JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

JEAN-LOUP MAUCLAIRE

Sur la répartition des fonctions q-additives

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 5, nº 1 (1993), p. 79-91

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1993__5_1_79_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **5** *(1993), 79–91*

Sur la répartition des fonctions q-additives

par Jean-Loup Mauclaire

I. Introduction

Soit $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{N}^*$) l'ensemble des entiers positifs ou nuls (resp. strictement positifs) et soit q un élément de $\mathbb{N}^*$ strictement plus grand que 1, fixé une fois pour toutes. À tout entier n de $\mathbb{N}$, on peut associer de façon unique une suite $(a_k(n))_{k\geq 0}$, $0 \leq a_k(n) \leq q-1$, telle que l'on ait

$$n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(n) q^k.$$

Cette suite, dont seul un nombre fini de termes ne sont pas égaux à zéro, est le développement q-adique de n, les $a_k(n)$ étant les chiffres de n développé en base q. La suite des chiffres d'un entier déterminant de façon unique cet entier et toute suite $(a_k)_{k\geq 0}$, $0 \leq a_k \leq q-1$, $a_k = 0$ sauf pour un nombre fini de k, déterminant de même de façon unique un entier, on en déduit que $\mathbb{N}$ peut être identifié à un sous-ensemble de E, l'ensemble produit d'un ensemble dénombrable de copies E_q, où E_q est défini par

$$E_q = \{0, 1, 2, ..., q-1\}.$$

On a donc :

$$\mathbb{N} \subset E = \{x ; 0 \leq x \leq q-1\}^{\mathbb{N}}.$$

Si on le munit de la topologie produit naturelle, l'ensemble E est homéomorphe à un anneau compact noté traditionnellement $\mathbb{Z}_q$ et appelé l'anneau des entiers q-adiques, et il n'est pas difficile de voir que l'image de $\mathbb{N}$ dans E est non seulement dense, mais encore uniformément distribuée dans le groupe compact $\mathbb{Z}_q$.

De façon générale, on appellera fonction arithmétique à valeurs dans un ensemble A une application de $\mathbb{N}$ vers A. Les fonctions arithmétiques à

Manuscrit reçu le 28 Janvier 1992.
Les résultats contenus dans cet article ont été exposés au colloque "Thémate", (CIRM, Luminy, Mai 1991).

valeurs réelles définies à partir des chiffres des entiers ont été considérées relativement tôt ; par exemple, la fonction $s_q(n)$, “somme des chiffres en base q de n”, apparaît déjà chez Legendre [8], quand q est premier, pour fournir l'exposant de la plus haute puissance de q divisant $n!$. Dans le cas où $q = 10$, une estimation par M. D'Ocagne de la fonction sommatoire de $s_{10}(n)$, c'est-à-dire une estimation de $\sum_{0\leq n\leq x} s_{10}(n)$, apparaît déjà en 1886 (in Jornal de sc. math. e ast. vol. 7 p. 117–128).

Par définition, une fonction arithmétique f à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite q-additive (resp. q-multiplicative) si l'on a

$$f(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(a_k(n)q^k), \quad \text{avec} \quad f(0) = 0,$$

$$(\text{resp. } f(n) = \prod_{k=0}^{+\infty} f(a_k(n)q^k), \quad \text{avec} \quad f(0) = 1).$$

Par exemple, la fonction $s_q(n)$ est q-additive, et $\exp\{\mathrm{it}s_q(n)\}$ est q-multiplicative.

On attribue généralement à Gelfond [6] l'introduction en théorie des nombres de la notion abstraite de fonction q-additive à valeurs réelles. Un certain nombre de propriétés statistiques des fonctions q-additives et q-multiplicatives ont été exhibées, par Delange [5] et Coquet [3] par exemple. Les fonctions q-multiplicatives de module égal à 1 ainsi que certaines extensions ont fait par ailleurs l'objet de recherches très intéressantes de la part de nombreux auteurs, dont Coquet [2], Kamae [7], Mendès France [4], Queffélec [13].

