JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

JEAN-PAUL ALLOUCHE

OLIVIER SALON

Sous-suites polynomiales de certaines suites automatiques

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 5, nº 1 (1993), p. 111-121

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1993__5_1_111_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **5** *(1993), 111–121*

Sous-suites polynomiales de certaines suites automatiques

par Jean-Paul Allouche et Olivier Salon

1. Introduction

Une sous-suite d'une suite automatique obtenue par extraction "régulière" est-elle aussi automatique ?

Les suites que nous considérons dans cet article sont à valeurs dans un groupe abélien, noté additivement. Rappelons une propriété caractéristique des suites automatiques que nous prendrons comme définition, (voir aussi [2], [6], [7], [8], [12] et [13]) :

Définition. *Soit B un entier ≥ 2. Une suite $u = (u(n))_n$ est dite B-automatique si son B-noyau $N_B(u)$ défini comme l'ensemble de sous-suites*

$$N_B(u) = \{n \to u(B^k n + r)\,;\; k \geq 0,\; 0 \leq r \leq B^k - 1\}$$

est fini.

Remarquons que cette définition implique qu'une suite automatique ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Par ailleurs on voit facilement qu'une suite ultimement périodique est B-automatique quel que soit l'entier B supérieur ou égal à 2.

Il n'est pas difficile de montrer (voir ci-dessous) que si la suite $(u(n))_n$ est B-automatique, il en est de même pour les sous-suites $(u(an + b))_n$, quels que soient les entiers naturels a et b. De façon plus générale, que peut-on dire de la suite $u \circ R = (u(R(n)))_n$ où R est un polynôme, disons dans $\mathbb{N}[X]$? Le cas où u est la suite $s_B = (s_B(n))_n$, (en notant $s_B(n)$ la somme, réduite modulo B, des chiffres de n en base B), a été étudié dans [1] : *si R est un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 et tel que $R(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$, alors la suite $s_B \circ R$ n'est pas B-automatique.*

Manuscrit reçu le 10 octobre 1991.
Les résultats contenus dans cet article ont été exposés au colloque "Thémate", (CIRM, Luminy, Mai 1991).

En fait l'hypothèse supplémentaire de la primalité de B est faite dans [1], mais l'examen de la preuve montre que cette condition est inutile, si on ne formule pas le résultat en termes de transcendance de série formelle, (voir le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, [6]). Notons au passage que, pour $B = 2$, la suite s_B n'est autre que la célèbre suite de Prouhet-Thue-Morse.

Naturellement la non-automaticité des suites $u \circ R$, (où R est un polynôme comme ci-dessus), ne peut être vraie pour toute suite automatique u. Il n'est pas difficile en effet de construire une suite u qui soit B-automatique et telle que $\forall n,\ u(2n) = 0$, (sans que u soit ultimement périodique) ; pour le choix $R(X) = X(X+1)$, la suite $u \circ R$ est alors automatique. De même les suites de pliage de papier à instructions de pliage ultimement périodiques sont aussi des exemples de suites automatiques - non ultimement périodiques - telles que les suites $u \circ R$ sont encore automatiques, (voir [11]).

Dans ce qui suit, nous nous proposons de reprendre la preuve donnée dans [1], où l'argument essentiel est la *forte B-additivité* de la suite s_B :

$$\forall k \geq 0,\ \forall r \in [0, B^k - 1],\ \forall n,\ s_B(B^k n + r) = s_B(n) + s_B(r),$$

en la généralisant à une classe de suites dites *quasi fortement B-additives* dont la définition sera donnée au paragraphe 3, et qui contient les réductions, modulo un entier, des suites de décompte des occurrences de certains blocs dans l'écriture des entiers en base B, ainsi que les réductions, modulo un entier, de certaines suites digitales (au sens de Cateland [5]).

2. Le cas des suites $(u(an+b))_n$

Nous allons commencer par le cas facile d'un polynôme de degré 1.

