JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

DIMITRIOS POULAKIS

Solutions entières de l'équation $Y^m = f(X)$

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 3, n° 1 (1991), p. 187-199

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1991__3_1_187_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux **3** *(1991), 187-199*

Solutions entières de l'équation $Y^m = f(X)$.

par Dimitrios POULAKIS

Résumé — Soit K un corps de nombres. Dans ce travail nous calculons des majorants effectifs pour la taille des solutions en entiers algébriques de K des équations, $Y^2 = f(X)$, où $f(X) \in K[X]$ a au moins trois racines d'ordre impair, et $Y^m = f(X)$ où $m \geq 3$ et $f(X) \in K[X]$ a au moins deux racines d'ordre premier à m. On améliore ainsi les estimations connues ([2],[9]) pour les solutions de ces équations en entiers algébriques de K.

Abstract — *Let K be a number field. In this work we give effective upper bounds for the size of solutions in algebraic integers of K, of equations $Y^2 = f(X)$, where $f(X) \in K[X]$ has at least three roots of odd order, and $Y^m = f(X)$ where $f(X) \in K[X]$ has at least two roots of order prime to m. We thus improve the known estimations ([2],[9]) for the solutions of these equations in algebraic integers of K.*

1. Introduction.

Soit K un corps de nombres et A son anneau des entiers. On considère les équations

$$\text{(I)} \qquad Y^2 = f(X)$$

où $f(X) \in K[X]$ a au moins trois racines d'ordre impair et

$$\text{(II)} \qquad Y^m = f(X)$$

où $m \geq 3$ et $f(X) \in K[X]$ a au moins deux racines d'ordre premier à m.

Baker ([1]), dans le cas où $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$, a calculé explicitement, en fonction de m et des coefficients de f, un majorant de la taille des solutions de (I) et (II) en entiers rationnels. Plus tard l'estimation de Baker a été améliorée par Sprindzuk ([8]). Trelina ([9]) et Brindza ([2]) ont donné des majorants effectifs pour la taille des solutions de (I) et (II) en S-entiers de K.

Manuscrit reçu le 30 octobre 1990, modifié le 20 mars 1991.

Dans ce travail nous calculons un majorant effectif pour la taille des solutions de (I) et (II) en entiers algébriques de K. Dans ce cas notre résultat est meilleur que ceux de Trelina, Brindza et Baker. En revanche dans le cas où $K = \mathbb{Q}$, le résultat de Sprindzuk pour (I) est meilleur que le nôtre.

Soit $\mathbb{M}(k)$ l'ensemble canonique des valeurs absolues de K ([5)] chapitre II §1). Soient $\underline{\underline{x}} = (x_0, ..., x_n)$ un point de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(K)$ et $v \in \mathbb{M}(K)$; on note

$$|\underline{\underline{x}}|_v = \max\{|x_0|_v, ..., |x_n|_v\}.$$

La quantité

$$H_K(x) = \prod_{v \in \mathbb{M}(K)} |\underline{\underline{x}}|_v^{d_v}$$

où d_v sont les degrés locaux, est appelée "*hauteur*" de $\underline{\underline{x}}$ (relativement à K) et la quantité

$$H(\underline{\underline{x}}) = H_K(x)^{1/d}$$

où d est le degré de K, "*hauteur absolue*" de $\underline{\underline{x}}$. Si $f \in K[X]$ on définit $|f|_v$, $H_K(f)$, $H(f)$ en termes du vecteur des coefficients de f. Si $a \in K$ on note $H_K(a) = H_K(1, a)$ et $H(a) = H(1, a)$. Aussi pour z réel positif posons $\log^\star z = \max(1, \log z)$. On notera D_K le discriminant de K. Nous montrons les résultats suivants :

