JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

JIE WU

Distribution des nombres $\mathcal{B}$-libres dans de petits intervalles

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 5, n° 1 (1993), p. 151-163

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1993__5_1_151_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **5** *(1993), 151–163*

Distribution des nombres $\mathcal{B}$-libres dans de petits intervalles

par Jie Wu

I. Introduction

La notion de nombre $\mathcal{B}$-libre est introduite par Erdös [2] comme une généralisation de celle d'entier sans facteur carré. Plus précisément, si $\mathcal{B}$ est une suite d'entiers

$$\mathcal{B} = \{b_k : 1 < b_1 < b_2 < \cdots < b_k < \cdots\}$$

vérifiant la condition suivante

$$(1.1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k} < \infty \qquad \text{et} \qquad (b_k, b_j) = 1 \quad (k \neq j).$$

Nous désignons, dans toute la suite, par $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{B}) = \{a_k\}_{k\geq 1}$ la suite des nombres $\mathcal{B}$-libres, c'est-à-dire des entiers qui ne sont divisibles par aucun élément de $\mathcal{B}$. Evidemment, en choisissant pour $\mathcal{B}$ la suite des carrés des nombres premiers, on obtient bien pour $\mathcal{A}$ la suite des entiers sans facteur carré. Nous pouvons sans difficulté démontrer que pour tout $\mathcal{B}$ la suite $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ possède une densité naturelle positive; nous avons en fait

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\leq x\\ n\in\mathcal{A}}} 1 = B \quad \text{avec} \quad B := \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{b_k}\right).$$

Le produit infini précédent est convergent grâce à (1.1).

Ici, nous nous intéressons au problème de la distribution des nombres $\mathcal{B}$-libres dans de petits intervalles $]x, x+y]$, avec $0 < y = y(x) \leq x$. Nous désignons par $N(x,y)$ le nombre des nombres $\mathcal{B}$-libres dans l'intervalle $]x, x+y]$. Il s'agit donc d'évaluer la quantité $N(x,y)$.

Manuscrit reçu le 18 mai 1992, version définitive le 16 février 1993.

Les deux résultats suivants sont dus à Erdös.

THÉORÈME A ([2], Théorème 3). *Soit* $y(x)/x^{1-\varepsilon} \to \infty$ $(x \to \infty)$ *pour chaque* $\varepsilon > 0$, *on a alors*

$$N\big(x, y(x)\big) = \big\{B + o(1)\big\}y(x) \quad (x \to \infty), \tag{1.2}$$

et ce résultat est optimal en ce sens que pour tout $\varepsilon > 0$ *et toute fonction* $y = y(x) \le x^{1-\varepsilon}$, *il existe une suite* $\mathcal{B}$ *satisfaisant (1.1) mais non (1.2).*

THÉORÈME B ([2], Théorème 1). *Il existe une constante absolue* $\theta \in [\frac{1}{2}, 1[$ *telle que l'on ait*

$$N(x, x^\theta) \gg_{\theta,\mathcal{B}} x^\theta$$

pour $x \ge x_0(\theta, \mathcal{B})$.

La valeur de θ dans le Théorème B peut être améliorée. Mais Erdös a construit un exemple pour montrer qu'on ne peut pas remplacer x^θ par une fonction trop lente.

THÉORÈME C ([2], Théorème 2). *Il existe une suite* $\mathcal{B} = \{b_k\}_{k\ge1}$ *répondant à l'hypothèse (1.1) telle que l'on ait*

$$a_{k+1} - a_k \ge \exp\left\{\tfrac{1}{4}\sqrt{\log a_k \log\log a_k}\right\}$$

pour une infinité de k.

En ce qui concerne la valeur optimale de θ, Erdös [2] a formulé la conjecture suivante.

Conjecture. *Pour chaque* $\varepsilon > 0$, *il existe une constante* $x_0(\varepsilon, \mathcal{B})$ *telle que pour* $x \ge x_0(\varepsilon, \mathcal{B})$, *on ait la minoration*

$$N(x, x^\varepsilon) \ge 1,$$

autrement dit, telle que l'intervalle $]x, x+x^\varepsilon]$ *contienne au moins un nombre* $\mathcal{B}$*-libre.*

Une confirmation de cette conjecture semble extrêmement difficile en l'état actuel des connaissances. Même dans le cas des nombres sans facteur carré, les meilleurs estimations connues ($\theta > \frac{1}{5}$, voir [3]) sont bien plus faibles qu'un tel résultat. Récemment, Plaksin [8] a démontré que cette conjecture est vraie en moyenne. Plus précisément, il a obtenu l'énoncé suivant.