PROPOSITION. *Soit $R \in \mathbb{Q}[X]$, tel que $R(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ et $d^\circ R = 1$. Si la suite u est B-automatique, alors la suite $u \circ R$ est aussi B-automatique.*

Démonstration. Redonnons une preuve de ce résultat bien connu, (voir entre autres [1]). Puisque R est dans $\mathbb{Q}[X]$, il existe des entiers a, b, q, (avec $a \neq 0$), tels que $R(X) = \frac{aX+b}{q}$. De plus $R(0) = \frac{b}{q} \in \mathbb{N}$ et $R(1) = \frac{a}{q} + \frac{b}{q} \in \mathbb{N}$, d'où $\frac{a}{q} \in \mathbb{Z}$. Mais $R(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{a}{q} n$, et $R(n) \in \mathbb{N}$, ainsi $\frac{a}{q}$ est-il positif et appartient donc à $\mathbb{N}^*$. Finalement $R(X) = \alpha X + \beta$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

Posons $v = u \circ R$. Soit $\gamma \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, \cdots, B^\gamma - 1\}$. On a $v(B^\gamma n + r) = u(\alpha B^\gamma n + \alpha r + \beta)$. En faisant la division euclidienne de $\alpha r + \beta$ par B^γ, il vient :

$$\alpha r + \beta = B^\gamma q + s, \text{ où } 0 \leq s \leq B^\gamma - 1.$$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v(B^\gamma n + r) = u(B^\gamma(\alpha n + q) + s)$, ce qui prouve que les suites du B-noyau de v sont des extractions des suites du B-noyau de u.

Examinons maintenant ces extractions. On a :

$$0 \leq q \leq \frac{\alpha r + \beta}{B^\gamma} \leq \alpha + \frac{\beta}{B^\gamma} \leq \alpha + \beta.$$

Ainsi les extractions (toutes déterminées par α et q) sont-elles en nombre fini, de sorte que la finitude du B-noyau de u entraîne celle du B-noyau de v.

3. Les suites quasi fortement B-additives. Un premier théorème

R désigne désormais un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ envoyant $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et de degré supérieur ou égal à 2.

Si $s_B(n)$ désigne la somme des chiffres de l'écriture de l'entier n en base B, réduite modulo B, le premier auteur a montré dans ([1]) que $s_B \circ R$ n'est pas une suite B-automatique, en utilisant la forte B-additivité de s_B :

$$\forall k \geq 0,\ \forall r \in [0, B^k - 1],\ \forall n,\ s_B(B^k n + r) = s_B(n) + s_B(r).$$

Nous allons affaiblir cette hypothèse relative à une suite u pour maintenir la conclusion, en nous inspirant de la méthode utilisée dans [1].

DÉFINITION. *Une suite u, à valeurs dans un groupe abélien noté additivement, est dite quasi fortement B-additive si elle vérifie la condition :*

$$\forall r \in \mathbb{N},\ \exists \gamma_0(r),\ \forall \gamma \geq \gamma_0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u(B^\gamma n + r) = u(n) + u(r).$$

Remarquons que si une suite u est fortement B-additive, elle est quasi fortement B-additive, (il suffit de prendre $\gamma_0(r) > \frac{\log r}{\log B}$ pour $r \neq 0$).

THÉORÈME. *Soit R un polynôme dans $\mathbb{Q}[X]$, de degré supérieur ou égal à 2, et tel que $R(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$, et soit u une suite quasi fortement B-additive. Alors, si la suite $u \circ R$ est B-automatique, la suite u est périodique.*

Démonstration. La démonstration va être faite en trois étapes. Nous allons d'abord établir une propriété des suites automatiques, (un peu analogue au lemme fondamental de [1], mais d'énoncé plus simple). Puis nous appliquerons cette propriété pour montrer que l'automaticité de la suite $u \circ S$, où u est quasi fortement B-additive et où S est un polynôme de $\mathbb{N}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2, implique l'existence de certaines relations entre les coefficients du polynôme S. La dernière étape est la preuve proprement dite du théorème.