Etant donné un groupe abélien G, de loi notée additivement, on peut définir une fonction q-additive f à valeurs dans G en disant que f doit vérifier

$$f(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(a_k(n).\, q^k), \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Cette définition généralise la définition ordinaire, et les fonctions q-multiplicatives de module égal à 1 deviennent des fonctions q-additives à valeurs dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Dans la suite on remplace $\mathbb{R}$ et $\mathbb{T}$ par un groupe G, abélien, localement compact et métrisable. L'objectif de ce travail est l'étude des lois de distribution associées à une fonction q-additive à valeurs dans G.

II. Résultats

Soit donc G un groupe abélien, localement compact et métrisable, dont nous noterons la loi de groupe $+$. Pour t dans $\mathbb{Z}_q$, on écrit son développement de Hensel $t = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t)q^k$, et pour $y \in \mathbb{N}$, son développement tronqué $t_y = \sum_{k \leq y} a_k(t)\, q^k$ que l'on identifiera respectivement à

$$t = \{a_k(t)\}_{k \geq 0},\ t_y = \{a_k(t)\}_{0 \leq k \leq y}.$$

On définit également les mesures de probabilité

$$\mu_k(a_k(t)) = \frac{1}{q},\ \mu = \bigotimes_{k \geq 0} \mu_k,\ \mu_y = \bigotimes_{k \leq y} \mu_k.$$

Pour toute fonction q-additive u, on définit pour tout $y > 0$

$$u_y(t) = \sum_{0 \leq k \leq y} u(a_k(t).q^k).$$

Etant donné un nombre réel $x \geq 0$, on notera $[x]$ sa partie entière.

Rappelons que, par définition, une somme de variables aléatoires indépendantes X_n converge essentiellement dans G s'il existe une suite a_n telle que la série $\Sigma(X_n - a_n)$ converge presque sûrement. Si pour toute suite a_n dans G la série $\Sigma(X_n - a_n)$ diverge presque sûrement, la somme de variables aléatoires indépendantes X_n est dite diverger essentiellement dans G. On sait que dans un groupe abélien métrisable, seuls les cas de convergence ou de divergence essentielles pour les sommes de variables aléatoires indépendantes peuvent avoir lieu, ceci de façon exclusive [15].

Si H est un sous-groupe compact de G, $T_H : g \mapsto g + H$ dénotera la projection canonique de G sur G/H.

Enfin, G étant métrisable, son dual $\mathcal{G}$ est dénombrable à l'infini, de mesure de Haar dm σ-finie.

Notre résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 1. *Soit G un groupe abélien localement compact métrisable de loi notée additivement, et soit f une fonction arithmétique q-additive à valeurs dans G. On désigne par $\mathcal{G}$ le groupe dual de G muni d'une mesure* *de Haar dm et par $\mathcal{H}$ le sous ensemble m-mesurable de $\mathcal{G}$, constitué des caractères χ de $\mathcal{G}$ pour lesquels il existe un entier $N(\chi)$ tel que :*

$$\lim_{M\to+\infty} \prod_{N(\chi)\le k\le M} \left| \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k)) \right| > 0.$$

Alors $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$, et deux cas seulement peuvent se présenter :

Premier cas : *$\mathcal{H}$ n'est pas m-négligeable.*

Alors, $\mathcal{H}$ est fermé et le dual de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ est un sous-groupe compact H de G pour lequel les propositions suivantes ont lieu simultanément :

1. *la suite de variables aléatoires $(T_H(f_y(t)))$ converge essentiellement,*
2. *il existe une suite A_n dans G/H et une mesure de probabilité ν sur G/H telle que la suite des moyennes de Dirac*

$$\frac{1}{[x]} \sum_{n\le x} \mu_{n,\,x},$$

où $\mu_{n,\,x}$ est la mesure sur G/H consistant en une masse unité placée au point

$$T_H(f(n)) - A_{[x]},$$

converge vaguement vers la mesure ν.