THÉORÈME 1. *Soit $f(X)$ un polynôme de $K[X]$ ayant au moins trois racines d'ordre impair. Alors si $(x, y) \in A \times A$ est une solution de l'équation $Y^2 = f(X)$ on a*

$$\max\{H_K(x), H_K(y)\} < exp\{c(d,n)W_1^{n^n} W_2^{dn^n}\}$$

où

$$W_1 = D_K^{12} H_K(f)^{1000d^2},\ W_2 = (\log^\star |D_K|)^3 (\log^\star H_K(f))^5$$

et

$$c(d,n) < 2^{300d^2n^{2n}}.$$

THÉORÈME 2. *Soit m un entier ≥ 3 $f(X)$ un polynôme de $K[X]$ ayant au moins deux racines d'ordre premier à m. Alors si $(x, y) \in A \times A$ est une solution de l'équation $Y^m = f(X)$ on a*

$$max\{H_K(x), H_K(y)\} < exp\{c(d,n,m)W_1^{2m^4n^n} W_2^{dm^3n^n}\}$$

où

$$W_1 = |D_K| H_K(f)^{35md^2}, \; W_2 = \log^\star |D_K| (\log^\star H_K(f))^2$$

et

$$c(d,n,m) < 2^{50m^5d^2n^{2n}}.$$

La méthode que nous utilisons est une généralisation de la méthode employée par Schmidt pour démontrer le théorème 2 de [6].

On va utiliser les notations habituelles suivantes. Soit k un corps de nombres. On note D_k son discriminant et R_k son régulateur. Si $a \in k$ on note $N_k(a)$ sa norme et $\lceil a \rceil$ la plus grande des valeurs absolues de ses conjugués. Aussi quand I est un idéal entier de k on note $N_k(I)$ sa norme.

Notre outil principal sera la proposition suivante :

PROPOSITION. *Soient M un corps de nombres de degré m et m_1, m_2, m_3 des entiers algébriques non nuls de M tels que :*

$$\max(\lceil m_1 \rceil, \lceil m_2 \rceil, \lceil m_3 \rceil) \leq A.$$

Alors chaque solution (u_1, u_2, u_3), où u_1, u_2, u_3 sont des unités de M de l'équation :

$$m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3 = 0$$

satisfait :

$$\max\{\lceil u_1 \rceil, \lceil u_2 \rceil, \lceil u_3 \rceil\} \leq \exp\{(16(m+2)m)^{16m+14}(R_M \log^\star R_M)^2 (R_M + \log A)\}.$$

On peut consulter [3] pour une preuve de ce résultat.

2. Démonstration du Théorème 1

Soient L le corps de décomposition du polynôme f sur K et λ son degré ; alors on a

$$f(X) = a_0 \prod_{j=1}^{s} (X - e_j)^{t_j}.$$

Par hypothèse trois au moins des t_j, disons t_1, t_2, t_3, sont impairs.

Soit δ le plus petit entier positif tel que les nombres $\delta^2 a_0, \delta^2 e_1, \ldots, \delta^2 e_n$ soient entiers dans L. On multiplie les deux membres de l'équation $Y^2 = f(X)$ par $\delta^{2(n+1)}$ et on obtient l'équation :

$$V^2 = f'(U) = a_0 \delta^2 U^n + a_1 \delta^4 U^{n-1} + \ldots + a_n \delta^{2(n+1)}$$

où $U = \delta^2 X$ et $V = \delta^{n+1} Y$. Aussi on a

$$H_K(f') \leq H_K(f)\delta^{2nd} \leq H_K(f)^{4d^2n+1}.$$

On est ramené ainsi au cas où $a_0, e_1, ..., e_n$ sont des entiers de K.

Soit x,y une solution de $Y^2 = f(X)$ en entiers de K avec $y \neq 0$. On peut écrire

$$(x - e_j) = I_j J_j^2 \quad (j = 1, 2, 3)$$

où I_j, J_j sont des idéaux entiers de L et I_j est sans facteur carré. Soit P un idéal premier divisant I_1. Alors P divise $(y)^2$ avec un exposant impair ; il en résulte que P divise

$$(a_0 \prod_{j=2}^{s} (x - e_j)^{t_j}).$$

Donc ou bien $P|(a_0)$ ou bien il existe $j \neq 1$ tel que $P|(x - e_j)$. Dans ce dernier cas $P|(e_1 - e_j)$. Par conséquent on conclut que

$$I_1 \left| (a_0 \prod_{1<j\leq s} (e_1 - e_j)) \right. .$$

De même on obtient que

$$I_r \left| (a_0 \prod_{j\neq r} (e_r - e_j)) \right. \quad (r = 2, 3).$$

Donc

$$I_1 I_2 I_3 \left| (a_0^3 \prod_{1\leq i<j\leq 3} (e_i - e_j)^2 \prod_{i=1}^{3} \prod_{j=i+1}^{s} (e_i - e_j)) \right. .$$

