JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

HASSAN OUKHABA

GILLES ROBERT

Étude d'un idéal particulier, d'indice fini dans le carré de l'idéal d'augmentation, associé à un caractère de Dirichlet d'un groupe fini

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 3, nº 1 (1991), p. 117-127

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1991__3_1_117_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux **3** *(1991), 117-127*

Étude d'un idéal particulier, d'indice fini dans le carré de l'idéal d'augmentation, associé à un caractère de Dirichlet d'un groupe fini.

par HASSAN OUKHABA ET GILLES ROBERT

Abstract — *We describe here two sets of generators of an ideal* $\Delta(\psi) = M(\psi)$, *of finite index inside the square* I^2 *of the augmentation ideal* I *of* $\mathbb{Z}[G]$, *associated to the Dirichlet character* ψ *of the finite group* G.

That peculiar ideal first appeared in questions related to the computation of class number formulas for abelian non ramified extensions of $\mathbb{A}$*-fields cf. [2] and [3], satisfying certain special conditions which are outlined in the introduction of [1].*

A rough idea of these formulas is given in §§2 and 6.

Introduction

Soit μ un entier > 0, et G un groupe fini. Soit I l'idéal d'augmentation de l'anneau de groupe $\mathbb{Z}[G]$. On donne ici deux descriptions d'un idéal $\Delta(\psi)$ contenu dans I^2, et associé à un caractère de Dirichlet

$$\psi : G \to (\mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})^\times \ .$$

La seconde (*cf.*th.2) se rencontre dans deux situations où cet idéal $\Delta(\psi)$ apparaît naturellement : celle datant d'il y a environ 12 ans envisagée par D. Kersey dans [2], chap. 9, §4.5, et celle plus récente envisagée par H. Oukhaba [3]. Le groupe G est alors abélien et l'application ψ définie par la norme, via l'isomorphisme de réciprocité d'Artin, *cf.* §§2 et 6 ci-dessous.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). 11.
Mots clefs: Groupe fini, congruence, caractère de Dirichlet, formule pour le nombre de classes.
Manuscrit reçu le 15 janvier 1991 .

Quant à la première description (*cf.*th.1), adoptée ici comme définition de $\Delta(\psi)$, elle rend commode le calcul de son indice $[I^2 : \Delta(\psi)]$ dans I^2. Celui-ci apparaît dans les calculs des formules pour le nombre de classes considérées dans [2] et [3] *cf.* aussi §6 ci-dessous.

1) Soit μ un entier > 0, et G un groupe fini. On considère un homomorphisme $\psi : G \longrightarrow (\mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})^\times$, et on note

$$\Psi : \psi(G) \longrightarrow (\mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})^\times$$

l'homomorphisme injectif induit par ψ.

Pour un certain diviseur positif ν de μ, le $\mathbb{Z}$-module engendré par les nombres $\psi(c) - 1$, $c \in G$, regardés dans $\mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z}$, est de la forme

$$\nu\mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z} .$$

L'entier ν ne dépend que de Ψ.

Dans l'anneau de groupe $\mathbb{Z}[G]$, formé des sommes $\sum_{c \in G} n_c(c), n_c \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\begin{aligned}[c, c'] &\overset{\text{dfn}}{=} ((1) - (c)).((1) - (c')) \\ &= (1) + (cc') - (c) - (c')\end{aligned}$$

pour tous $c, c' \in G$.

Remarques. i) Soit $I \subseteq \mathbb{Z}[G]$ l'idéal d'augmentation de $\mathbb{Z}[G]$, défini par $\sum n_c = 0$. Lorsque c et c' parcourent G, l'idéal I^2 est engendré par les $[c, c']$.

ii) On a $[c, c'] = [c', c]$ si et seulement si c et c' commutent entre eux.