Deuxième cas : *$\mathcal{H}$ est m-négligeable.*

Dans ce cas, pour tout sous-groupe compact K de G, les propositions suivantes ont lieu simultanément :

1. *pour toute fonction réelle u continue sur G/K à support compact, et pour toute suite A_n dans G/K, on a :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\le x} u(T_K(f(n)) - A_{[x]}) = 0.$$

2. *la suite de variables aléatoires $(T_K(f_y(t)))$ diverge essentiellement.*

On peut affiner l'aspect esthétique du théorème et donner des énoncés moins généraux, mais plus digestes ; par exemple :

THÉORÈME 2. *Avec les notations précédentes, supposons que le groupe G est compact. Alors il existe une suite A_n dans G et une mesure de probabilité ν sur G telle que pour toute fonction réelle u continue sur G on ait*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} u(f(n) - A_{[x]}) = \int_G u.d\nu.$$

On peut aussi donner, (la démonstration étant laissée au lecteur), les conditions nécessaires et suffisantes de continuité de la mesure ν apparaissant dans le premier cas du théorème 1 :

THÉORÈME 3. *Si ω est une mesure de Haar sur G, posons pour toute fonction réelle F continue sur G à support compact*

$$\widetilde{F}(\dot{x}) = \int_H F(x+y)d\omega(y),$$

et considérons la mesure Θ définie sur G par :

$$\int_G Fd\Theta = \int_{\dot{x}\in G/H} \widetilde{F}(\dot{x})d\nu(\dot{x}).$$

Alors, Θ n'est pas continue si et seulement si H est un groupe fini, et l'on a dans ces conditions :

$$\mathrm{Card}\{(a,k);\ T_H(f(aq^k)) \neq 0\} < +\infty.$$

Remarques.

1- La méthode de démonstration que nous suivrons ici est analogue à celle développée dans [11].

2- La formulation des résultats connus déjà dans le cas ou $G = \mathbb{R}$ [5] et $G = \mathbb{T}$ [3], qui s'exprime ordinairement en termes de conditions portant sur les valeurs des fonctions aux points aq^k, $0 \leq k$, $0 \leq a \leq q-1$, pourrait être récupérée immédiatement à partir du théorème 1 en utilisant, dans le cas de $G = \mathbb{R}$, le "théorème des trois séries" de Kolmogorov [10], et dans celui de $G = \mathbb{T}$, son analogue sur $\mathbb{T}$, un résultat bien connu de P. Lévy [9].

3- La suppression pure et simple du mot "métrisable" dans l'énoncé du théorème 1 n'est pas possible.

III. Démonstrations

A- Cas du théorème 2.

C'est une conséquence immédiate du théorème 1. G étant compact et métrisable, son dual $\mathcal{G}$ est discret et dénombrable. Le sous groupe $\mathcal{H}$ est de mesure non nulle. On remarque que l'on peut relever $T_H(f(n)) - A_{[x]}$ dans G en $f(n) - A^*_{[x]}$, où $A^*_{[x]}$ doit seulement vérifier $T^*_H(A_{[x]}) = A_{[x]}$. Pour conclure, on utilise le fait que toute fonction continue sur G est approchée uniformément par des polynômes trigonométriques.

B- Cas du théorème 1.

Première partie : $\mathcal{H}$ est un groupe.

Soit donc $\mathcal{H}$ l'ensemble des caractères χ de $\mathcal{G}$ pour lesquels il existe un entier positif $N(\chi)$ dépendant de χ, tel que

$$\lim_{M\to+\infty} \prod_{N(\chi)\leq k\leq M} \left|\frac{1}{q}\sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k))\right| > 0.$$

À un tel χ, pour $M \geq N \geq N(\chi)$, on associe la famille de fonctions $f_{N,M} : \mathbb{Z}_q \to \mathbb{C}$ définie par

$$f_{N;M}(t) = \frac{\prod\limits_{N\leq k\leq M} \chi(f(a_k(t)\,q^k))}{\prod\limits_{N\leq k\leq M} \frac{1}{q}\sum\limits_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k))}.$$

Pour N fixé, $f_{N,M}$ est, par construction, une martingale, qui vérifie

$$|f_{N,M}(t)| = \frac{1}{\prod\limits_{N\leq k} \left|\frac{1}{q}\sum\limits_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k))\right|}.$$