(a) *Soient v une suite B-automatique, et d un entier ≥ 2. Notons $f_n(x) = v(B^{x+(d-2)n}(B^n+1)+1)$. Alors il existe T dans $\mathbb{N}^*$, et n_0 dans $\mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0,\ f_n(n) = f_n(n+T)$.*

En effet, l'ensemble de sous-suites $\{(v(B^\alpha m+1))_{m\in\mathbb{N}}\,;\ \alpha \in \mathbb{N}^*\}$ est fini, (comme sous-ensemble du B-noyau de v), donc :

$$\exists \alpha_0 \in \mathbb{N},\ \exists T \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \in \mathbb{N},\ v(B^{\alpha_0}m+1) = v(B^{\alpha_0+T}m+1).$$

En remplaçant m par Bm, B^2m, $\cdots$, on obtient :

$$\exists \alpha_0 \in \mathbb{N},\ \exists T \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall \alpha \geq \alpha_0,\ v(B^{\alpha}m+1) = v(B^{\alpha+T}m+1).$$

Prenons $\alpha = (d-1)n$, $m = B^n+1$ et choisissons n_0 de sorte que $n \geq n_0 \implies \alpha \geq \alpha_0$; il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ v(B^{(d-1)n}(B^n+1)+1) = v(B^{(d-1)n+T}(B^n+1)+1),$$

c'est-à-dire exactement : $\forall n \geq n_0,\ f_n(n) = f_n(n+T)$.

(b) *Soit S un polynôme dans $\mathbb{N}[X]$, de degré $d \geq 2$, écrivons $S(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$. Soit u une suite quasi fortement B-additive. Alors, si $u \circ S$ est B-automatique, on a :*

$$u(a_{d-1}+(d+1)a_d) = u(a_{d-1}+da_d) + u(a_d).$$

Appliquons l'étape **(a)** à $v = u \circ S$, supposée B-automatique, (d est le degré de S et $f_n(x) = v(B^{x+(d-2)n}(B^n+1)+1)$) :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= u\left[\sum_{i=0}^{d} a_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} B^{(x+(d-2)n)j} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} B^{nk}\right] \\ &= u\left(\sum_{j=0}^{d}\sum_{k=0}^{j}\sum_{i=j}^{d} a_i \binom{i}{j}\binom{j}{k} B^{(x+(d-2)n)j+nk}\right). \end{aligned}$$

Posant alors $b_{j,k} = \sum_{i=j}^{d} a_i \binom{i}{j}\binom{j}{k}$, on a :

$$f_n(n) = u\left(\sum_{j=0}^{d}\sum_{k=0}^{j} b_{j,k}B^{((d-1)j+k)n}\right).$$

Dans cette double somme, deux exposants de B correspondant à des couples (j,k) et (j',k') distincts peuvent-ils être égaux ?

Supposons donc $(d-1)j+k = (d-1)j'+k'$, avec $j \leq j'$ (par exemple). Alors $(d-1)(j'-j) = k-k'$, d'où $k' \leq k$, ce qui conduit à

$$0 \leq k' \leq k \leq j \leq j' \leq d.$$

Le cas $k-k' = d$ est impossible, puisqu'il amène $j = j'$; dès lors $k-k'$ est un multiple non nul de $d-1$ inférieur ou égal à $d-1$, c'est-à-dire $k-k' = d-1$ et donc $j'-j = 1$, ce qui donne comme unique possibilité $(j,k) = (d-1,d-1)$ et $(j',k') = (d,0)$.

On écrit alors

$$f_n(n) = u\left((b_{d-1,d-1} + b_{d,0})B^{d(d-1)n} + \sum{}' b_{j,k}B^{((d-1)j+k)n}\right),$$

la somme $\sum'$ étant étendue à tous les couples (j,k), $0 \leq j \leq d$ et $0 \leq k \leq j$, distincts de $(d-1,d-1)$ et de $(d,0)$.