Définition. *On désigne par $\Delta(\psi)$ le sous-module de $\mathbb{Z}[G]$ formé des sommes*

$$\sum_{c, c' \in G} n_{c,c'} [c, c']$$

où les entiers rationnels $n_{c,c'}$ vérifient la congruence

$$(1) \qquad \sum_{c, c' \in G} n_{c,c'} \left(\frac{\psi(c) - 1}{\nu}\right) \left(\frac{\psi(c') - 1}{\nu}\right) \equiv 0 \quad (\mu/\nu).$$

Vu les formules ci-dessous de multiplicativité à gauche et à droite

$$(2) \qquad \begin{cases} (c_0)[c,c'] = [c,c'] + [c_0, cc'] - [c_0, c] - [c_0, c'] \\ [c,c'](c_0) = [c,c'] + [cc', c_0] - [c, c_0] - [c', c_0], \end{cases}$$

le module $\Delta(\psi)$ est un idéal bilatère de $\mathbb{Z}[G]$. En effet la valeur du membre de gauche de (1) pour chacune des expressions trouvées dans le membre de droite de (2) est

$$\psi(c_0)\left(\frac{\psi(c)-1}{\nu}\right)\left(\frac{\psi(c')-1}{\nu}\right).$$

Plus généralement, il vient :

THÉORÈME 1. *L'application i_ψ, définie par*

$$(3) \qquad i_\psi([c,c']) = \left(\frac{\psi(c)-1}{\nu}\right)\left(\frac{\psi(c')-1}{\nu}\right) \quad (\mu/\nu)$$

et prolongée par linéarité à I^2, est un homomorphisme bien défini de I^2 d'image le groupe additif $\mathbb{Z}/(\mu/\nu)\mathbb{Z}$.

En particulier, l'indice $[I^2 : \Delta(\psi)]$ de $\Delta(\psi)$ dans I^2 vaut μ/ν.

Preuve. Soit s une section de $(\mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})^\times$ dans $(\mathbb{Z}/\nu\mu\mathbb{Z})^\times$, et définissons un homomorphisme $\tilde{\psi}$ de G dans $(\mathbb{Z}/\nu\mu\mathbb{Z})^\times$ par $\tilde{\psi} = s\circ\psi$ de sorte que l'on a

$$\tilde{\psi}(c) \equiv \psi(c) \quad (\mu)$$

pour tous $c \in G$.

La valeur de i_ψ en $[c,c']$ peut encore s'écrire

$$\left(\frac{\tilde{\psi}(c)-1}{\nu}\right)\left(\frac{\tilde{\psi}(c')-1}{\nu}\right) \quad (\mu/\nu).$$

Par suite, on a

$$\nu^2 i_\psi([c,c']) \equiv (\tilde{\psi}(c)-1)(\tilde{\psi}(c')-1) \quad (\nu\mu).$$

Ceci assure que $\nu^2 i_\psi$ est la restriction à I^2 de l'homomorphisme induit par $\tilde{\psi}$

$$\sum n_c(c) \longmapsto \sum n_c\tilde{\psi}(c)$$

de $\mathbb{Z}[G]$ dans le groupe additif $\mathbb{Z}/\nu\mu\mathbb{Z}$. Il s'ensuit que i_ψ est bien défini (et ne dépend pas du choix de la section s).

D'autre part l'application i_ψ est surjective : en effet, il existe par définition des entiers n_c, $c \in G$, tels que

$$\sum_{c\in G} n_c(\psi(c)-1) = \nu \quad (\mu)$$

d'où
$$\sum n_c n_{c'} \left(\tfrac{\psi(c)-1}{\nu}\right)\left(\tfrac{\psi(c')-1}{\nu}\right) = \left(\sum n_c \tfrac{\psi(c)-1}{\nu}\right)\left(\sum n_{c'} \tfrac{\psi(c')-1}{\nu}\right) \equiv 1(\mu/\nu).$$

C'est-à-dire que l'image par i_ψ de la somme

$$\sum_{(c,c')} n_c n_{c'}[c,c']$$

prise sur les couples $(c,c') \in G\times G$ engendre $\mathbb{Z}/(\mu/\nu)\mathbb{Z}$. Le théorème est démontré.