Elle est donc bornée régulière, d'après le théorème de Fatou. On en déduit que la limite $\lim\limits_{M\to+\infty} f_{N,M}(t)$ existe μ presque partout, et par symétrisation, on voit que la suite

$$\begin{aligned}F_{N,M}(t,u) &= f_{N,M}(t).\overline{f_{N,M}(u)}\\ &= \frac{\prod\limits_{N\leq k\leq M} \chi(f(a_k(t)\,q^k))}{\prod\limits_{N\leq k\leq M} \left|\frac{1}{q}\sum\limits_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k))\right|} \times \frac{\overline{\prod\limits_{N\leq k\leq M} \chi(f(a_k(u)\,q^k))}}{\prod\limits_{N\leq k\leq M} \left|\frac{1}{q}\sum\limits_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k))\right|}\end{aligned}$$

converge $(d\mu)^2$ *p.s.*, et comme en fait

$$F_{N,M}(t,u) = \frac{\prod_{N\le k\le M} \chi(f(a_k(t)\,q^k) - f(a_k(u)\,q^k))}{\prod_{N\le k\le M} \left|\frac{1}{q}\sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k))\right|^2},$$

et que le dénominateur de cette expression tend vers une limite non nulle, puisque χ est dans $\mathcal{H}$, on a finalement

$$\lim_{M\to+\infty} \prod_{N\le k\le M} \chi(f(a_k(t)\,q^k) - f(a_k(u)\,q^k)) \text{ existe } (d\mu)^2\ p.s.$$

Il est clair que cela revient à dire que

$$(*) \qquad \lim_{M\to+\infty} \prod_{0\le k\le M} \chi(f(a_k(t)\,q^k) - f(a_k(u)\,q^k)) \text{ existe } (d\mu)^2\ p.s.$$

On notera F cette limite.

Réciproquement la validité de $(*)$ pour un caractère χ implique que χ est dans $\mathcal{H}$. En effet, si l'on définit F_M par

$$F_M(t,u) = \chi\left(\sum_{k=0}^{k=M} f(a_k(t)\,q^k) - f(a_k(u)\,q^k)\right),$$

comme $|F_M| = |F| = 1$, on voit que la forme linéaire continue définie sur l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{Z}_q^2$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, par

$$g \mapsto \int_{\mathbb{Z}_q^2} F.g\ d(\mu\otimes\mu)$$

n'est pas identiquement nulle. Par conséquent, il existe un ouvert U tel que

$$\int_U F\, d(\mu\otimes\mu) \neq 0.$$

Mais un ouvert de $\mathbb{Z}_q^2$ est une réunion au plus dénombrable d'ouverts élémentaires de la forme $C_y(t)\times C_y(u)$, où l'on a défini

$$C_y(t) = \{u\in E\,;\, u_y = t_y\}.$$

Il existe donc un ouvert élémentaire $W = C_y(t) \times C_y(u)$ pour lequel on a

$$\int_W F\, d(\mu \otimes \mu) \neq 0.$$

Le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{M \to +\infty} \int_W F_M \neq 0.$$

La valeur de cette limite se calcule très facilement, et l'on a :

$$\lim_{M \to +\infty} \prod_{y \leq k \leq M} \left| \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k)) \right|^2 > 0.$$

Ceci montre que χ est dans $\mathcal{H}$.

On peut maintenant démontrer que $\mathcal{H}$ est un groupe. En effet, si χ_1 et χ_2 sont dans $\mathcal{H}$, alors par $(*)$

$$\lim_{M \to +\infty} \chi_1 \left(\sum_{k=0}^{k=M} f(a_k(t)\, q^k) - f(a_k(u) q^k) \right) \text{ existe } (d\mu)^2\ p.s.,$$

$$\lim_{M \to +\infty} \chi_2 \left(\sum_{k=0}^{k=M} f(a_k(t)\, q^k) - f(a_k(u) q^k) \right) \text{ existe } (d\mu)^2\ p.s.,$$

et par conséquent, en effectuant le produit des deux expressions, on voit que

$$\lim_{M \to +\infty} (\chi_1 \cdot \chi_2) \left(\sum_{k=0}^{k=M} f(a_k(t) q^k) - f(a_k(u) q^k) \right)$$

existe $(d\mu)^2$ p.s., ce qui signifie que $\chi_1 \cdot \chi_2$ est un élément de $\mathcal{H}$. Par ailleurs, si χ est dans $\mathcal{H}$, par $(*)$ on voit immédiatement que $\overline{\chi} \in \mathcal{H}$.