THÉORÈME D ([8], Théorème 1). *Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une constante $X_0(\varepsilon, \mathcal{B})$ telle que l'on ait*

$$mes(\{x \le X : N(x, x^\varepsilon) = 0\}) \ll_{\varepsilon,\mathcal{B}} X^{1-\varepsilon} \log X$$

pour $X \ge X_0(\varepsilon, \mathcal{B})$, où mes désigne la mesure de Lebesgue.

Dans le but d'améliorer la valeur de θ dans le Théorème B, Szemerédi [9] a obtenu le premier résultat quantitatif, par une méthode élémentaire.

THÉORÈME E ([9], Théorème). *Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une constante $x_0(\varepsilon, \mathcal{B})$ telle que l'on ait*

$$N\left(x, x^{1/2+\varepsilon}\right) \gg_{\varepsilon,\mathcal{B}} x^{1/2+\varepsilon}$$

pour $x \ge x_0(\varepsilon, \mathcal{B})$.

Il est difficile de diminuer la valeur de θ, parce que l'hypothèse (1.1) est très générale et elle n'interdit pas un comportement anarchique de la suite $\mathcal{B}$. Grâce à un système de poids, Bantle et Grupp [1] ramènent (par une technique d'analyse de Fourier) ce problème à la majoration d'une somme d'exponentielles de type II :

$$S_{II} := \sum_{h\sim H} \sum_{m\sim M} \sum_{n\sim N} \varphi_m \psi_n e\left(\frac{xh}{mn}\right)$$

où $e(t) := \exp(2\pi it)$, $|\varphi_m| \le 1, |\psi_n| \le 1$ et où la notation $h \sim H$ signifie que $c_1 H < h \le c_2 H$ où c_1 et c_2 sont deux constantes positives arbitraires. Ils font alors appel à une évaluation de Fouvry et Iwaniec ([4], Théorème 6) pour S_{II} et obtiennent $\frac{9}{20} + \varepsilon$ à la place de $\frac{1}{2} + \varepsilon$. Dans [10], nous modifions le système de poids de Bantle et Grupp de la façon suivante : le coefficient φ_m, initialement égal à la fonction caractéristique des nombres premiers, est transformé en $\varphi_m(\eta)$, fonction caractéristique des entiers dont tous les facteurs premiers sont supérieurs à x^η (η très petit). Par le lemme fondamental de la théorie du crible, on est ramemé à étudier, avec une erreur acceptable, la somme d'exponentielles de type I :

$$S_I := \sum_{h\sim H} \sum_{m\sim M} \sum_{n\sim N} \psi_n e\left(\frac{xh}{mn}\right).$$

Cette quantité est souvent plus facile à traiter car elle correspond à $\varphi_m = 1$. Nous utilisons un théorème de Fouvry et Iwaniec ([4], Théorème 5) et parvenons à $\frac{5}{12} + \varepsilon$. Récemment, nous avons amélioré la majoration de Fouvry et Iwaniec pour S_I, ce qui nous permet de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME F ([12], Théorème). *Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une constante $x_0(\varepsilon, \mathcal{B})$ telle que l'on ait*

$$N(x, x^{17/41+\varepsilon}) \gg_{\varepsilon,\mathcal{B}} x^{17/41+\varepsilon}$$

pour $x \geq x_0(\varepsilon, \mathcal{B})$.

Nous notons systématiquement dans tout l'article p un nombre premier et a un nombre $\mathcal{B}$-libre. Il est intéressant d'étudier la résolubilité des équations suivantes

$$p + 2 = a \qquad \text{et} \qquad n = p + a$$

dans le petit intervalle $]x, x + x^\theta]$. Le théorème suivant assure que pour tout $\theta > \frac{3}{4}$ et $x \geq x_0(\theta, \mathcal{B})$, l'intervalle $]x, x + x^\theta]$ contient bien au moins un nombre $\mathcal{B}$-libre de type $p + 2$, et aussi un nombre premier de la forme $2 + a$. Ce dernier énoncé est comparable avec le résultat suivant de Huxley et Iwaniec [5] : l'équation $p = 1 + m^2 + n^2$ est résoluble pour x assez grand et $x < p \leq x + x^{0,99}$, où m, n sont des entiers.