Or, comme u est quasi fortement B-additive, on a facilement pour des entiers naturels c_i et γ_i :

si $0 = \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_k$, et $\forall i \in \{1,\cdots,k-1\}$, $\gamma_{i+1}-\gamma_i \geq \sup_{1\leq i\leq k} \gamma_0(c_i)$, alors :

$$u\left(\sum_{i=1}^{k} B^{\gamma_i}c_i\right) = \sum_{i=1}^{k} u(c_i),$$

(où les $\gamma_0(c_i)$ sont donnés par la définition de la quasi forte B-additivité de la suite u).

Ici, dans la dernière écriture de $f_n(n)$, les exposants sont distincts, (pour $n \in \mathbb{N}^*$), donc diffèrent deux à deux d'au moins n, (puisque n est en facteur). Dès lors :

$$n \geq \sup_{\substack{0\leq j\leq d\\ 0\leq k\leq j}} \gamma_0(b_{j,k}) \implies f_n(n) = u(b_{d-1,d-1} + b_{d,0}) + \sum{}' u(b_{j,k}).$$

Utilisons la même technique pour $f_n(n+T)$:

$$f_n(n+T) = u\left(\sum_{j=0}^{d}\sum_{k=0}^{j} b_{j,k}B^{((d-1)n+T)j+nk}\right).$$

Considérons de nouveau deux couples distincts (j,k) et (j',k'), avec $0 \leq j,\ j' \leq d$, $0 \leq k \leq j$, $0 \leq k' \leq j'$, et examinons la différence des exposants de B correspondants, en valeur absolue :

$$D = |[(d-1)(j'-j)+(k'-k)]\, n - T(j-j')|\,.$$

Si le coefficient de n est non nul, $D \geq n - Td \geq 1 + \sup\limits_{\substack{0\leq j\leq d\\ 0\leq k\leq j}} \gamma_0(b_{j,k})$ pour

$n \geq n_1$,

et si le coefficient de n est nul, alors j est distinct de j', et $D = |T(j-j')| \geq T$; mais au début de l'étape **(a)**, on peut remplacer T par n'importe lequel de ses multiples entiers strictement positifs, de sorte que dans tous les cas :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \implies D \geq 1 + \sup_{\substack{0\leq j\leq d\\ 0\leq k\leq j}} \gamma_0(b_{j,k}).$$

Il n'y a cette fois-ci pas de regroupement puisque D n'est jamais nul, et la quasi forte B-additivité de la suite u fournit alors, (pour $n \geq n_1$) :

$$f_n(n+T) = \sum_{j=0}^{d}\sum_{k=0}^{j} u(b_{j,k}).$$

Mais, puisque $n \geq n_0 \implies f_n(n) = f_n(n+T)$, la comparaison des écritures amène alors, (pour n assez grand) :

$$u(b_{d-1,d-1} + b_{d,0}) = u(b_{d-1,d-1}) + u(b_{d,0}),$$

Soit encore, puisque $b_{d,0} = a_d$ et $b_{d-1,d-1} = a_{d-1} + da_d$:

$$u(a_{d-1} + (d+1)a_d) = u(a_{d-1} + da_d) + u(a_d).$$

(c) Soit maintenant $R \in \mathbb{Q}[X]$, de degré d supérieur ou égal à 2 et tel que $R(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$. Il existe q dans $\mathbb{N}^*$ et $(\alpha_0, \cdots, \alpha_d)$ dans $\mathbb{Z}^{d+1}$ tels que $R(X) = \frac{1}{q}\sum\limits_{i=0}^{d} \alpha_i X^i$, et l'on a $\frac{\alpha_0}{q} \in \mathbb{N}$ et $\alpha_d \in \mathbb{N}^*$.

Soit $t \in \mathbb{N}$. Considérons $S(X) = R(qt+qdX) = R(qt)+\sum_{k=1}^{d} \frac{(qdX)^k}{k!} R^{(k)}(qt)$.
On a, pour $k \in \{1, \cdots, d\}$,

$$R^{(k)}(X) = \sum_{i=k}^{d} \alpha_i \frac{i(i-1)\cdots(i-k+1)}{q} X^{i-k} = \sum_{i=k}^{d} \frac{\alpha_i}{q} k! \binom{i}{k} X^{i-k},$$

de sorte que, pour t assez grand, $\frac{q}{k!} R^{(k)}(qt) \in \mathbb{N}$, et ainsi $S \in \mathbb{N}[X]$.

