Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

M. Mendès France

Sur certains produits infinis

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 1, nº 1 (1989), p. 157-162

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1989__1_1_157_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux, **1**, *157–162(1989)*

Sur certains produits infinis

par M. MENDÈS FRANCE

Ceci est un résumé d'un article à paraître écrit conjointement avec A. van der Poorten [1].

On considère le système dynamique plan

$$\begin{cases} x_{n+1} = F(x_n, y_n) \ , \ x_0 = x \\ y_{n+1} = G(x_n, y_n) \ , \ y_0 = 1 \end{cases}$$

où F et G sont deux fonctions homogènes de degré 1. On se propose d'étudier le point limite (s'il existe) quand n tend vers l' infini.

On pose

$$\phi(t) = \frac{F(x,y)}{G(x,y)} = \frac{F(t,1)}{G(t,1)}, (t = \frac{x}{y}).$$

Soit ϕ^ν la ν^e itérée de ϕ. Alors

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \phi(\frac{x_n}{y_n}) = \cdots = \phi^{n+1}(x).$$

Par ailleurs,

$$x_{n+1} = x_n \ F(1, \frac{y_n}{x_n}) = F(1, \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}})F(1, \frac{y_n}{x_n})x_{n-1} = x \prod_{k=0}^{n} F(1, \frac{1}{\phi^k(x)}).$$

De même

$$y_{n+1} = \prod_{k=0}^{n} G(\phi^k(x), 1).$$

Supposons que pour n infini, ces produits convergent ou du moins tendent vers des limites finies ou infinies :

Manuscrit reçu le 28 mars 1989

$$x_\infty = x \prod_{n=0}^{\infty} F(1, \frac{1}{\phi^n(x)})$$

$$y_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} G(\phi^n(x), 1).$$

Il s'agit de donner -si possible- une expression "fermée" de ces produits.

Admettons -tout le problème est là- qu'on connaisse une "intégrale première" V du système dynamique, c'est-à-dire un invariant

$$V(F(x,y), G(x,y)) = V(x,y).$$

Dès lors

$$V(x_{n+1}, y_{n+1}) = V(x_n, y_n)$$

et sous réserve de continuité,

$$V(x_\infty, y_\infty) = V(x, 1).$$

Si donc $x_\infty (resp. y_\infty)$ est connu, alors $y_\infty (resp. x_\infty)$ s'en déduit.

On a utilisé ce principe pour retrouver tous les produits infinis contenus dans deux très jolis articles d'A. Ostrowski [2],[3]. Dans ce résumé, on se contente d'en citer deux.

Exemple 1 (Euler)

En choisissant

$$\begin{cases} F(x,y) = \dfrac{x^2}{x+y} \\ G(x,y) = \dfrac{y^2}{x+y} \end{cases}$$

On trouve

$$\phi(t) = t^2 \ , \ V(x,y) = x - y$$

d'où on déduit

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} \ , \ |x| < 1$$

Exemple 2

On considère

$$\begin{cases} F(x,y) = \dfrac{(x+y)(2y^2-x^2)}{xy} \\ G(x,y) = \dfrac{x+y}{x}y \end{cases}$$

On obtient

$$\phi(t) = 2 - t^2.$$

Avec un peu de patience, on découvre que

$$V(x,y) = y^2\frac{x^2-4y^2}{(x-y)^2}.$$

Pour $|x| > 2$, on a $x_\infty = \infty$ d'où on déduit

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+\frac{1}{\phi^n(x)}) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{|x-1|} \quad ,|x| \geq 2.$$

L'an dernier j'exposais ces résultats à Oberwolfach. A. Schinzel qui était présent s'est souvenu que le produit ci-dessus intervient de façon inattendue dans un problème d'arithmétique qu'il avait étudié vingt ans auparavant [4].