THÉORÈME 1. *Soit h un entier fixé. Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une constante $x_0(\varepsilon, \mathcal{B}) > 0$ telle que*

(i) si h est un entier pair, alors l'équation

$$p + h = a$$

est résoluble pour $x \geq x_0(\varepsilon, \mathcal{B}, h)$, $x < p \leq x + x^{3/4+\varepsilon}$ et $a \in \mathcal{A}$. Plus précisément, on a la minoration

$$|\{x < p \leq x + x^{3/4+\varepsilon} : p + h \in \mathcal{A}\}| \gg_{\varepsilon,\mathcal{B}} x^{3/4+\varepsilon}(\log x)^{-1}$$

pour $x \geq x_0(\varepsilon, \mathcal{B}, h)$;

(ii) si h est un entier impair et si $b_1 > 2$, alors l'équation

$$p + h = a$$

est résoluble pour $x \geq x_0(\varepsilon, \mathcal{B}, h)$, $x < p \leq x + x^{3/4+\varepsilon}$ et $a \in \mathcal{A}$. Plus précisément, on a la minoration

$$|\{x < p \leq x + x^{3/4+\varepsilon} : p + h \in \mathcal{A}\}| \gg_{\varepsilon,\mathcal{B}} x^{3/4+\varepsilon}(\log x)^{-1}$$

pour $x \geq x_0(\varepsilon, \mathcal{B}, h)$.

THÉORÈME 2. *Pour chaque* $\varepsilon > 0$, *il existe une constante* $n_0(\varepsilon, \mathcal{B}) > 0$ *telle que*

(i) si $b_1 > 2$, *alors l'équation*

$$n = p + a$$

est résoluble pour $n \geq n_0(\varepsilon, \mathcal{B})$, $n - n^{3/4+\varepsilon} \leq p < n$ *et* $a \in \mathcal{A}$;

(ii) si $b_1 = 2$, *alors l'équation*

$$2n = p + a$$

est résoluble pour $n \geq n_0(\varepsilon, \mathcal{B})$, $2n - (2n)^{3/4+\varepsilon} \leq p < 2n$ *et* $a \in \mathcal{A}$.

Au paragraphe 3, nous donnerons une démonstration complète du Théorème 1. Nous omettons la démonstration du Théorème 2, qui est similaire.

Remerciements. L'auteur tient à exprimer sa profonde reconnaissance à O. Ramaré et M. Balazard pour leur sympathique invitation et leur accueil chaleureux. L'auteur adresse sa reconnaissance tout particulièrement au Professeur G. Tenenbaum pour son aide.

2. Deux lemmes

Pour démontrer le Théorème 1, nous avons besoin d'informations concernant la répartition des nombres premiers en progressions arithmétiques dans le cas de petits intervalles. Le premier résultat est un théorème de Bombieri-Vinogradov dans les petits intervalles. Ici, nous énonçons le résultat de Perelli, Pintz et Salerno [7], qui est en fait contenu dans un théorème plus général de l'auteur [11].

LEMME 1 ([7], Théorème). *Soit* $x^{3/5+\varepsilon} \leq y \leq x$. *En définissant*

$$\pi(z; d, a) := \sum_{\substack{p \leq z \\ p \equiv a \,(\mathrm{mod}\, d)}} 1$$

et

$$r(z, h; d, a) = \pi(z + h; d, a) - \pi(z; d, a) - \frac{1}{\varphi(d)} \int_z^{z+h} \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$$

où $\varphi(d)$ *est la fonction d'Euler, alors pour tout* $A > 0$, *il existe une constante positive* $C = C(A) > 0$ *telle que l'on ait la majoration*

$$\sum_{d \leq D} \max_{(a,d)=1} \max_{h \leq y} \max_{x/2 < z \leq x} \left| r(z, h; d, a) \right| \ll y \mathcal{L}^{-A},$$

où $D = yx^{-1/2}\mathcal{L}^{-C}$ *et* $\mathcal{L} = \log x$.