Supposons que la suite $u \circ R$ est B-automatique ; d'après la proposition rappelée au paragraphe 2, la suite $((u \circ S)(n))_n = ((u \circ R)(qt + qdn))_n$ est B-automatique et l'on peut appliquer la relation obtenue à la fin de l'étape **(b)**. On a $S(X) = \sum_{i=0}^{d} \frac{\alpha_i}{q}(qt+qdX)^i$, de sorte que les coefficients des termes en X^d et X^{d-1} de S sont respectivement :

$$a_d = \alpha_d q^{d-1} d^d \text{ et } a_{d-1} = \alpha_{d-1} q^{d-2} d^{d-1} + \alpha_d q^{d-1} d^d t.$$

La relation de la fin du **(b)** devient, (pour tout t assez grand) :

$$u(\alpha_{d-1} q^{d-2} d^{d-1} + \alpha_d q^{d-1} d^d t + (d+1)\alpha_d q^{d-1} d^d) =$$
$$u(\alpha_{d-1} q^{d-2} d^{d-1} + \alpha_d q^{d-1} d^d t + d\alpha_d q^{d-1} d^d) + u(\alpha_d q^{d-1} d^d),$$

ou encore, pour tout t assez grand,

$$u(\lambda t + \mu) = u(\lambda t + \nu) + u(\lambda),$$

où l'on a posé :

$$\lambda = \alpha_d q^{d-1} d^d,.$$
$$\mu = \alpha_{d-1} q^{d-2} d^{d-1} + (d+1)\alpha_d q^{d-1} d^d,$$
$$\nu = \alpha_{d-1} q^{d-2} d^{d-1} + \alpha_d q^{d-1} d^{d+1},$$

et où l'on a remarqué que

$$\mu - \nu = \lambda,$$

soit

$$(*) \qquad \exists t_0 \in \mathbb{N},\ \forall t \geq t_0,\ u(\lambda(t+1) + \nu) = u(\lambda t + \nu) + u(\lambda).$$

Or les valeurs $u(\lambda t + \nu)$, lorsque t parcourt les entiers supérieurs ou égaux à t_0, sont dans un ensemble fini ; d'où

$$\exists t_1 \in \mathbb{N},\ t_1 \geq t_0,\ \exists \tau \in \mathbb{N}^*,\ u(\lambda t_1 + \nu) = u(\lambda(t_1 + \tau) + \nu).$$

Compte tenu de la relation $(*)$, on en déduit :

$$\forall t \geq t_1,\ u(\lambda t + \nu) = u(\lambda(t + \tau) + \nu),$$

d'où

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u(\lambda t_1 + \nu) = u(\lambda(t_1 + k\tau) + \nu) = u(k\lambda\tau + \lambda t_1 + \nu).$$

En choisissant $k = B^\gamma n$, où $n \in \mathbb{N}$ et $\gamma \geq \gamma_0(\lambda t_1 + \nu)$, on obtient, grâce à la quasi forte B-additivité de u :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u(\lambda t_1 + \nu) = u(n\lambda\tau) + u(\lambda t_1 + \nu),$$

c'est-à-dire, en posant $A = \lambda\tau$, (remarquons que A n'est pas nul, sinon λ donc α_d serait nul, et R ne serait pas de degré d) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u(An) = 0.$$

Maintenant, soit i un entier compris entre 0 et $A-1$, et soit $k = \sup\limits_{0 \leq j \leq A} \gamma_0(j)$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall l \in \mathbb{N},\ 0 = u(A(B^k n + l)) = u(B^k(An + i) + Al - B^k i).$$

Si l'on choisit $l = 1 + \left[\frac{B^k i}{A}\right]$, alors $0 \leq Al - B^k i \leq A$, et on obtient, grâce à la quasi forte B-additivité de u et au choix de k :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u(An + i) + u(Al - B^k i) = 0,$$

ce qui prouve que $u(An + i)$ ne dépend pas de n, ou encore que u est périodique de période A.