Il en résulte que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$, et on démontre que si $m(\mathcal{H})$ est non nulle, alors $\mathcal{H}$ est ouvert. En effet, il existe alors K, un compact que l'on peut supposer symétrique, tel que $m(\mathcal{H} \cap K) > 0$; on note I_K la fonction caractéristique de $\mathcal{H} \cap K$. Alors, le carré de convolution de I_K est une fonction bien définie, continue, et strictement positive en 0. Par conséquent, $(K - K)$ contient un voisinage de 0, et $\mathcal{H}$ est ouvert. Il est donc aussi fermé, (donc localement compact), et $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ est discret. Nous noterons H l'orthogonal de $\mathcal{H}$ qui est compact puisque dual de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, qui est discret, et par conséquent G/H est localement compact. On a donc la proposition :

Proposition 1. *$\mathcal{H}$ est un sous groupe de $\mathcal{G}$, et s'il est de mesure non nulle, il est ouvert dans $\mathcal{G}$.*

Deuxième partie : $\mathcal{H}$ est supposé de mesure non nulle.

En conservant les notations de la première partie, on a le résultat suivant (qui traduit la convergence essentielle de la suite $(T_H(f_y(t)))$:

Proposition 2. *Soit T_H l'application canonique $G \to G/H$. Il existe une suite a_k dans G/H telle que la suite de variables aléatoires*

$$\left[T_H(f_y(t)) - \sum_{k\leq y} a_k\right]_{y\in\mathbb{N}}$$

converge μ presque sûrement.

Preuve. On commence par remarquer que le fait que χ est dans $\mathcal{H}$ équivaut à la convergence $\mu\otimes\mu$ presque sûre de la suite de fonctions $\chi(f_y(t)-f_y(u))$. Maintenant, comme G est métrisable et H compact, G/H est métrisable ([1], chap. 9, §3, prop. 4), et par conséquent, $\mathcal{H}$ est dénombrable à l'infini ([14], p. 94, 2.3 (ii)). Alors l'espace produit $(E \times E \times \mathcal{H},\ \mu \otimes \mu \otimes m)$ est σ-compact. Par application du théorème de Fubini, ([10], Part 1, Chap. 2, §8.2, corollary p. 186), on en déduit que $\mu \otimes \mu$ presque sûrement la suite $y \mapsto \chi(f_y(t) - f_y(u))$ converge m-presque partout, et par inversion de la transformation de Fourier ([14], p. 103 (iii), inversion theorem), on en déduit que $(f_y(t) - f_y(u))$ converge $\mu \otimes \mu$ presque sûrement. De même, le même théorème de Fubini appliqué sur $((E \times E), \mu\otimes\mu)$, qui est compact, donne que $d\mu$ presque sûrement en u, la suite $(f(t_y) - f(u_y))$ converge $d\mu$ preque sûrement en t. Par conséquent, il existe un u tel que $(f(t_y)-f(u_y))$ converge $d\mu$ presque sûrement en t. On choisit donc ce $u = (u_k)$ et $a_k = f(u_kq^k)$ modulo H. La proposition 2 est donc démontrée.

Troisième partie : Fin de la démonstration du théorème 1.