Le deuxième lemme dont nous avons besoin est une forme effective de l'inégalité de Brun-Titchmarsh, qui est due à Montgomery et Vaughan [6].

LEMME 2 ([6], Théorème 2). *On a uniformément pour* $1 \leq k < y \leq x$ *et tout entier* l

$$\pi(x+y;k,l) - \pi(x;k,l) < \frac{2y}{\varphi(k)\log(y/k)}.$$

3. Démonstration du Théorème 1

Nous désignons respectivement par $\mathbb{N}^*$ et $\mathcal{P}$ l'ensemble de tous les entiers ≥ 1 et l'ensemble des nombres premiers. Le résultat suivant est dû à Plaksin [8]. Pour la commodité du lecteur, nous en redonnons la preuve ici.

LEMME 3 ([8], Lemme 1). *La série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(b_k)}$$

est convergente.

Démonstration. On écrit d'abord

$$\sum_{\substack{b \leq x \\ b \in \mathcal{B}}} \frac{1}{\varphi(b)} = \sum_{\substack{b \leq x \\ b \in \mathcal{B} \cap \mathcal{P}}} \frac{1}{\varphi(b)} + \sum_{\substack{b \leq x \\ b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{P}}} \frac{1}{\varphi(b)} =: E_1 + E_2, \quad \text{(disons)}.$$

Pour E_1, on a évidemment

$$E_1 = \sum_{\substack{b \leq x \\ b \in \mathcal{B} \cap \mathcal{P}}} \frac{1}{b-1} \ll \sum_{\substack{b \leq x \\ b \in \mathcal{B}}} \frac{1}{b} \ll 1$$

grâce à (1.1).

Pour majorer E_2, on note $P^-(n)$ le plus petit facteur premier de n, avec la convention $P^-(1) = \infty$. Alors $b \leq x$ et $b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{P}$ impliquent bien que $P^-(b) \leq \sqrt{b} \leq \sqrt{x}$ et $\varphi(b) \geq (P^-(b)-1)^2$. De plus, $P^- : \mathcal{B} \to \mathcal{P}$ est une injection par l'hypothèse (1.1). Il vient donc

$$E_2 = \sum_{\substack{b \leq x \\ b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{P}}} \frac{1}{\varphi(b)} \leq \sum_{\substack{b \leq x \\ b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{P}}} \frac{1}{(P^-(b)-1)^2} \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{1}{(p-1)^2} \ll 1.$$

Cela achève la démonstration du lemme 3.

Dans la suite, nous démontrerons le point (i) du Théorème 1. L'assertion (ii) peut être prouvée similairement et nous omettons les détails.

Sans perte de généralité, nous supposons que $b_1 > 2$, parce que dans le cas contraire, on peut remplacer $\mathcal{B} = \{b_k\}_{k\geq 1}$ par $\mathcal{B}' = \{b_k\}_{k\geq 2}$, puisque $2 \not| p + h$.

Soient

$$\frac{3}{4} < \theta < 1 \quad \text{et} \quad 1 - \theta + \varepsilon \leq \theta - \frac{1}{2} - \varepsilon. \tag{3.1}$$

Nous définissons maintenant

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(x, \theta, \varepsilon) = \left\{q \in \mathcal{P} : x^{1-\theta+\varepsilon/2} < q \leq x^{\theta-1/2-\varepsilon/2}\right\}. \tag{3.2}$$

Soit

$$\ell = \ell(\varepsilon, \theta, \mathcal{B}) \in \mathbb{N}^*$$

le plus petit entier positif tel que

$$\sum_{k=\ell+1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(b_k)} < \frac{B^*(1-\theta)\varepsilon^2}{32} \tag{3.3}$$

où

$$B^* := \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{\varphi(b_k)}\right).$$

Ce produit infini est convergent et est positif par le lemme 1 ci-dessus et l'hypothèse $b_1 > 2$.

Choisissons $x_0 = x_0(\varepsilon, \theta, \mathcal{B})$ tel que

$$\prod_{k=1}^{\ell} b_k \leq \log x < x^{\varepsilon/4} \tag{3.4}$$

pour $x \geq x_0$. Nous imposerons plus tard d'autres restrictions supplémentaires sur x_0.