4. Applications

Soit $\mathcal{A} = \{0, \cdots, B-1\}$, $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des mots formés sur l'alphabet $\mathcal{A}$. Considérons un mot $M \in \mathcal{A}^*$ non vide, *ne commençant ni ne finissant par* 0, soit k un entier supérieur ou égal à 2 et désignons par $u_M(n)$ le nombre, réduit modulo k, d'occurrences du mot M dans l'écriture de n en base B.

COROLLAIRE 1.

Sauf dans les cas $B = 3$, $M = 1$ et $k = 2$, u_M est une suite B-automatique telle que, quel que soit le polynôme R de $\mathbb{Q}[X]$ envoyant $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et de degré supérieur ou égal à 2, la suite $u_M \circ R$ n'est pas B-automatique.

Si $B = 3$, $M = 1$ et $k = 2$, posons $R(X) = \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{d} \alpha_i X^i$, où les α_i sont dans $\mathbb{Z}$, alors la suite $u_M \circ R$ est périodique de période $2q$, (donc B'-automatique quel que soit l'entier $B' \geq 2$).

Démonstration. Montrons que u_M est une suite quasi fortement B-additive. Pour cela fixons un entier r possédant h chiffres dans son écriture en base B, (la plus courte possible) ; soit ρ le nombre de chiffres du mot M, (on note $\rho = long(M)$).

Dès lors, pourvu que $\gamma - h \geq \rho$, pour apparaître dans l'écriture en base B de $B^\gamma n + r$, le mot M doit apparaître soit dans l'écriture de n, soit dans l'écriture de r. Ainsi $\forall r \in \mathbb{N}$, $\exists \gamma_0(r) = long(M) + long(r)$, $\gamma \geq \gamma_0(r) \implies u_M(B^\gamma n + r) = u_M(n) + u_M(r)$.

Rappelons maintenant que, pour une suite u B-automatique à valeurs dans un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$, le réel $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u(n)}{k^n}$ est soit rationnel soit transcendant, et est rationnel si et seulement si la suite u est ultimement périodique (théorème de Loxton et Van der Poorten, voir [9]). C'est pourquoi Morton et Mourant ([10]), s'intéressant à la transcendance de certains réels, ont étudié les suites u_M ci-dessus définies, cherchant à savoir quand elles sont ultimement périodiques. Notons que ces suites sont B-automatiques, (cf. [10], remarquons que si on ne réduit pas modulo k le nombre d'occurrences de M, les suites obtenues sont B-régulières, [4]). Morton et Mourant démontrent le résultat suivant :

- si $long(M) > 1$, alors la suite u_M n'est pas ultimement périodique,
- si $long(M) = 1$, alors la suite u_M n'est ultimement périodique que dans l'unique cas $B = 3$, $M = 1$ et $k = 2$, et l'on a dans ce cas $u(n) \equiv n \bmod 2$.

Il ne reste plus qu'à appliquer notre théorème pour conclure dans les cas où l'on n'a pas à la fois $B = 3$, $M = 1$ et $k = 2$. Dans le cas exceptionnel, comme $u(n) \equiv n (\mathrm{mod} 2)$, si l'on pose $R(X) = \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{d} \alpha_i X^i$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall h \in \mathbb{N},\ R(2qn + h) - R(h) = \sum_{i=0}^{d} \frac{a_i}{q}((2qn + h)^i - h^i) \equiv 0 \bmod 2.$$

Donc :

$$(u_M \circ R)(2qn+h) \equiv R(2qn+h) \equiv R(h) \equiv (u_M \circ R)(h) \bmod 2.$$

La suite $u_M \circ R$ est alors périodique, de période $2q$, (donc B'-automatique quel que soit l'entier B' supérieur ou égal à 2).

On peut appliquer aussi notre théorème à certaines suites digitales au sens de Cateland ([5]), réduites modulo k : une suite digitale est une combinaison linéaire de nombres d'occurrences de différents mots dans l'écriture de n en base B.