On sait, d'après [5] chap. V §4, qu'il existe un idéal entier J_j' dans la classe de J_j tel que sa norme est $N_L(J_j') \leq |D_L|^{1/2}$. Soit J_j'' un idéal entier dans la classe inverse de celle de J_j' ; alors $J_j J_j'' = (\xi_j)$, où ξ_j est un entier de L. On a donc

$$x - e_j = \eta_j \xi_j^2 \quad (j = 1, 2, 3)$$

où η_j est un entier de L tel que $(\eta_j) = I_j J_j'^2$.

Notons $\Delta = a_0^3 \prod_{1\le i<j\le 3} (e_i - e_j)^2 \prod_{i=1}^{3} \prod_{j=i+1}^{3} (e_i - e_j)$; on a

$$|N_L(\eta_1\eta_2\eta_3)| \le |N_L(\Delta)| \quad |D_L|^3.$$

Soit $M = L(\sqrt{\eta_1}, \sqrt{\eta_2}, \sqrt{\eta_3})$; son degré est $m \le 8\lambda$ et on note D_M son discriminant. Alors la formule de transitivité des discriminants donne

$$\begin{aligned} |D_M| &\le 4^{12\lambda} D_L^8 N_L(\eta_1)^4 N_L(\eta_2)^4 N_L(\eta_3)^4 \\ &\le 4^{12\lambda} D_L^{20} N_L(\Delta)^4. \end{aligned} \tag{1}$$

LEMME 1. *Soient k un corps de nombres de degré ν et a un entier algébrique de k. Alors il existe un entier b et une unité ϵ de k tels que*

$$a = b\epsilon$$

et

$$\overline{|b|} \le |N_k(a)|^{1/\nu} e^{c_1(\nu) R_k}$$

où $c_1(\nu) = \nu(6\nu^3/\log\nu)^\nu$.

Démonstration. Il existe un ensemble d'unités fondamentales de k $\epsilon_1, ..., \epsilon_r$ tel que

$$\prod_{i=1}^{r} \max(\log \overline{|\epsilon_i|}, 1) < c(\nu) R_k \tag{*}$$

où $c(\nu) = (6\nu^3/\log\nu)^\nu$ ([3]).

Soient $a^{(i)}$ $i = 1, ..., \nu$ les conjugués de a. Le nombre $(a^{(i)})^\nu/N(a)$ est une unité de k. Alors

$$(a^{(i)})^\nu/N(a) = \zeta(\epsilon_1^{(i)})^{\gamma_1} ... (\epsilon_r^{(i)})^{\gamma_r}$$

où ζ est une racine de l'unité et $\gamma_i \in \mathbb{Z}$ $i = 1, ..., r$; d'où

$$\log(|a^{(i)}|/|N(a)|^{1/\nu}) = \sum_{j=1}^{r} (\gamma_i/\nu) \log|\epsilon_j^{(i)}|.$$

Soient $\lambda_i = [\gamma_i/\nu]$ $i = 1, 2, ..., \nu$; considérons l'unité u de K avec

$$u^{(i)} = (\epsilon_1^{(i)})^{-\lambda_1} ... (\epsilon_r^{(i)})^{-\lambda_r}.$$

Posons $b = au$. Alors

$$\begin{aligned}\log(|b^{(i)}|/|N(a)|^{1/\nu}) &\leq \sum_{j=1}^{r} \log |\epsilon_j^{(i)}| \\ &\leq rE\end{aligned}$$

où $E = \max_{1 \leq j \leq r}\{\log \lceil \epsilon_j \rceil\}$. On déduit donc de (*)

$$|b^{(i)}| \leq |N(a)|^{1/\nu} e^{rc(\nu)R_k} \quad (i = 1, 2, ..., \nu)$$

d'où le lemme 1.