On note $\mathbf{1}_X$ la fonction caractéristique de l'ensemble $X \subseteq \mathbb{N}^*$, et $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{\mathbb{N}^*}$. Avec ces notations, on définit le poids $w(n)$ par le produit de convolution

$$w = \mathbf{1} * \mathbf{1}_{\mathcal{Q}}$$

et on considère la somme pondérée suivante

$$W = \sum_{\substack{x<p\leq x+x^\theta \\ p+h\not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, b)\,\forall\, b\in\mathcal{B}}} w(p+h).$$

D'après (3.1) et (3.2), on voit facilement que l'on a, pour $p \leq x + x^\theta$,

$$w(p+h) \leq 1/(1-\theta), \tag{3.5}$$

d'où il découle

$$\sum_{\substack{x<p\leq x+x^\theta \\ p+h\not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, b)\,\forall\, b\in\mathcal{B}}} 1 \geq (1-\theta) \sum_{\substack{x<p\leq x+x^\theta \\ p+h\not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, b)\,\forall\, b\in\mathcal{B}}} w(p+h) = (1-\theta)W.$$

Donc pour démontrer le Théorème 1, il suffit de prouver l'inégalité suivante

$$W \gg_{\varepsilon,\mathcal{B}} x^{3/4+\varepsilon}(\log x)^{-1}$$

pour $x \geq x_0(\varepsilon,\mathcal{B})$. Pour cela, nous décomposerons d'abord W en trois parties, ce qui constitue notre point de départ. La démonstration du Théorème 1 repose sur quatre lemmes. Le premier fournit une décomposition de W.

LEMME 4. *On a l'inégalité pour* $x \geq x_0(\varepsilon,\mathcal{B},h)$

$$W \geq W_1 - W_2 - W_3 \tag{3.6}$$

où

$$W_1 := \sum_{\substack{x<p\leq x+x^\theta \\ p\not\equiv -h \,(\mathrm{mod}\, b_k)\,\forall\, k\leq \ell}} w(p+h), \quad W_2 := \sum_{\substack{b_\ell<b\leq x^{\theta-\varepsilon/4} \\ b\in\mathcal{B}}} \sum_{\substack{x<p\leq x+x^\theta \\ p\equiv -h \,(\mathrm{mod}\, b)}} w(p+h)$$

et

$$W_3 := \sum_{\substack{x^{\theta-\varepsilon/4}<b\leq 2x \\ b\in\mathcal{B}}} \sum_{\substack{x<p\leq x+x^\theta \\ p\equiv -h \,(\mathrm{mod}\, b)}} w(p+h).$$

Démonstration. Evidemment, on peut écrire pour $x \geq x_0(\varepsilon,\mathcal{B},h)$

$$\begin{aligned} W &\geq \sum_{\substack{x<p\leq x+x^\theta \\ p+h\not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, b)\,\forall\, b\in\mathcal{B},\, b\leq 2x}} w(p+h) \\ &\geq \sum_{\substack{x<p\leq x+x^\theta \\ p+h\not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, b_k)\,\forall\, k\leq \ell}} w(p+h) - \left\{\sum_1 + \sum_2\right\} \sum_{\substack{x<p\leq x+x^\theta \\ p+h\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, b)}} w(p+h) \\ &=: W_1 - W_2 - W_3, \end{aligned}$$

où $\sum_1 = \sum_{\substack{b_\ell < b \le x^{\theta-\varepsilon/4} \\ b \in \mathcal{B}}}$ et $\sum_2 = \sum_{\substack{x^{\theta-\varepsilon/4} < b \le 2x \\ b \in \mathcal{B}}}$

ce qui complète la démonstration du lemme 4.

Dans la suite, on verra que W_2 et W_3 se comportent comme des termes d'erreur. Quant au terme W_1, il fournira le terme principal et un terme d'erreur qui est contrôlé par le lemme 2 ci-dessus.

Les deux lemmes suivants donnent les majorations souhaitées de W_2 et W_3.

LEMME 5. *On a la majoration*

$$W_2 \le \frac{B^*\varepsilon}{4} x^\theta (\log x)^{-1}$$

pour $x \ge x_0(\varepsilon, \theta, \mathcal{B})$.