Soit $q(m)$ le plus grand facteur premier de l'entier m. Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme de degré $\nu \geq 2$. Schinzel montrait que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log q(f(n))}{\log|f(n)|} \leq \begin{cases} \frac{1}{2}P(4) \text{ si } \nu = 2 \\ \frac{1}{2}P(6) \text{ si } \nu = 3 \\ \quad P(\nu) \text{ si } \nu \geq 4 \end{cases}$$

$P(\nu)$ désigne le produit infini

$$P(\nu) = \prod_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{u_n})$$

où $u_0 = \nu - 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2$. En posant $v_n = -u_n$, on trouve, à des notations près le produit de l'exemple 2. Ainsi

$$P(\nu) = \frac{\sqrt{(\nu+1)(\nu-3)}}{\nu} \quad , \ \nu \geq 3.$$

Pour terminer cette étude, citons un résultat qui étend légèrement un théorème d'Ostrowski.

THÉORÈME. *Soit ϕ une fonction rationnelle sur un sous corps $k \subset \mathbf{C}$. Supposons que dans un domaine $D \subset \mathbf{C}, \phi^n(x)$ tend vers une limite ℓ indépendante de x. Soit H une application continue définie dans D. Si le produit*

$$y(x) = \prod_{n=0}^{\infty} H(\phi^n(x))$$

converge dans D et est algébrique de degré r, alors $y(x)$ est la racine r^e d'une fonction rationnelle.

PREUVE: Par hypothèse $y = y(x)$ est solution d'une équation polynomiale de degré r (minimal)

$$y^r + a_{r-1}(x)y^{r-1} + ... + a_0(x) = 0$$

où les $a_j(x)$ sont dans $k(x)$. On a aussi

$$y^r(\phi) + a_{r-1}(\phi)y^{r-1}(\phi) + ... + a_0(\phi) = 0.$$

Or

$$y(\phi) = \prod_{n=0}^{\infty} H(\phi^{(n+1}(x)) = \frac{y(x)}{H(x)}$$

donc

$$y^r(x) + H(x)a_{r-1}(\phi)y^{r-1}(x) + ... + H^r(x)a_0(\phi) = 0.$$

Le polynôme minimal étant unique, on en déduit

$$\begin{aligned} a_0(x) &= H^r(x)a_0(\phi) \\ &= H^r(x)H^r(\phi)...H^r(\phi^{n-1})a_0(\phi^n) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} a_0(x) &= y^r(x) \lim_{n\to\infty} a_0(\phi^n) \\ &= y^r(x).a_0(\ell) \end{aligned}$$

Bref

$$y^r(x) = \frac{a_0(x)}{a_0(\ell)}.$$

Ceci implique $a_0(\ell) = -1$ et $y(x) = (-a_0(x))^{\frac{1}{r}}$. CQFD

Remarque : La condition "$\phi^n(x) \to \ell$" peut être remplacée par "H inversible". En effet, la convergence du produit infini implique $H(\phi_n(x)) \to 1$ d'où $\phi^n(x) \to H^{-1}(1)$.

Apostille : J. Fresnel me signale que les seules courbes $V(x,y) =$ const. intéressantes dans notre contexte sont de genre zéro.

RÉFÉRENCES

[1] M. Mendès France, A. Van der POORTEN, *From geometry to Euler identities.* (à paraître).

[2] A. Ostrowski, *Sur quelques généralisations du produit d'Euler* $\prod_{\nu=0}^{\infty}(1+x^{2^\nu})$,, CRAS Paris, séance du 23 janvier 1930. (in Collected Math. Papers, vol. 3, Birkhauser, 1984).

[3] A. Ostrowski, *Über einige Verallgemeinerungen des Eulerschen Produktes* $\prod_{\nu=0}^{\infty}(1+x^{2^\nu}) = \frac{1}{1-x}$, Verh. Naturf. Ges. Basel 11, 1929, 153–214 (in Collected Mathematical Papers, vol. 3, Birkhauser 1984).

[4] A. Schinzel, *On two theorems of Gelfond and some of their applications*, Acta Arith. **13** (1967), 177–236.

Mots clefs : Produits infinis, systèmes dynamiques

1980 *Mathematics subject classifications*: 11D23, 12D99.

Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 Talence FRANCE.