Les nombres $\sigma_i = \sqrt{\eta_i}\xi_i$ $(i = 1, 2, 3)$ sont des entiers de M. On a

$$e_i - e_j = \sigma_j^2 - \sigma_i^2 = (\sigma_j + \sigma_i)(\sigma_j - \sigma_i) \quad (i \neq j)$$

et

$$|N_M(\sigma_j \pm \sigma_i)| \leq |N_M(e_i - e_j)| \leq |N_M(\Delta)|.$$

Le lemme précédent entraîne alors que pour toute permutation cyclique (i,j,h) de (1,2,3) on peut écrire

$$\sigma_j + \sigma_i = b_h \epsilon_h \quad \text{et} \quad \sigma_j - \sigma_i = g_h \delta_h$$

où ϵ_h, δ_h sont des unités de M et b_h, g_h des entiers de M avec

$$\max\{\lceil b_h \rceil, \lceil g_h \rceil\} < \frac{|N_L(\Delta)|^{1/\lambda} e^{c_1(\lambda)R_M}}{\lceil b_h \rceil . \lceil g_h \rceil} (h = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Le triplet $(\epsilon_1, \epsilon_2, \delta_3)$ est une solution en unités de l'équation

$$b_1 X_1 - b_2 X_2 - g_3 X_3 = 0.$$

La proposition citée à l'introduction entraîne donc

$$H(\epsilon_1, \epsilon_2, \delta_3) < \exp\{c_2(\lambda) R_M^3 (\log^\star R_M)^2 \log^\star |N_L(\Delta)|\}$$

où

$$c_2(\lambda) < \lambda^{280\lambda+30} 2^{1520\lambda+165}$$

La même inégalité est valable pour les quantités $H(\epsilon_2, \epsilon_3, \delta_1)$ et $H(\epsilon_3, \epsilon_1, \delta_2)$.

LEMME 2. *Soient k un corps de nombres de degré ν et $\alpha, \beta_2, ..., \beta_p, \gamma_2, ..., \gamma_q$ des éléments de k avec $\alpha \neq 0$. Alors on a*

$$H(\alpha, \beta_2, ..., \beta_p, \gamma_2, ..., \gamma_q) \leq H(\alpha, \beta_2, ..., \beta_p) H(\alpha, \gamma_2, ..., \gamma_q).$$

Démonstration. Pour tout $x \in k$ et $x \neq 0$ on a la formule du produit

$$\prod_{v \in \mathbb{M}(k)} |x|_v^{\nu_v} = 1$$

où ν_v sont les degrés locaux ([5] page 99).

Il en résulte que si $x_0, x_1, ..., x_n \in k$ et $x_0 \neq 0$ on a

$H_k(x_0, x_1, ..., x_n) = H_k(1, x_1/x_0, ..., x_n/x_0)$. On peut donc supposer que $\alpha = 1$. Alors pour tout $v \in M(k)$ on a

$$\begin{aligned} &\max\{1, |\beta_1|_v, ..., |\beta_p|_v, |\gamma_1|_v, ..., |\gamma_q|_v\} \\ &\leq \max\{1, |\beta_1|_v, ..., |\beta_p|_v\} \max\{1, |\gamma_1|_v, ..., |\gamma_q|_v\} \end{aligned}$$

d'où le lemme 2.

Le lemme 2 et la majoration pour $H(\epsilon_i, \epsilon_j, \delta_h)$ entraînent

$$H(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3) < \exp\{3c_2(\lambda) R_M^3 (\log^\star R_M)^2 \log^\star |N_L(\Delta)|\}.$$

En particulier on a

$$H(\epsilon_1, \delta_1) < \exp\{3c_2(\lambda) R_M^3 (\log^\star R_M)^2 \log^\star |N_L(\Delta)|\}. \tag{3}$$