Démonstration. D'après la définition de $w(n)$ et (3.1), on peut écrire

$$\begin{aligned}
W_2 &= \sum_{\substack{b_\ell < b \le x^{\theta-\varepsilon/4} \\ b \in \mathcal{B}}} \; \sum_{\substack{x < p \le x + x^\theta \\ p \equiv -h \,(\mathrm{mod}\, b)}} \; \sum_{\substack{q \in \mathcal{Q} \\ p \equiv -h \,(\mathrm{mod}\, q)}} 1 \\
&\le \frac{1}{1-\theta} \sum_{\substack{b_\ell < b \le x^{\theta-\varepsilon/4} \\ b \in \mathcal{B}}} \; \sum_{\substack{x < p \le x + x^\theta \\ p \equiv -h \,(\mathrm{mod}\, b)}} 1 \\
&= \frac{1}{1-\theta} \sum_{\substack{b_\ell < b \le x^{\theta-\varepsilon/4} \\ b \in \mathcal{B}}} \Big(\pi(x + x^\theta; b, -h) - \pi(x; b, -h) \Big).
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Brun-Titchmarsh, on obtient

$$W_2 \le \frac{1}{1-\theta} \sum_{\substack{b_\ell < b \le x^{\theta-\varepsilon/4} \\ b \in \mathcal{B}}} \frac{2x^\theta}{\varphi(b)\log(x^\theta/b)} \le \frac{8}{(1-\theta)\varepsilon} x^\theta (\log x)^{-1} \sum_{k=\ell+1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(b_k)}.$$

Il en résulte par (3.3)

$$W_2 \le \frac{B^*\varepsilon}{4} x^\theta (\log x)^{-1}$$

comme annoncé. Cela achève la démonstration du lemme 5.

LEMME 6. *On a la majoration*

$$W_3 \le 2x^{\theta-1/2-\varepsilon/4}$$

pour $x \ge x_0(\varepsilon, \theta, \mathcal{B})$.

Démonstration. La définition de $w(n)$ nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} W_3 &= \sum_{\substack{x^{\theta-\varepsilon/4}<b\le 2x\\ b\in\mathcal{B}}} \sum_{\substack{x<p\le x+x^\theta\\ p\equiv -h\,(\mathrm{mod}\, b)}} \sum_{\substack{q\in\mathcal{Q}\\ p\equiv -h\,(\mathrm{mod}\, b)}} 1 \\ &= \sum_{\substack{x^{\theta-\varepsilon/4}<b\le 2x\\ b\in\mathcal{B}}} \sum_{q\in\mathcal{Q}} \sum_{\substack{x<p\le x+x^\theta\\ p\equiv -h\,(\mathrm{mod}\, b)\\ p\equiv -h\,(\mathrm{mod}\, q)}} 1. \end{aligned}$$

Puisque $b > x^{\theta-\varepsilon/4}$ et $q > x^{1-\theta+\varepsilon/2}$, on a donc $bq > x^{1+\varepsilon/4} > 2x$ et $q|b$. Il vient

$$W_3 \le \sum_{\substack{x^{\theta-\varepsilon/4}<b\le 2x\\ b\in\mathcal{B}}} \sum_{\substack{q\in\mathcal{Q}\\ q|b}} \sum_{\substack{x<p\le x+x^\theta\\ p\equiv -h\,(\mathrm{mod}\, b)}} 1.$$

De plus, pour chaque $b > x^{\theta-\varepsilon/4}$ fixé, on a trivialement

$$\sum_{\substack{x<p\le x+x^\theta\\ p\equiv -h\,(\mathrm{mod}\, b)}} 1 \le 2x^{\varepsilon/4}.$$

Par conséquent, on obtient avec (1.1)

$$\begin{aligned} W_3 &\le 2x^{\varepsilon/4} \sum_{\substack{x^{\theta-\varepsilon/4}<b\le 2x\\ b\in\mathcal{B}}} \sum_{\substack{q\in\mathcal{Q}\\ q|b}} 1 \le 2x^{\varepsilon/4} \sum_{q\in\mathcal{Q}} \sum_{\substack{x^{\theta-\varepsilon/4}<b\le 2x\\ b\in\mathcal{B},\, b\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, q)}} 1 \\ &\le 2x^{\varepsilon/4} \sum_{q\in\mathcal{Q}} 1 \le 2x^{\varepsilon/4+\theta-1/2-\varepsilon/2} \le 2x^{\theta-1/2-\varepsilon/4}, \end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration du lemme 6.

