JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

JSFS

Jeux

Journal de la société statistique de Paris, tome 134, nº 2 (1993), p. 99-102

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1993__134_2_99_0>

V

SSF JEUX

Le JOURNAL est heureux de proposer à ses lecteurs de tester leur sagacité en trouvant la solution de petits problèmes mathématiques logico-probabilités. Cette chronique est proposée et réalisée par un de nos membres qui souhaite garder l'anonymat.

Le JOURNAL étant trimestriel, nous proposons trois problèmes.

1 Paul et Caroline

Paul et Caroline ont rendez-vous sous l'Arc de Triomphe entre onze heures et midi (sans précision). Chacun d'eux y arrivera à un instant quelconque, pendant cette heure ; puis, un quart d'heure plus tard, s'il ne voit pas l'autre, il quittera les lieux.

Quelle est la probabilité pour que Paul et Caroline se rencontrent effectivement ?

2 « Sensible » ou « sensitive » ?

Lors d'une composition de thème anglais, je m'arrête devant la difficile traduction de la phrase suivante : « Nancy a du bon sens ». Dois-je utiliser l'adjectif *sensible* ou l'adjectif *sensitive* ? Si je réponds au hasard, j'ai une chance sur deux de me tromper. Je pourrais à la rigueur copier sur mon voisin, mais je sais par expérience qu'il se trompe une fois sur cinq dans ce genre de traduction. De plus, il y aurait une chance sur dix que le professeur me prenne en flagrant délit, et je serais alors dans une situation trois fois plus ennuyeuse que si j'avais seulement donné une réponse fausse.

Que me conseilleriez-vous alors, en faisant abstraction de toute règle de morale : copier sur mon voisin, ou bien répondre au hasard sensible *ou* sensitive ?

3 En jouant aux cartes

« Prenez une carte au hasard dans mon jeu et remettez-la. Faites ceci 3 fois. Vous avez 19 chances sur 27 d'obtenir ainsi au moins une figure (roi, dame ou valet). Car la proportion de figures dans mon jeu est de ... »

Complétez, s'il vous plaît, la dernière de ces phrases.

EURÊKA

La solution sera donnée dans le numéro 3 de 1993.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES PRÉSENTÉS DANS LE N° 1 DE 1993

1. LA BANDE DE JEUNES

Une bande de jeunes gens comporte trois garçons et trois filles. Chacun de ces jeunes gens est amoureux d'une des trois personnes du sexe opposé choisie au hasard. L'une des jeunes filles constate mélancoliquement que, dans cette bande, personne n'est aimé de celui qu'il aime. Ce triste phénomène était-il si imprévisible ?

Soit F_1, F_2 et F_3 les trois filles ; soit G_1, G_2 et G_3 les trois garçons. Dénombrons les possibilités grâce à un arbre.

Le nombre total de terminaisons correspondant au triste phénomène de non-réciprocité des amours est de $3 \times 52 = 156$. Le nombre de possibilités était de : $3^6 = 729$. La probabilité du phénomène est ainsi : $156 / 729 = 0{,}214$. Il n'est donc pas si rare ! (plus d'une chance sur 5).

2. COMBIEN SOMMES-NOUS ?

A vous de le trouver, sachant que la probabilité pour que deux au moins d'entre nous aient leur anniversaire le même jour, est inférieur à 1/2, mais que cela ne serait plus vrai si nous étions un de plus.

Probabilité pour que deux personnes aient des jours anniversaires différents : 364 / 365.

Pour trois personnes : (364 / 365).(363 / 365), etc.

Pour n personnes : (364 / 365).(363 / 365)... $(365 - n + 1) / 365$).

Ce produit de quotient devient inférieur à 1/2 lorsque n passe de 22 à 23 : nous sommes ainsi 22 personnes présentes.

3. CHEZ LES CANNIBALES

Trois jeunes couples, las de passer des vacances passives dans les résidences secondaires de leurs parents respectifs, décidèrent d'aller visiter des contrées sauvages de l'Afrique. Malheureusement, ils furent enlevés par des cannibales qui, avant de les manger, les pesèrent. Le poids total des 6 touristes n'était pas un nombre entier tandis que celui des épouses était exactement de 171 kg. Léon pesait autant que sa femme, Victor une fois et demi de plus et Maurice deux fois plus. Georgette pesait 10 kg de plus que Simone, qui pesait elle-même 5 kg de moins qu'Elisabeth. Mais les problèmes de poids traînaient un peu et, par miracle, cinq des six jeunes gens purent alors s'échapper. Seul le mari d'Elisabeth fut mangé. Combien pesait-il ?

Considérons d'abord les trois épouses (poids total = 171 kg). Soit s le poids de Simone. Elisabeth a pour poids $s + 5$ et Georgette, $s + 10$. Nous avons donc l'équation : $3s + 15 = 171$, d'où il résulte : $s = 52$.

Elisabeth pèse ainsi 57 kg et Georgette, 62 kg. Notons qu'Elisabeth est la seule dont le poids s'exprime par un nombre impair.