Des majorations (2) et (3) on déduit

$$\begin{aligned} H_M(1, b_1\epsilon_1/g_1\delta_1) &\leq H_M(1, b_1/g_1) H_M(1, \epsilon_1/\delta_1) \\ &\leq \exp\{9c_2(\lambda) R_M^3 (\log^\star R_M)^2 \log^\star |N_L(\Delta)|\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Pour tout $x \in M$ notons $x^{(t)}$ $(t = 1, ..., m)$ ses conjugués. Alors (4) entraîne

$$|(b_1\epsilon_1)^{(t)}| / |(g_1\delta_1)^{(t)}| < \exp\{c_5(\lambda) T_1 \log^\star T_1\} = C.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} |(b_1\epsilon_1)^{(t)}|^2 &< C |(b_1\epsilon_1 g_1\delta_1)^{(t)}| \\ &< C |e_2^{(t)} - e_3^{(t)}|. \end{aligned} \tag{5}$$

Comme $H_M(1, b_1\epsilon_1/g_1\delta_1) = H_M(1, g_1\delta_1/b_1\epsilon_1)$, on déduit de même que

$$|(g_1\delta_1)^{(t)}|^2 < C|e_2^{(t)} - e_3^{(t)}|. \tag{6}$$

On a

$$x - e_3 = \sigma^2 = \frac{1}{4}(g_1\delta_1 + b_1\epsilon_1)$$

Alors (5) et (6) entraînent

$$|(x - e_3)^{(t)}| < C|e_2^{(t)} - e_3^{(t)}|. \tag{7}$$

On sait d'après un résultat de Siegel ([7]), que

$$R_M < c_3(m)|D_M|^{1/2}(\log^\star |D_M|)^{m-1}$$

où

$$c_3(m) = 3m^2[e/(m-1)]^{m-1}.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} |(x - e_3)^{(t)}| < |e_2^{(t)} &- e_3^{(t)}|\times \\ &\times \exp\{c_4(\lambda)D_L^{30} N_L(\Delta)^6(\log^\star |D_L| \log^\star |N_L(\Delta)|)^{24\lambda-1}\} \end{aligned} \tag{8}$$

où

$$c_4(\lambda) < \lambda^{300\lambda+40}\ 2^{1750\lambda+210}$$

Considérons le polynôme $g(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - e_i)$ et notons $D(g)$ son discriminant. Alors on a

$$\begin{aligned} N_L(\Delta) \le |N_L(D(g))| &\le (s!s^s)^\lambda H_L(g)^{2s-2} \\ &\le 4^{n^2\lambda}(n!n^n)^\lambda H_L(f)^{2n-2}. \end{aligned} \tag{9}$$

(la dernière inégalité résulte de [4] chap. 3 proposition 2.4).

On a aussi

$$|e_2^{(t)}|, |e_3^{(t)}| < nH_L(f). \tag{10}$$

LEMME 3. *On a* $D_L \leq (s!s^s)^{\lambda s s!} 4^{s^2\lambda} D_K^{s!} H_K(g)^{2(s-1)s!}$.

Démonstration.

Posons $L_i = K(e_1, ..., e_i)$ et $g_i(X) = (X - e_i)...(X - e_s)$ $(i = 1, 2, ..., s)$; alors $L_{s-1} = L_s = L$ et $g(X) = g_1(X)$. La formule de transitivité des discriminants et [5] III, prop. 13 donnent :

$$|D_{L_1}| \leq |D_K|^s |N_K(D_{L_1/K})| \leq |D_K|^s |N_K(D(g))|,$$
$$|D_{L_2}| \leq |D_{L_1}|^{s-1} |N_{L_1}(D_{L_2/L_1})| \leq |D_{L_1}|^{s-1} |N_{L_1}(D(g_2))|,$$

....

$$|D_{L_{s-2}}| \leq |D_{L_{s-3}}|^3 |N_{L_{s-3}}(D_{L_{s-2}/L_{s-3}})| \leq |D_{L_{s-3}}|^3 |N_{L_{s-3}}(D(g_{s-2}))|$$
$$|D_L| \leq |D_{L_{s-2}}|^2 |N_{L_{s-2}}(D_{L/L_{s-2}})| \leq |D_{L_{s-2}}|^2 |N_{L_{s-2}}(D(g_{s-1}))|.$$

