi} = -ct_i \exp\{-\lambda t_{oi}\} + c't_i \exp\{-\lambda' t_{oi}{}^2\}$$

Période	Sexe masculin				Sexe féminin			
	c	λ	c'	λ'	c	λ	c'	λ'
Vers 1770	3,2472	0,860	0,5276	0,165	3,6770	0,917	0,4842	0,160
1805-1822	3,1718	0,891	0,2708	0,165	3,9056	0,938	0,3667	0,160
1825-1847	3,2005	0,891	0,2538	0,165	3,8122	0,955	0,2947	0,160
1850-1872	3,4004	0,895	0,2565	0,165	3,8748	0,951	0,2853	0,160
1875-1897	3,7773	0,896	0,3119	0,165	4,2173	0,956	0,2836	0,160
1900-1912	4,7016	0,932	0,3429	0,165	4,9303	0,973	0,2875	0,160
1920-1937	5,4282	0,952	0,3045	0,165	5,4707	0,979	0,2614	0,160
1946-1955	6,8599	0,941	0,3752	0,165	7,0287	0,969	0,2585	0,160
1961-1975	9,1166	1,017	0,2206	0,165	8,9200	1,000	0,1835	0,160
1976-1985	10,2554	1,064	0,0585	0,165	9,6302	1,025	0,0341	0,160

— Paramètre λ.

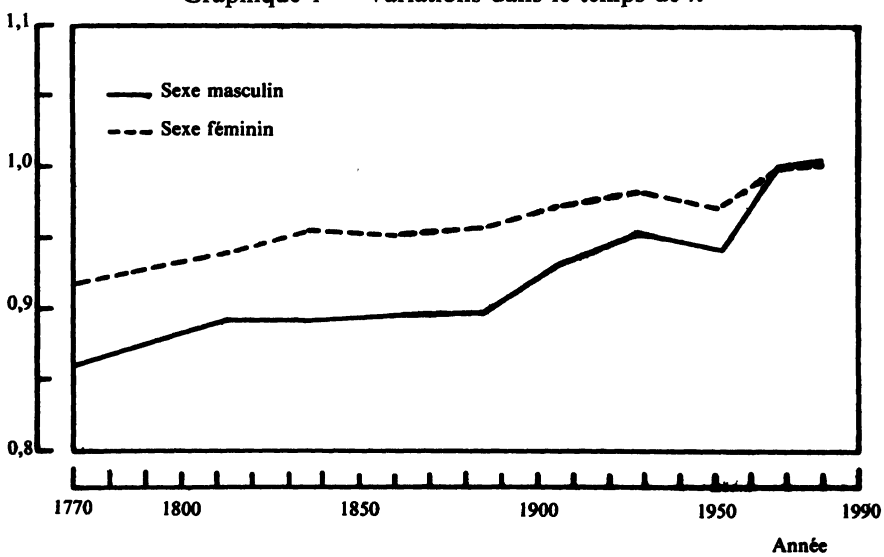
On constate, pour les deux sexes, une augmentation dans le temps de la valeur de λ. Cela correspond, d'après l'hypothèse faite, à un amoindrissement de l'énergie dans le temps, face à la maladie.

Pour le sexe masculin, la valeur du paramètre est 0,860 vers 1770; elle reste à peu près constante (0,893 en moyenne) entre 1805 et 1897; elle augmente ensuite jusqu'à 0,952 en 1920-1937; après une diminution due à la guerre, elle augmente à nouveau pour atteindre 1,064 en 1976-1985.

La valeur du paramètre, pour le sexe féminin, suit les mêmes mouvements. Elle est restée supérieure à celle du sexe masculin jusqu'en 1946-1955; elle lui est maintenant très légèrement inférieure. L'écart relatif entre la valeur du sexe féminin et celle du sexe masculin a été de 6 pour cent environ jusqu'en 1875-1897; il a baissé ensuite jusqu'à 3 pour 100 en 1946-1955 et −3,6 pour 100 en 1976-1985.

Ces résultats sont illustrés par le graphique 1.