Considérons alors les trois époux. Le poids total des six jeunes gens n'est pas un nombre entier. Or nous savons qu'un des époux pèse le même poids que sa femme, un autre - Victor - une fois et demi plus, un autre enfin deux fois plus. Victor doit donc être l'époux d'une femme dont le poids exprimé en kilos est un nombre impair : c'est le mari d'Elisabeth. C'est lui qui sera mangé... Il pèse 85,5 kg.

PROBLÈME 2 : Solution générale

par Gérald PETIT
(INSEE)

Problème

Dans un groupe de n *filles et* n *garçons, on suppose que chaque individu en aime un autre du sexe opposé et « au hasard ». Après avoir formulé plus précisément le « au hasard », trouver la probabilité qu'aucun individu ne soit aimé de celui (celle) qu'il aime.*

Solution

1) Par « au hasard », on entendra la situation suivante. La relation « f aime g » de l'ensemble des n filles dans l'ensemble des n garçons définit une application par hypothèse. De même pour la relation symétrique « g aime f ». Par croisement, il y a $n^n \cdot n^n$ couples de telles applications, chaque couple sera considéré comme cas possible et tous les cas possibles seront considérés comme équiprobables.

Les cas « favorables » sont les couples (F, G) d'applications telles que pour chaque fille f, l'ensemble des garçons qui aiment $f(G^{-1}(f))$ ne contienne pas celui qu'aime $f(F(f))$; on a alors implicitement la situation symétrique, pour tout garçon g, l'ensemble des filles qui aiment g ne contient jamais celle qu'aime g).

Pour chaque fille f, le nombre de garçons qui l'aiment peut contenir 0, ... n éléments. On définit ainsi n sous-ensembles de garçons, chacun associé à une fille, de cardinaux $u_1, ..., u_n$, avec

$$0 <= u_f <= n \quad \text{et} \quad \sum_i u_f = n$$

Le garçon qu'aime la fille i doit ne pas appartenir au sous-ensemble associé à i, ce qui laisse $n - u_i$ garçons possibles « à aimer », ceci pour chaque fille i.

Le nombre total de combinaisons telles que u_1 garçons aiment la fille 1, ..., u_n garçons aiment la fille n, vaut $\dfrac{n!}{u_1! \dots u_n!}$.

A chacune de ces combinaisons, on peut associer $(n - u_1) \dots (n - u_n)$ applications « f aime g ».

Le nombre total de cas favorables vaut finalement

$$\sum_{u_1 + \dots + u_n = n} (n - u_1) \dots (n - u_n) \frac{n!}{u_1! \dots u_n!} = t_n$$

2) On a $t_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot (C_n^k)^2 \cdot k! \cdot n^{2(n-k)}$.

En effet, en développant le produit $(n - u_1) \ldots (n - u_n)$, on obtient d'abord :

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, \ldots, i_k} \sum_{u_1 + \ldots + u_n = n} (-1)^k \cdot n^{n-k} \cdot n! \cdot \frac{u_{i_1} \ldots u_{i_k}}{u_1! \ldots\ldots u_n!}$$

où la deuxième sommation s'étend aux sous-ensembles de 1, ..., n à k éléments repérés par des indices $i_1, \ldots, i_k$.

Par ailleurs, en utilisant la formule du multinôme, il est facile de voir que :

$$\sum_{u_1 + \ldots + u_n = n} n! \cdot \frac{u_{i_1} \ldots u_{i_k}}{u_1! \ldots\ldots u_n!} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot n^{n-k} = C_n^k \cdot k! \cdot n^{n-k}$$

pour tout sous-ensemble $i_1, \ldots, i_k$ de 1, ..., n à k éléments.

En outre, il existe C_n^k tels sous-ensembles, d'où la formule.

3) La probabilité $p_n = \frac{t_n}{n^{2n}}$ de l'événement considéré converge vers e^{-1} lorsque n tend vers l'infini.

En effet, on a successivement :

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \right)^2,$$

$$p_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \varphi_{n,k} \quad \text{avec} \quad \varphi_{n,k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^2 \quad \text{pour} \quad k \geq 2,$$

$$1 - \frac{2k(k-1)}{n} \leq \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^{2k} \leq \varphi_{n,k} \leq 1 \text{ avec } k \geq 2 \text{ et } k \leq n$$

Ainsi $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = \lim\limits_{n \to \infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - = e^{-1}$.

4) $\frac{t_3}{3^{2 \cdot 3}} = \frac{156}{729}$, soit un peu plus de 21 % de chances que l'événement considéré se réalise avec deux groupes de trois personnes chacun.

Conclusion : nous avons démontré que, lorsque le nombre de couples croît indéfiniment, la probabilité que « personne n'aime celui (celle) qui l'aime » tend vers une limite finie identique à celle que l'on trouverait dans le cas du fameux problème des « lettres et des enveloppes » : n lettres destinées à n personnes différentes sont mises au hasard dans les n enveloppes nominales. Trouver la probabilité que personne ne reçoive la lettre qui lui était destinée.