2) On décrit ici deux situations où le module $\Delta(\psi)$ apparaît naturellement.

i) Le cas quadratique imaginaire

Soient K un corps quadratique imaginaire et F une extension abélienne, non ramifiée, de celui-ci. Alors, le groupe noté $\Delta(c_0, ww_F)$ dans D. Kubert & S. Lang [2] chap.9, §4.5, – regardé comme $\mathbb{Z}[G]$-module avec $G = \mathrm{Gal}(F/K)$ – est le cas particulier du module $\Delta(\psi)$ lorsque $\psi = \psi_F$ est le caractère associé à la norme décrit plus bas.

ii) Le cas des corps de fonctions

Soit k un corps de fonctions à une variable de corps résiduel fini. Fixons une place de k, notée ∞, et soit F une extension abélienne, totalement décomposée au-dessus de la place ∞ et non ramifiée, de k. Alors, le groupe noté $\Delta_F(1, w_k w_F)$ dans H. Oukhaba [3] – regardé comme $\mathbb{Z}[G]$-module avec $G = \mathrm{Gal}(F/k)$ – est le cas particulier du module $\Delta(\psi)$ lorsque $\psi = \psi_F$ est le caractère associé à la norme décrit ci-dessous.

iii) Descriptions de ψ_F

Dans les deux cas l'entier μ est le nombre de racines de l'unité w_F de F.

On a la définition suivante de ψ_F : soit A l'anneau des entiers de K (resp. l'anneau des fonctions de k partout entières sauf en la place ∞). Alors, pour chaque élément $\mathfrak{c}$ du groupe de classes d'idéaux de K (resp. k) associé à F, on a

$$\psi_F(\sigma_{\mathfrak{c}}) \equiv N\mathfrak{b} \quad (w_F)$$

où $\sigma_{\mathfrak{c}}$ est l'élément de G associé à $\mathfrak{c}$ par l'application de réciprocité d'Artin, $\mathfrak{b}$ est un idéal de A premier à $w_F A$ et dont la classe appartient à $\mathfrak{c}$, et $N\mathfrak{b} = |A/\mathfrak{b}|$.

L'entier ν tel que $\nu|\mu$ est alors égal au nombre de racines de l'unité w du corps K (resp. k).

3) Soit $\mathcal{S}(\psi)$ l'ensemble des sommes

$$\sum_{c\in G} n_c[c, c'], \; c' \in G ,$$

où les entiers rationnels n_c vérifient la congruence

$$\sum_{c\in G} n_c \left(\frac{\psi(c)-1}{\nu}\right) \equiv 0 \quad (\mu/\nu) \tag{4}$$

et considérons le sous-module $M(\psi)$ de $\mathbb{Z}[G]$ engendré comme $\mathbb{Z}$-module par les éléments de $\mathcal{S}(\psi)$.

LEMME 1. *La congruence (4) assure que la congruence (1) est bien vérifiée de sorte que l'on a l'inclusion*

$$M(\psi) \subseteq \Delta(\psi) .$$

Preuve. Immédiate.

La vérification des deux lemmes suivants est laissée au lecteur :

LEMME 2. *Le module $M(\psi)$ est un idéal bilatère de $\mathbb{Z}[G]$.*

Soit $\pi : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[\psi(G)]$ la projection naturelle induite par ψ. On a :

LEMME 3. *Les idéaux $M(\psi)$ et $\Delta(\psi)$ de $\mathbb{Z}[G]$ sont respectivement les ima ges inverses par π des idéaux $M(\Psi)$ et $\Delta(\Psi)$ de $\mathbb{Z}[\psi(G)]$.*

De plus, on a le lemme suivant dont des variantes ont déjà été notées (dans le cas de $\Delta(c_0, ww_H)$) par Donald Kersey, *cf.* [2] loc. cit. pp.221-222.

LEMME 4. *Soient c, d et e des éléments de G. On a l'égalité*

$$[c, de] - [c, d] = [cd, e] - [d, e]. \tag{5}$$

Preuve. Résulte de l'écriture explicite des deux membres de (5).

On en déduit le résultat suivant :

THÉORÈME 2. *Pour tout groupe fini G et tout caractère de Dirichlet*

$$\psi : G \to (\mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z})^{\times}$$

on a $M(\psi) = \Delta(\psi)$.