On a donc

$$|D_L| \leq |D_K|^{s!} |N_K(D(g))|^{(s-1)!} |N_{L_1}(D(g_2))|^{(s-2)!} \ldots$$
$$\ldots |N_{L_{s-3}}(D(g_{s-2}))|^2 |N_{L_{s-2}}(D(g_{s-1}))|$$
$$\leq (s!s^s)^{\lambda s s!} |D_K|^{s!} H_K(g)^{2(s-1)(s-1)!} H_{L_1}(g_2)^{2(s-2)(s-2)!} \ldots$$
$$\ldots H_{L_{s-3}}(g_{s-2})^8 H_{L_{s-2}}(g_{s-1})^2.$$

Comme $H_{L_j}(g_{j+1}) \leq 4^{s\lambda} H_K(g)^{\frac{s!}{(s-j)!}}$, on obtient

$$|D_L| \leq (s!s^s)^{\lambda s s!} 4^{s^2\lambda} |D_K|^{s!} H_K(g)^{2(s-1)s!}.$$

Alors le lemme 3, les majorations (8), (9), (10) et l'inégalité $n! < e(\frac{n}{2})^n$ entraînent le résultat.

3. Démonstration du théorème 2.

Soient L le corps de décomposition du polynôme f et λ son degré ; on a

$$f(X) = a_0 \prod_{j=1}^{s} (X - e_j)^{t_j}.$$

Par hypothèse deux au moins des t_j, soient t_1, t_2, sont premiers à m. Comme dans la démonstration du théorème 1 on se ramène au cas où $a_0, e_1, ..., e_s$ sont des entiers de L.

Soit x, y une solution de $Y^m = f(X)$ en entiers de K. On peut écrire

$$(x - e_j) = I_j J_j^m \quad (j = 1, 2)$$

où I_j, J_j sont des idéaux entiers de L et I_j n'est divisible par aucune puissance m-ième d'un idéal premier.

Soit P un idéal premier divisant I_1. Alors P divise $(x - e_1)$ avec un exposant $< m$. Comme $(t_1, m) = 1$ et que

$$y^m = (x - e_1)^{t_1} a_0 \prod_{i \neq 1} (x - e_i)^{t_i},$$

il en résulte que P divise $(a_0 \prod_{i \neq 1} (x - e_i)^{t_i})$.

Donc ou bien $P|(a_0)$ ou bien il existe $i \neq 1$ tel que $P|(x - e_i)$. Dans ce dernier cas on a $P|(e_i - e_1)$. On a donc que

$$I_1 \left| (a_0 \prod_{i=2}^{s} (e_1 - e_i))^m \right. .$$

De même on a

$$I_2 \left| (a_0 \prod_{i \neq 2}^{s} (e_2 - e_i))^m \right. .$$

Alors

$$I_1 I_2 | (\Delta)$$

où $\Delta = (a_0^2 (e_1 - e_2)^2 \prod_{i=3}^{s} (e_1 - e_i) \prod_{i=1}^{s} (e_2 - e_i))^m$.

Comme dans la démonstration du théorème 1, il existe des entiers η_j, ξ_j $(j = 1, 2)$ tels que

$$x - e_j = \eta_j \xi_j^m \quad (j = 1, 2)$$

et

$$N_L(\eta_1 \eta_2) \leq N_L(\Delta) D_L^2. \tag{1}$$

Soit $M = L(\zeta, \sqrt[m]{\eta_1}, \sqrt[m]{\eta_2})$, où ζ est une racine primitive m-ième de l'unité ; son degré est $\mu < \lambda \varphi(m) m^2$ où φ est la fonction d'Euler.