Graphique 1 — Variations dans le temps de λ



— Paramètre λ'

D'après l'hypothèse faite, le paramètre λ' reste constant dans le temps, suivant le sexe. Il s'ensuit que l'amoindrissement de l'énergie, face aux accidents, reste également constant.

La valeur de λ' est 0,165 pour le sexe masculin et 0,160 pour le sexe féminin.

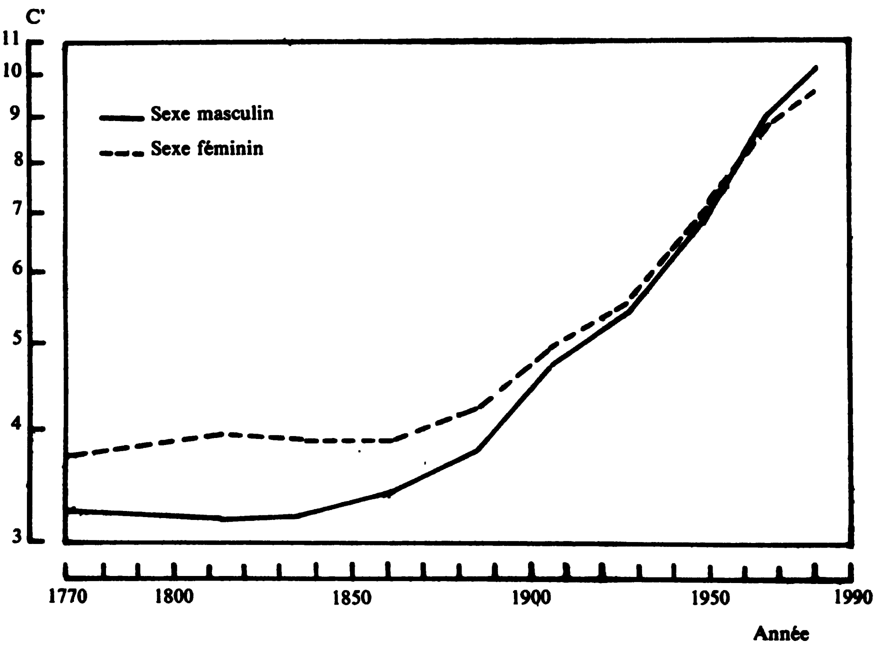
— Paramètre *c*

La valeur du paramètre *c* croît régulièrement dans le temps pour les deux sexes, ce qui correspond à une diminution de la mortalité par maladie, due aux progrès de la médecine et aux conditions extérieures.

Pour le sexe masculin, *c* passe de 3,17 en 1805-1822 à 10,26 en 1976-1985. La valeur *c*, pour le sexe féminin, qui était supérieure à celle du sexe masculin jusqu'en 1946-1955, lui est maintenant inférieure. L'écart relatif entre la valeur du sexe féminin et celle du sexe masculin a diminué progressivement dans le temps, passant de 23 pour 100 en 1805-1822 à −6 pour 100 en 1976-1985.

Ces résultats sont illustrés par le graphique 2.

Graphique 2 — Variations dans le temps de *c*



— Paramètre *c'*

Pour le sexe masculin, le paramètre *c'* reste à peu près constant entre 1805-1822 et 1850-1872 (0,26 en moyenne); il augmente ensuite jusqu'à 0,34 en 1900-1912; mise à part une hausse due à la guerre (0,38 en 1946-1955), il diminue ensuite rapidement jusqu'à 0,06 en 1976-1985.