Preuve. On va localiser la question. Pour cela, pour chaque nombre premier ℓ, soit $\mu^{(\ell)}$ la plus grande puissance de ℓ divisant μ. On décompose ψ en produit de facteurs ψ_ℓ, ℓ premier, de sorte que

$$\psi = \prod_{\ell} \psi_\ell$$

où ψ_ℓ désigne le composé de ψ avec la projection canonique de $\mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/\mu^{(\ell)}\mathbb{Z}$.

Soit $\nu^{(\ell)}$ le diviseur > 0 de $\mu^{(\ell)}$ engendré par les éléments $\psi_\ell(c)-1$, $c \in G$. Il est aisé de vérifier que

$$\nu = \prod_{\ell} \nu^{(\ell)}$$

et donc que

$$i_\psi = \prod_{\ell} i_{\psi_\ell} ,$$

où i_{ψ_ℓ} désigne l'application associée à ψ_ℓ définie par l'analogue pour ψ_ℓ de la formule (3) du th.1.

Par suite, comme on peut écrire

$$1 = \sum_{\ell | \mu} a(\ell)(\mu/\nu)(\mu^{(\ell)}/\nu^{(\ell)})^{-1}$$

pour des coefficients entiers rationnels $a(\ell)$ convenables, l'égalité $M(\psi) = \Delta(\psi)$ sera prouvée, si l'on peut démontrer que l'on a

$$M(\psi_\ell) = \Delta(\psi_\ell), \ \ell \text{ premier},$$

pour chaque homomorphisme non trivial $\psi_\ell : G \longrightarrow (\mathbb{Z}/\mu^{(\ell)}\mathbb{Z})^\times$.

Or, si ℓ est impair le groupe $\psi_\ell(G)$ est cyclique, tandis que si $\ell = 2$ le groupe $\psi_\ell(G)$ est ou bien cyclique ou bien de la forme $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2^{t-1}$ avec $t \geq 2$.

Le théorème résulte alors de l'analyse faite dans les deux §§ suivants.

4) PROPOSITION 1. *Soit G un groupe fini, et $\mathcal{N} \subseteq G$ un sous-groupe cyclique de générateur a et d'ordre $|\mathcal{N}|$.*

Alors les crochets $[c, a^j]$ avec $c \in G\backslash\{1\}$ et $1 \leq j \leq |\mathcal{N}| - 1$, sont des combinaisons linéaires des crochets $[c, a]$ avec $c \in G\backslash\{1\}$.

Preuve. Soit $\mathcal{U} = \{[c, a] | c \in G\backslash\{1\}\}$. Il résulte de l'égalité (5) du lemme 4, que l'on a

$$[c, a^j] - [c, a^{j-1}] = [ca^{j-1}, a] - [a^{j-1}, a];$$

ainsi le terme $[c, a^j]$ peut être écrit comme une combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{U}$ et d'un terme $[c, a^{j-1}]$; on conclut par récurrence.

COROLLAIRE. *Si le groupe $\psi(G)$ est cyclique, alors on a*

$$M(\psi) = \Delta(\psi)$$

Preuve. D'après le lemme 3, on peut supposer que $\psi = \Psi$, i.e. $G = \psi(G)$.

Soit alors N l'ordre de G, et désignons par a un générateur de celui-ci. D'après la proposition précédente le $\mathbb{Z}$-module engendré par les $[c, c']$, pour c et c' dans G, est combinaison linéaire sur $\mathbb{Z}$ des $N - 1$ éléments

$$[a^i, a], \ 1 \leq i \leq N - 1 \ .$$

De plus, comme

$$\frac{\psi(a^i)-1}{\nu} = (\psi(a^{i-1}) + \cdots + 1)\frac{\psi(a)-1}{\nu},$$

on voit que le $\mathbb{Z}$-module engendré par les $\psi(c) - 1/\nu$, $c \in G$, est engen dré par $\psi(a) - 1/\nu$. Par suite, ce dernier quotient est premier à μ/ν, si bien que la condition (1) pour la somme

$$\sum_{c\in G} n_c[c,a]$$

assure que celle-ci appartient à $\mathcal{S}(\psi)$, i.e. la condition (4) est vérifiée.