LEMME 4. *On a*

$$D_M \leq m^{3\lambda m^2 \varphi(m)} D_L^{m^2 \varphi(m)(2m-1)} N_L(\Delta)^{(m-1) m^2 \varphi(m)}.$$

Démonstration. Soient $L_1 = L(\zeta)$ et $L_2 = L_1(\sqrt[m]{\eta_1})$. On a

$$D_{L_1} \leq D_L^{\varphi(m)} |N_L(D_{L_1/L})| \leq D_L^{\varphi(m)} m^{\lambda \varphi(m)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} D_{L_2} &\leq D_{L_1}^m \left| N_{L_1}(D_{L_2/L_1}) \right| \leq D_{L_1}^m \left| N_{L_1}(N_{L_2/L_1}(m\eta_1^{m-1})) \right| \\ &\leq D_{L_1}^m m^{\lambda m \varphi(m)} N_{L_2}(\eta_1)^{m-1} \leq D_L^{m\varphi(m)} m^{2\lambda m\varphi(m)} N_L(\eta_1)^{(m-1)m\varphi(m)}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} D_M &\leq D_{L_2}^m \left| N_{L_2}(D_{M/L_2}) \right| \leq D_{L_2}^m m^{\lambda m^2 \varphi(m)} N_{L_2}(\eta_2)^{m-1} \\ &\leq D_L^{m^2\varphi(m)} m^{3\lambda m^2\varphi(m)} [N_L(\eta_1) N_L(\eta_2)]^{(m-1)m^2\varphi(m)} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Posons $\sigma_i = \xi_i \sqrt[m]{\eta_i}$ $(i = 1, 2)$. On élimine x et on a

$$\sigma_1^m - \sigma_2^m = e_2 - e_1.$$

Alors

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \zeta\sigma_2)\ldots(\sigma_1 - \zeta^{m-1}\sigma_2) = e_2 - e_1.$$

Comme $m \geq 3$, il existe des entiers de K $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ avec $\delta_j | e_2 - e_1$ $(j = 1, 2, 3)$ et des unités e_1, e_2, e_3 tels que

$$\sigma_1 - \zeta^j \sigma_2 = \epsilon_j \delta_j \quad (j = 0, 1, 2). \tag{2}$$

D'après le lemme 1 du §2 on peut supposer que

$$\lceil \delta_j \rceil < |N_M(\delta_j)|^{1/\mu} \exp(c_1(\mu) R_M). \tag{3}$$

On élimine σ_1 et σ_2 entre les trois équations (2) en multipliant la j-ième équation par $\zeta^k - \zeta^l$ avec $\{j, k, l\} = \{0, 1, 2\}$:

$$\epsilon_1\delta_1(\zeta^2 - \zeta) + \epsilon_2\delta_2(1 - \zeta^2) + \epsilon_3\delta_3(\zeta - 1) = 0.$$

On a :

$$\max(\lceil \delta_1(\zeta_3 - \zeta_2) \rceil, \lceil \delta_2(\zeta_1 - \zeta_3) \rceil, \lceil \delta_3(\zeta_2 - \zeta_1) \rceil) < 2\exp\{c_1(m) R_M\} N_M(\Delta).$$

Par conséquent la proposition citée à la fin de l'introduction implique :

$$\max\{\lceil \epsilon_1 \rceil, \lceil \epsilon_2 \rceil, \lceil \epsilon_3 \rceil, \} < \exp\{c_5(\lambda, m) R_M^3 (\log^\star R_M)^2 \log^\star |N_M(\Delta)|\} \tag{4}$$

où

$$c_5(\lambda, m) < (8\lambda m^3)^{35\lambda m^3 + 30}.$$

Il résulte donc de (3) et (4) que

(5) $H(\epsilon_1\delta_1, \epsilon_2\delta_2) < \exp\{3mc_5(\lambda, m)R_M^3(\log^\star R_M)^2 \log^\star |N_M(\Delta)|\} = C.$

D'autre part on déduit de (2) que

$$\sigma_2 = \frac{\epsilon_1\delta_1 - \epsilon_2\delta_2}{\zeta - 1} \quad \text{et} \quad \sigma_1 = \frac{\epsilon_1\delta_1\zeta - \epsilon_2\delta_2}{\zeta - 1}.$$

Alors on a

$$\sigma_1 = \frac{\epsilon_1\delta_1\zeta - \epsilon_2\delta_2}{\epsilon_1\delta_1 - \epsilon_2\delta_2}\sigma_2.$$