Le dernier lemme fournit une minoration souhaitée de W_1.

LEMME 7. *On a la minoration*

$$W_1 \geq \frac{B^*\varepsilon}{2} x^\theta (\log x)^{-1}$$

pour $x \geq x_0(\varepsilon, \theta, \mathcal{B})$.

Démonstration. Pour chaque $\sigma = \{k_1, k_2, \cdots, k_i\} \subseteq \{1, 2, \cdots, \ell\}$, nous définissons

$$|\sigma| = i \qquad \text{et} \qquad d_\sigma = b_{k_1} b_{k_2} \cdots b_{k_i}$$

avec les conventions

$$|\emptyset| = 0 \qquad \text{et} \qquad d_\emptyset = 1,$$

où $\emptyset$ désigne l'ensemble vide.

Avec ces notations, par le principe d'inclusion-exclusion, on peut écrire

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{\sigma \subseteq \{1,2,\cdots,\ell\}} (-1)^{|\sigma|} \sum_{\substack{x < p \leq x + x^\theta \\ p \equiv -h \,(\mathrm{mod}\, d_\sigma)}} w(p+h) \\ &= \sum_{\sigma \subseteq \{1,2,\cdots,\ell\}} (-1)^{|\sigma|} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \sum_{\substack{x < p \leq x + x^\theta \\ p \equiv -h \,(\mathrm{mod}\, d_\sigma) \\ p \equiv -h \,(\mathrm{mod}\, q)}} 1. \end{aligned}$$

Puisque pour chaque $\sigma \subseteq \{1, 2, \cdots, \ell\}$ et chaque $q \in \mathcal{Q}$, on a $(d_\sigma, q) = 1$ grâce aux relations (3.2) et (3.4), il suit donc

$$W_1 = \sum_{\sigma \subseteq \{1,2,\cdots,\ell\}} (-1)^{|\sigma|} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \sum_{\substack{x < p \leq x + x^\theta \\ p \equiv -h \,(\mathrm{mod}\, d_\sigma q)}} 1. \tag{3.7}$$

De plus, on a l'égalité

$$\sum_{\substack{x < p \leq x + x^\theta \\ p \equiv -h \,(\mathrm{mod}\, d_\sigma q)}} 1 = \frac{1}{\varphi(d_\sigma q)} \int_x^{x + x^\theta} \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + r(x, x^\theta; d_\sigma q, -h),$$

ce qui nous permet d'écrire (3.7) sous la forme suivante

$$W_1 = \int_x^{x + x^\theta} \frac{\mathrm{d}t}{\log t} \sum_{\sigma \subseteq \{1,2,\cdots,\ell\}} \frac{(-1)^{|\sigma|}}{\varphi(d_\sigma)} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \frac{1}{\varphi(q)} + R, \tag{3.8}$$

où

$$R := \sum_{\sigma\subseteq\{1,2,\cdots,\ell\}} (-1)^{|\sigma|} \sum_{q\in\mathcal{Q}} r\big(x, x^\theta; d_\sigma q, -h\big).$$

Dans un premier temps, on considère le terme d'erreur R apparaissant dans le membre de droite de (3.8). En remarquant que par (3.2) et (3.4) $d_{\sigma_1}q_1 = d_{\sigma_2}q_2$ implique $d_{\sigma_1} = d_{\sigma_2}$ et $q_1 = q_2$, il découle du lemme 1

$$R \le 2^\ell \sum_{d\le x^{\theta-1/2-\varepsilon/4}} \big|r\big(x, x^\theta; d, -h\big)\big| \ll x^\theta(\log x)^{-2} \tag{3.9}$$

pour $x \ge x_0(\varepsilon,\theta,\mathcal{B})$.