5) Proposition 2. *Si le caractère de Dirichlet ψ prend ses valeurs dans $(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^\times$, r entier, et si le groupe $\psi(G)$ est de la forme $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2^{t-1}, t \geq 2$, alors on a*

$$M(\psi) = \Delta(\psi).$$

Preuve. Observons d'abord que l'on a $\nu \geq 2$; de plus l'hypothèse faite sur le sous-groupe $\psi(G)$ de $(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^\times$ impose $\nu = 2$. Notons aussi que d'après le lemme 3, on peut supposer que $\psi = \Psi$, i.e. $G = \psi(G)$.

Considérons d'une part l'application

$$c \longmapsto \frac{\psi(c)-1}{2} \pmod 2$$

à valeurs dans $\mathbb{Z}/2$. Il s'agit d'un homomorphisme surjectif comme on le voit facilement. Soit H son noyau. Considérons d'autre part le groupe des éléments d'ordre 2 de G, isomorphe à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ vu l'hypothèse faite sur $\psi(G) = G$. Or l'équation $x^2 \equiv 1 \pmod{2^r}$, avec $r \geq 3$, admet pour solutions

$$x \equiv \pm 1 \pmod{2^{r-1}}$$

de sorte que H ne contient qu'un élément d'ordre 2. Ainsi H est cyclique.

Soient alors b un générateur de H, et τ un élément d'ordre 2 de G n'appartenant pas à H.

La décomposition

$$G = <\tau> \times <a>$$

avec $a = b\tau$, fournit une décomposition de G de la forme $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2^{t-1}$ telle que

$$\frac{\psi(\tau)-1}{2} \text{ et } \frac{\psi(a)-1}{2}$$

soient impairs.

Soit $N = 2^{t-1}$. D'après la prop. 1, on voit que les éléments de la forme $[c, a^j]$, avec $c \in G$ et $1 \leq j \leq N-1$, sont des combinaisons linéaires des $2N-1$ éléments

$$[c, a], \ c \in G\backslash\{1\}.$$

De plus, vu la formule (5) du lemme 4, la différence

$$[a^i\tau, a^j\tau] - [\tau, \tau], \quad i \text{ et } j \text{ entiers},$$

est une combinaison linéaire des $[c, a^k]$ pour $c \in G$ et $1 \leq k \leq N-1$ convenables. Ainsi les $2N$ éléments

$$[\tau, \tau] \text{ et } [c, a], \ c \in G\backslash\{1\},$$

engendrent l'idéal $I^2 = \{\Sigma n_{c,c'}[c, c'] \ \mid \ c \text{ et } c' \in G\}$.

Mézalor écrivons que la somme

$$\ell[\tau, \tau] + \sum_{c \in G\backslash\{1\}} n_c[c, a], \tag{6}$$

à coefficients ℓ et $n_c, c \in G\backslash\{1\}$, entiers rationnels, appartient à $\Delta(\psi)$, soit

$$\ell\left(\frac{\psi(\tau)-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\psi(a)-1}{2}\right) \sum_{c \in G\backslash\{1\}} n_c \left(\frac{\psi(c)-1}{2}\right) \equiv 0 \ \ (\mu/\nu). \tag{7}$$

Choisissons l'entier ℓ^* de façon que la différence

$$\ell\left(\frac{\psi(\tau)-1}{2}\right) - \ell^*\left(\frac{\psi(a)-1}{2}\right)$$

soit congrue à 0 modulo $\mu/\nu = 2^{r-1}$, ce qui est possible puisque $(\psi(\tau)-1)/2$ et $(\psi(a)-1)/2$ sont tous les deux impairs.

Alors, en ajoutant à la somme (6) la quantité

$$\ell^*[\tau, a] - \ell[\tau, \tau], \tag{8}$$

la congruence (7) devient

$$(9)\quad \left(\frac{\psi(a)-1}{2}\right)\left\{\ell^*\left(\frac{\psi(\tau)-1}{2}\right)+\sum_{c\in G\setminus\{1\}} n_c\left(\frac{\psi(c)-1}{2}\right)\right\}\equiv 0 \quad (\mu/\nu).$$

Comme $(\psi(a)-1)/2$ est impair, cette congruence (9) assure que

$$\ell^*[\tau,a]+\sum_{c\in G\setminus\{1\}} n_c[c,a]$$

appartient à $\mathcal{S}(\psi)$.