COROLLAIRE 2. *Supposons que $\mathcal{M}$ soit une famille finie de mots sur l'alphabet $\{0, \cdots, B-1\}$ qui vérifie la propriété*

$$\forall M \in \{0, \cdots, B-1\}^*, \ \exists i \in \{0, \cdots, B-1\}, \ Mi \notin \mathcal{M}.$$

Soit k un entier tel que $(k, B-1) = 1$ et soit $U_{\mathcal{M}}$ la suite digitale réduite modulo k définie par $U_{\mathcal{M}}(n) = \sum_{P \in \mathcal{M}} c_P u_P(n)$ où les c_P sont des entiers non nuls modulo k. Alors, pour tout polynôme R de $\mathbb{Q}[X]$ envoyant $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et de degré supérieur ou égal à 2, la suite $U_{\mathcal{M}} \circ R$ n'est pas B-automatique.

Démonstration. La suite $U_{\mathcal{M}}$ est quasi fortement B-additive comme combinaison linéaire de suites quasi fortement B-additives, et elle n'est pas ultimement périodique d'après [10].

Un dernier exemple d'application concerne les suites de Rudin-Shapiro généralisées au sens de [3].

COROLLAIRE 3. *Soient a et a' deux éléments de $\{1, \cdots, B-1\}$, et r un entier supérieur ou égal à 2. Désignons par $u(n)$ le nombre, réduit modulo k, d'occurrences de tous les mots de longueur r, commençant par a et finissant par a', dans la représentation de l'entier n en base B. Alors si $(k, B-1) = 1$, pour tout polynôme R de $\mathbb{Q}[X]$ envoyant $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et de degré supérieur ou égal à 2, la suite $u \circ R$ n'est pas B-automatique.*

Démonstration. La suite u est une suite digitale réduite modulo k à laquelle le corollaire 2 s'applique puisque $u(n)$ est la somme des nombres, (réduits modulo k), d'occurrences des mots $ai_1 \cdots i_r a'$, lorsque $(i_1, \cdots, i_r)$ parcourt $\{0, \cdots, B-1\}^r$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-P. ALLOUCHE, *Somme des chiffres et transcendance*, Bull. Soc. math. France **110** (1982), 279–285.

[2] J.-P. ALLOUCHE, *Automates finis en théorie des nombres*, Expo. Math. **5** (1987), 239–266.

[3] J.-P. ALLOUCHE et P. LIARDET, *Generalized Rudin-Shapiro sequences*, Acta Arith. **60** (1991), 1–27.

[4] J.-P. ALLOUCHE et J. SHALLIT, *The ring of k-regular sequences*, Theoret. Comp. Sci. **98** (1992), 163–187.

[5] E. CATELAND, *Suites digitales et suites k-régulières*, Thèse, Université Bordeaux I, 1992.

[6] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS FRANCE et G. RAUZY, *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull. Soc. math. France **108** (1980), 401–419.

[7] A. COBHAM, *Uniform tag sequences*, Math. Systems Theory **6** (1972), 164–192.

[8] M. DEKKING, M. MENDÈS FRANCE et A. J. van der POORTEN, *Folds!*, Math. Intell. **4** (1982), 130–138, 173–181, 190–195.

[9] J. H. LOXTON et A. J. Van der POORTEN, *Arithmetic properties of automata: regular sequences*, J. Reine Angew. Math. **392** (1988), 57–69.

[10] P. MORTON et W. J. MOURANT, *Digit patterns and transcendental numbers*, J. Austral. Math. Soc., Ser. A **51** (1991), 216–236.

[11] D. RAZAFY-ANDRIAMAMPIANINA, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, Math. **314** (1992), 875–878.

[12] O. SALON, *Suites automatiques à multi-indices et algébricité*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, Math. **305** (1987), 501–504.

[13] O. SALON, *Suites automatiques à multi-indices*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1986–1987), Exposé 4, 4-01–4-27.

Jean-Paul Allouche,
C. N. R. S., Math.
351 cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex

Olivier Salon
13 rue du Midi
F-94110 Arcueil