Rappelons les résultats suivants dus respectivement à Mendès France [12] et Delange [5] :

R1- si r est une fonction q-multiplicative de module 1, alors

$$\limsup_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} r(n)\right| = \prod_{k=0}^{+\infty}\left|\frac{1}{q}\sum_{a=0}^{q-1} r(aq^k)\right|;$$

R2- si r est une fonction q-multiplicative de module 1, et s'il existe $M \geq 0$ tel que

$$\lim_{x \to +\infty} \prod_{M \leq k \leq x} \left| \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} r(aq^k) \right| > 0,$$

alors

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} r(n) = \prod_{k \leq [\frac{\text{Log } x}{\text{Log } q}]} \left(\frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} r(aq^k) \right) + o(1),\ x \to +\infty.$$

<u>1/ cas où $\mathcal{H}$ n'est pas négligeable.</u>

La proposition 2 établie dans la deuxième partie donne la propriété 1 du premier cas du théorème 1. Pour ce qui est de la propriété 2, il suffit de remarquer que si χ est dans $\mathcal{H}$, il existe par définition M tel que

$$\lim_{x \to +\infty} \prod_{M \leq k \leq x} \left| \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k)) \right| > 0,$$

et par R2,

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \chi(f(n)) = \prod_{k \leq [\frac{\text{Log } x}{\text{Log } q}]} \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k)) + o(1),\ x \to +\infty.$$

Si $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de G/H pour laquelle la conclusion de la proposition 2 est vérifiée, en posant

$$A_{[x]} = \sum_{0 \leq k \leq [\frac{\text{Log } x}{\text{Log } q}]} a_k,$$

on a :

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \chi(f(n)).\overline{\chi}(A_{[x]}) = \prod_{k \leq [\frac{\text{Log } x}{\text{Log } q}]} \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k)).\overline{\chi}(A_{[x]}) + o(1),\ x \to +\infty,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \chi(f(n)).\chi(-A_{[x]}) = \lim_{x \to +\infty} \prod_{k \leq [\frac{\text{Log } x}{\text{Log } q}]} \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \chi(f(aq^k)).\overline{\chi}(A_{[x]}),$$

la limite à droite existant bien puisque χ est dans $\mathcal{H}$, et l'on voit que (par la proposition 2 et intégration)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \chi(f(n)) - A_{[x]})$$

existe, et, comme transformée de Fourier d'une mesure de probabilité, est continue sur $\mathcal{H}$. Un théorème classique de P. Lévy permet alors de conclure en disant que la suite de mesures

$$\frac{1}{[x]} \sum_{n \leq x} \mu_{n,\, x},$$

où $\mu_{n,\, x}$ est la mesure sur G/H consistant en une masse unité placée au point

$$(T_H\ (f(n))) - A_{[x]},$$

converge vaguement vers une mesure de probabilité ν.

2/ cas où $\mathcal{H}$ est négligeable.

Etant donné un sous-groupe compact K de G, si $\mathcal{K}$ dénote le dual de G/K, il est l'annulateur de K compact, et par conséquent, $\mathcal{K}$ est ouvert, donc de mesure Haar non nulle. Si $T_K(f_y(t))$ converge essentiellement, il existe une suite A_y telle que pour tout χ de $\mathcal{K}$, la suite $\chi((f_y(t)) - A_y)$ converge $d\mu$ $p.s.$, i.e.

$$(*) \qquad \lim_{x \to +\infty} \prod_{0 \leq k \leq M} \chi(f(a_k(t).q^k) - f(a_k(u).q^k)) \text{ existe } \ (d\mu)^2 \ p.s.$$

Or, on a montré dans la première partie que cette relation $(*)$ implique que χ est dans $\mathcal{H}$, ce qui nous donne que $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$, et donc que $m(\mathcal{H}) > 0$ contrairement à l'hypothèse. Par conséquent, il ne peut pas exister un sous-groupe compact K de G tel que $T_K(f_y(t))$ converge essentiellement, et comme G est métrisable et que K est compact, G/K est métrisable et par conséquent, $T_K(f_y(t))$ diverge essentiellement [15]. La propriété 2 du cas où $\mathcal{H}$ est négligeable est donc établie.

Démontrons la propriété 1.