Comme, vu le choix de ℓ^* c'est aussi le cas de la différence (8), on a prouvé que tout élément de $\Delta(\psi)$ s'écrit comme la somme de deux éléments de l'ensemble des générateurs $\mathcal{S}(\psi)$ du $\mathbb{Z}$-module $M(\psi)$.

La proposition 2 est démontrée.

6) On se place à nouveau dans la situation du §2, en distinguant entre *i)* le cas quadratique imaginaire et *ii)* le cas des corps de fonctions.

Soit $H_{(1)}$ l'extension abélienne *non ramifiée* (resp. et totalement décomposé au-dessus de la place ∞) maximale de K (resp. k), et on note F une extension intermédiaire vérifiant

$$K\subseteq F\subseteq H_{(1)} \quad (\text{resp. } k\subseteq F\subseteq H_{(1)}).$$

Comme dans le §2, soit A l'anneau des entiers du corps quadratique imaginaire K (resp. l'anneau des fonctions de k partout entières en dehors de la place ∞). On note B la clôture intégrale de A dans F.

Alors dans chacun de ces deux cas, il se trouve que l'on peut construire un sous-groupe d'unités $\mathcal{E}$ de $B^\times$, engendré par les racines de l'unité de F et par les normes dans F des éléments du groupe des unités de Stark (aussi appelées elliptiques dans le cas *i)*) *provenant d'extensions abéliennes du corps de base et* ramifiées *en un idéal premier* $\mathfrak{q}$ *de* A, pourvu que la classe de $\mathfrak{q}$ parcoure le groupe des classes d'idéaux de K (resp. k) associé à F. *L'image de $\mathcal{E}$ par l'application logarithme est isomorphe à $M(\psi_F)$ comme $\mathbb{Z}[G]$-module.*

De plus, soit h_B le nombre de classes d'idéaux de l'anneau B. On pose

$$\omega_\infty=\begin{cases}12, & \text{dans le cas } i)\\ \omega_{H_{(1)}}, & \text{dans le cas } ii).\end{cases}$$

Alors, dans le cas *i)*, l'identité $M(\psi_F) = \Delta(\psi_F)$ du th. 2 permet d'identifier la puissance d'ordre $\omega_\infty\ \omega_F\ h_A$ de $\mathcal{E}$ avec le sous-groupe $\Delta(c_0,\ \omega\omega_F)$ introduit dans [2] loc. cit. par *D.* Kersey d'où l'identité

$$(10) \qquad [B^\times : \mathcal{E}] = h_B/[H_{(1)} : F]$$

déjà prouvée dans [2]. Dans le cas *ii)*, l'identité $M(\psi_F) = \Delta(\psi_F)$ du th.2 permet de même d'obtenir l'identité (10), *cf.* [3].

Remarques. i) Dans les deux cas, le degré de $H_{(1)}$ sur le corps de base vaut h_A.

ii) La formule (10) résulte de la formule pour le nombre de classes : celle-ci s'obtient en évaluant les parties principales en $s = 0$ des deux membres de la décomposition

$$(11) \qquad \zeta_F(s) = \zeta(s) \prod_{\chi \neq 1} L(s, \chi), \quad s \in \mathbb{C},$$

de la fonction zêta du corps F en produit de fonctions L relatives à K (resp. k). Une preuve de (11) est donnée dans [4] chap. VII et XIII-10.

RÉFÉRENCES

[1] GROSS B. & ROSEN M., *Fourier series and the special values of L-functions*, Adv. in Math. **69** (1988), 1-31.

[2] KUBERT D. & LANG S., *Modular units*, Grundleh. der math. Wiss. **244**, Springer (1981).

[3] OUKHABA H., *Fonctions discriminant, formules pour le nombre des classes, et unités elliptiques ; le cas des corps de fonctions (associé à des courbes sur des corps finis)*, Thèse (Grenoble, Institut Fourier, 10 juin 1991).

[4] WEIL A., *Basic number theory*, Grundleh. der math. Wiss. **144**, Springer (1974).

Institut Fourier
Université de Grenoble I
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex
FRANCE.