Dans un deuxième temps, on va traiter le premier terme apparaissant dans le membre de droite de (3.8), qui constitue le terme principal souhaité. On a d'abord

$$\sum_{\sigma\subseteq\{1,2,\cdots,\ell\}} \frac{(-1)^{|\sigma|}}{\varphi(d_\sigma)} = \prod_{k=1}^{\ell}\Big(1-\frac{1}{\varphi(b_k)}\Big) \ge B^*. \tag{3.10}$$

D'autre part, en écrivant

$$\begin{aligned}\sum_{q\in\mathcal{Q}}\frac{1}{\varphi(q)} &= \sum_{x^{1-\theta+\varepsilon/2}<q\le x^{\theta-1/2-\varepsilon/2}} \frac{1}{q-1}\\ &= \Big\{1+O\Big(\frac{1}{x^{1-\theta+\varepsilon/2}}\Big)\Big\} \sum_{x^{1-\theta+\varepsilon/2}<q\le x^{\theta-1/2-\varepsilon/2}} \frac{1}{q},\end{aligned}$$

le théorème des nombres premiers et (3.1) impliquent

$$\sum_{q\in\mathcal{Q}}\frac{1}{\varphi(q)} \ge \Big\{1+O_\varepsilon\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\}\log\Big(\frac{\theta-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon}{1-\theta+\frac{1}{2}\varepsilon}\Big) \ge \varepsilon \tag{3.11}$$

pour $x \ge x_0(\varepsilon,\theta,\mathcal{B})$.

Finalement, un calcul simple donne l'équivalence suivante

$$\int_x^{x+x^\theta} \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x^\theta}{\log x} \quad (x\to\infty). \tag{3.12}$$

En reportant (3.9)-(3.12) dans (3.8), on obtient

$$W_1 \ge \frac{B^*\varepsilon}{2} x^\theta (\log x)^{-1}$$

pour $x \ge x_0(\varepsilon,\theta,\mathcal{B})$. Cela termine la démonstration du lemme 7.

Nous sommes maintenant en mesure de compléter la démonstration du Théorème 1.

Fin de la démonstration du Théorème 1. En combinant les lemmes 4-7, on a

$$W \geq \left(\frac{B^*\varepsilon}{4} - 2x^{-1/2-\varepsilon/4}\right)x^\theta(\log x)^{-1} \gg_{\varepsilon,\mathcal{B}} x^\theta(\log x)^{-1}$$

pour $x \geq x_0(\varepsilon, \theta, \mathcal{B}, h)$. Evidemment le choix optimal de θ vérifiant (3.1) est $\theta = \frac{3}{4} + \varepsilon$. Cela complète la démonstration du Théorème 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. BANTLE and F. GRUPP, *On a problem of Erdös and Szemerédi*, J. Number Theory **22** (1986), 280–288.

[2] P. ERDÖS, *On the difference of consecutive terms of sequences defined by divisibility properties*, Acta Arith **12** (1966), 175–182.

[3] M. FILASETA and O. TRIFONOV, *On gaps between squarefree numbers II*, J. London Math. Soc. **45** (1992), 215–221.

[4] E. FOUVRY and H. IWANIEC, *Exponential sums for monomials*, J. Number Theory **33** (1989), 311–333.

[5] M. HUXLEY and H. IWANIEC, *Bombieri's theorem in short intervals*, Mathematika **22** (1975), 188–194.

[6] H. L. MONTGOMERY and R. C. VAUGHAN, *On the large sieve*, Mathematika **20** (1973), 119–134.

[7] A. PERELLI, J. PINTZ and S. SALERNO, *Bombieri's theorem in short intervals*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **11** (1984), 529–539.

[8] V. A. PLAKSIN, *Distribution de $\mathcal{B}$-free numbers*, Matematicheskie Zametki **47** (1990), 69–77.

[9] E. SZEMERÉDI, *On the difference of consecutive terms of sequences defined by divisibility properties, II*, Acta Arith **23** (1973), 359–361.

[10] J. WU, *Sur trois questions classiques de crible : nombres premiers jumeaux, nombres P_2 et nombres $\mathcal{B}$-libres*, Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, 1990.

[11] J. WU, *Théorèmes généralisés de Bombieri-Vinogradov dans les petits intervalles*, Quart. J. Math. Oxford, (2), **44** (1993), 109–128.

[12] J. WU, *Nombres $\mathcal{B}$-libres dans les petits intervalles*, Acta Arith., à paraître.

J. Wu
Département de Mathématiques
Unité associée au CNRS, URA 750
Université Nancy I
F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex
e-mail : wujie@iecn.u-nancy.fr