On suppose qu'il existe un sous-groupe compact K de G, une fonction u continue, réelle et à support compact telle que, pour une suite (A_n) dans G/K, on ait :

$$\lim_{x \to +\infty} \sup \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} u(T_K(f(n)) - A_{[x]}) > 0.$$

On peut toujours trouver une fonction réelle a telle que l'on ait $a \geq u$ et de transformée de Fourier $\widehat{a}$ intégrable. On a alors, en supposant les mesures normalisées,

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} u(T_K(f(n)) - A_{[x]}) \leq$$
$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} a(T_K(f(n)) - A_{[x]}) = \frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\left(\int_{\mathcal{G}} \hat{a}(\chi).\chi(T_K(f(n)) - A_{[x]})d\chi\right),$$

et en majorant le dernier terme par

$$\int_{\mathcal{G}} |\hat{a}(\chi)|.\frac{1}{x}\left|\sum_{n\leq x}\chi(T_K(f(n)) - A_{[x]})\right| d\chi,$$

tenant compte du fait que χ est un caractère de $\mathcal{K}$ et que par conséquent

$$\frac{1}{x}\left|\sum_{n\leq x}\chi(T_K(f(n)) - A_{[x]})\right| = \frac{1}{x}\left|\sum_{n\leq x}\chi(f(n))\right|,$$

on obtient l'inégalité

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} u(T_K(f(n)) - A_{[x]}) \leq \int_{\mathcal{G}} |\hat{a}(\chi)|\frac{1}{x}\left|\sum_{n\leq x}\chi(f(n))\right| .d\chi.$$

On en déduit, par un théorème de Fatou, que

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} u(T_K(f(n)) - A_{[x]}) \leq \int_{\mathcal{G}} |\widehat{a}(\chi).\limsup_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left|\sum_{n\leq x}\chi(f(n))\right| d\chi.$$

Comme

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} u(T_K(f(n)) - A_{[x]}) > 0,$$

on en déduit que sur un ensemble de mesure strictement positive, on a

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left|\sum_{n\leq x}\chi(f(n))\right| > 0,$$

et par R1, on obtient que la mesure de $\mathcal{H}$ n'est pas nulle.

Le théorème 1 est complètement démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, deuxième édition, 1958, Hermann, Paris.

[2] J. COQUET, *Sur la mesure spectrale des suites q-multiplicatives*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **29** (1979), 163–170.

[3] J. COQUET, *Répartition modulo 1 des suites q-additives*, Comment. Math. **21** (1980), 23–42.

[4] J. COQUET, T. KAMAE, M. MENDÈS FRANCE, *Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques*, Bull. Soc. math. France **105** (1977), 369–384.

[5] H. DELANGE, *Sur les fonctions q-additives ou q-multiplicatives*, Acta Arithmetica **21** (1972), 285–298.

[6] A. O. GELFOND, *Sur les nombres qui ont des propriétés additives ou multiplicatives données*, Acta Arithmetica **13** (1968), 259–265.

[7] T. KAMAE, *Spectral properties of arithmetic functions*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, (18^{e} année, 1976/1977), fasc. 1, exp. 12, 8 pages (1977).

[8] A. M. LEGENDRE, *Théorie des Nombres*, éd. 2, 1808.

[9] P. LÉVY, *L'addition des variables aléatoires définies sur une circonférence*, Bull. Soc. math. France **67** (1939), 1–41.

[10] M. LOEVE, *Probability Theory I*, 4th ed. 1977, Springer, New-York.

[11] J.-L. MAUCLAIRE, *Distribution of the values of an additive arithmetical function with values in a locally compact metrizable abelian group*, to appear.

[12] M. MENDÈS FRANCE, *Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1*, J. Number Theory **5** (1973), 1–15.

[13] M. QUEFFÉLEC, *Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques*, Bull. Soc. math. France **107** (1979), 385–421.

[14] H. REITER, *Classical harmonic analysis and locally compact groups*, Oxford, Clarendon Press, 1968.

[15] A. TORTRAT, *Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires*, Masson (1971).

J.-L. Mauclaire
C.N.R.S, U.R.A. 212
Théories géométriques
Université Paris-VII
Tour 45-55, 5^{e} étage,
2, Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05