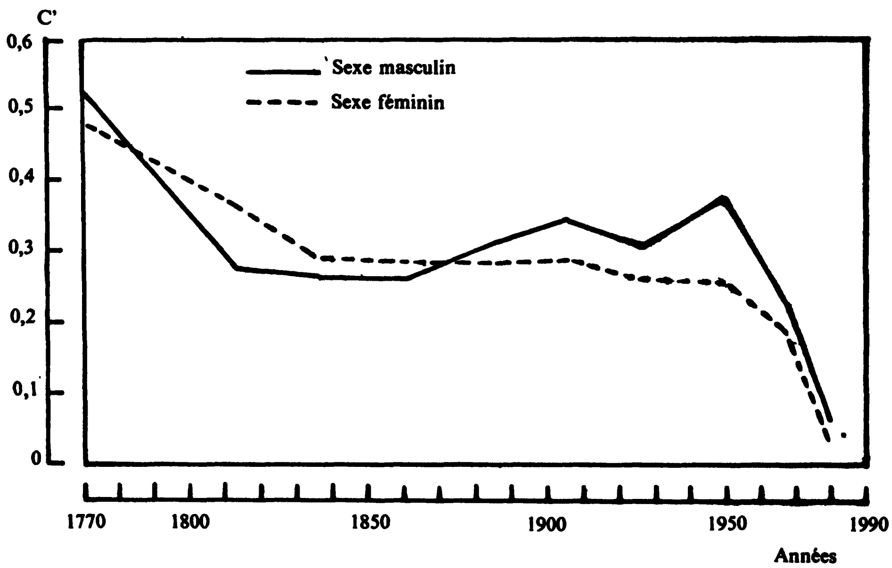
Après une diminution de 0,37 en 1805-1822 à 0,29 en 1825-1847, le paramètre *c'* du sexe féminin reste à peu près constant jusqu'en 1946-1955 (0,28 en moyenne); il diminue ensuite rapidement jusqu'à 0,03 en 1976-1985.

Les valeurs du paramètre pour le sexe féminin sont supérieures à celles du sexe masculin jusqu'en 1850-1872, elles lui sont inférieures après cette période.

On notera qu'une diminution de la valeur de c' correspond à une diminution de la mortalité par accident.

Ces résultats sont illustrés par la graphique 3.

Graphique 3 — Variations dans le temps de c'



VALIDITÉ DES RÉSULTATS

Par suite des erreurs d'observation portant sur les tables de mortalité, en particulier pour les plus anciennes, les valeurs obtenues pour les paramètres de la loi doivent être considérées comme des approximations des valeurs réelles.

L'hypothèse de la constance dans le temps du paramètre λ', à laquelle on a abouti dans l'ajustement des paramètres du terme relatif à la mortalité accidentelle, semble plausible tout au moins en première approximation.

Enfin, l'interprétation donnée pour la signification des paramètres de la loi doit être considérée comme une des explications possibles.

CONCLUSION

L'utilisation du temps propre, défini à partir des variations de poids avec l'âge, avait permis d'obtenir une forme particulièrement simple pour la loi de mortalité par maladie à partir de la conception. On a montré, dans cette étude, que cette méthode fournissait également une forme simple à la loi de mortalité générale, accidents inclus.

L'autre intérêt de ce changement d'échelle des temps est la possibilité d'interpréter les paramètres de la loi. Elle permet de distinguer, par exemple, les facteurs endogènes d'origine biologique et les facteurs exogènes liés aux progrès de la médecine et au milieu extérieur.

RÉFÉRENCES

1. DAMIANI P. — Recherche d'une loi générale de mortalité. Journal de la Société de statistique de Paris, tome 126, nº 2, 1985, 63-76.
2. DAMIANI P. — Évolution du poids du corps humain avec l'âge. Journal de la Société de statistique de Paris, tome 118, nº 2, 1977, 154-164.
3. DINH Q.C. — Table de mortalité de la population de la France pour la période 1966-1970. Collection de l'INSEE, D49, novembre 1976, 3-96.
4. DAMIANI P., MASSÉ H. — Loi de mortalité par cause. Journal de la Société de statistique de Paris, tome 128, nº 3, 1987, 163-170.
5. DAMIANI P. — Loi de mortalité par accident. Journal de la Société de statistique de Paris, tome 128, nº 4, 1987, 232-238.
6. AUBENQUE M., DAMIANI P., DERUFFE L. — La mortalité par cause en France de 1925 à 1974. Journal de la Société de statistique de Paris, tome 119, nº 3, 1978, 276-295.
7. Annuaire statistique de la France, 1966. Résumé rétrospectif. INSEE.
   — La situation démographique. Publication annuelle. Collection de l'INSEE, série D.