Cela entraîne

$$\sigma_2^m \prod_{j=0}^{m-1} \left(\frac{\epsilon_1\delta_1\zeta - \epsilon_2\delta_2}{\epsilon_1\delta_1 - \epsilon_2\delta_2} - \zeta^j\right) = e_2 - e_1$$

et on a

$$H(\sigma_2^m) \leq H(e_2 - e_1)H(\Phi(\frac{\zeta\epsilon_1\delta_1 - \epsilon_2\delta_2}{\epsilon_1\delta_1 - \epsilon_2\delta_2})),$$

où $\Phi(X) = \prod_{j=0}^{m-1}(X - \zeta^j)$. Alors (5) entraîne

$$\begin{aligned} H(\Phi(\frac{\zeta_1\epsilon_1\delta_1 - \epsilon_2\delta_2}{\epsilon_1\delta_1 - \epsilon_2\delta_2})) &\leq (m+1)H(\frac{\zeta_1\epsilon_1\delta_1 - \epsilon_2\delta_2}{\epsilon_1\delta_1 - \epsilon_2\delta_2})^m \\ &\leq 2^m(m+1)C^m. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} H(x) &\leq 2H(x - e_2)H(e_2) \\ &\leq 2^{m+1}H(e_2 - e_1)H(e_2)(m+1)C^m \end{aligned}$$

d'où

(6) $$H_L(X) < n^{3\lambda}2^{(m+1)\lambda}(m+1)^\lambda C^{m\lambda}H_L(f)^3.$$

La majoration

$$R_M < c_3(\mu)|D_M|^{\frac{1}{2}}(\log^\star |D_M|)^{\mu-1}$$

la majoration (9) du §2 et le lemme 4 entraînent

(7) $R_M < c_6(\lambda, m, n)|D_L|^{m^4} H_L(f)^{m^4(n-1)}(\log^\star |D_L| \log^\star H_L(f))^{\lambda m^3 - 1}.$

où

$$c_6(\lambda, m, n) < \lambda^{\lambda m^3 + 1} m^{3n^2m^4\lambda} n^{3nm^4\lambda}.$$

On en déduit

(8)
$$H_L(X) \leq \exp\{c_7(\lambda, m, n)|D_L|^{3m^4} H_L(f)^{3m(n-1)}(\log^\star |D_L \log^\star H_L(f))^{3\lambda m^3}\}.$$

où
$$c_7(\lambda, m, n) < 2^{20\lambda m^4 n^3} \lambda^{45\lambda m^3} m^{20\lambda n^2 m^4} n^{15 m^4 \lambda n^2 n!}.$$

Alors (8) et le lemme 3 entraînent la majoration annoncée dans le théorème 2.

RÉFÉRENCES

[1] A. BAKER, *Bounds for the solutions of the hyperelliptic equation*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **65** (1969), 439–444.

[2] B. BRINDZA, *On S-integral solutions of the equation $y^m = f(x)$.*, Acta Math. Hung. **44** (1984), 133–139.

[3] K. GYORY, *On the solutions of linear diophantine equations in Algebraic integers of bounded norm*, Ann. Univ. Budapest Eotvos, Sect. Math. 22-23 (1979-80), 225-233.

[4] S. LANG, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer-Verlag (1983).

[5] S. LANG, *Algebraic Number Theory*, Addison Wesley (1970).

[6] W. SCHMIDT, *Integer points on curves of genus 1 (à paraître).*

[7] C.L. SIEGEL, *Abschätzung von Einheiten*, Nachr. Akd.Wiss Göttingen Math. Phys. K1 **II** (1969), 71–86.

[8] V.G. SPRINDZUK, *A hyperelliptic diophantine equation and class numbers (in Russian)*, Acta Arith. **30** (1976), 95–108.

[9] L.A. TRELINA, *On S-integral solutions of the hyperelliptic equation (in Russian)*, Dokl.Akad. Nauk BSSR (1978), 881–884.

Université de Théssalonique
Département de Mathématiques
54006 THESSALONIQUE
GRÈCE.