JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

DANIEL DUVERNEY

À propos de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{q^n - 1}$

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 8, nº 1 (1996), p. 173-181

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1996__8_1_173_0>

© Université Bordeaux 1, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (http://jtnb.cedram.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **8** *(1996), 173–181*

A propos de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{q^n - 1}$

par Daniel DUVERNEY

1. Introduction

Le but de cet article est de généraliser certains résultats obtenus par P. Borwein dans [5] et [6], et par P. Bundschuh et K. Väänänen dans [8].

Pour tout corps de nombres K, on désignera par R l'anneau des entiers de K.

Nous démontrerons essentiellement le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit* $K = \mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$ *ou* $K = \mathbb{Q}$. *Soit* $q \in K$, *avec* $q = \frac{r}{s}$, r, $s \in R$. *On suppose que :*

$$\delta = \frac{\log |s|}{\log |r|} < \frac{1}{4}\left(3 - \sqrt{5 + \frac{24}{\pi^2}}\right) \tag{1}$$

Soit $x \in K^*$ *et* $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{q^n - 1}$.

Alors $f(x) \notin K$. *De plus,* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists q_0 = q_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$\forall \eta \in K, \qquad |den\ \eta| \geq q_0 \Rightarrow |f(x) - \eta| \geq |den\ \eta|^{-\omega-\varepsilon}, \tag{2}$$

où $den\,\eta$ *désigne le dénominateur de* η, *et :*

$$\omega = \frac{4 - 4\delta}{3 - \sqrt{5 + \frac{24}{\pi^2}} - 4\delta}. \tag{3}$$

Pour certaines valeurs particulières de x, on peut obtenir un résultat un peu meilleur (essentiellement lorsque x est une racine de l'unité). En particulier pour $x = 1$:

Manuscrit reçu le 17 novembre 1994

THÉORÈME 2. *Soit $K = \mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$ ou $K = \mathbb{Q}$. Soit $q \in K$, avec $q = \dfrac{r}{s}$, r, $s \in R$. On suppose que :*

$$\delta = \frac{\log|s|}{\log|r|} < \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{\pi^2}\right). \tag{4}$$

Alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q^n - 1} \notin K$. De plus, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists q_0 = q_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall \eta \in K, \qquad |den\ \eta| \geq q_0 \Rightarrow \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q^n - 1} - \eta\right| \geq |den\,\eta|^{-\omega-\varepsilon} \tag{5}$$

avec

$$\omega = \frac{3 - 3\delta}{1 - \dfrac{3}{\pi^2} - 3\delta}. \tag{6}$$

Le théorème 2 est à comparer au premier résultat d'irrationalité concernant la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q^n - 1}$, obtenu par P. Erdös [10] pour q entier. Dans ce cas, la mesure d'irrationalité fournie par le théorème 2 est $\omega \approx 4{,}31012$.

On déduit également du théorème 2, par exemple, le résultat suivant : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{21^n - 2^n} \notin \mathbb{Q}$.

2. Deux lemmes techniques.

LEMME 1. *Soit K un corps de nombres quelconque, soit R l'anneau de ses entiers, et soient $r, s \in R$, avec $|r| > |s| > 0$. Alors il existe un multiple commun H_n dans R aux nombres $r - s$, $r^2 - s^2, \ldots, r^n - s^n$, vérifiant :*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad |H_n| \leq |r|^{\frac{3}{\pi^2}n^2 + o(n^{1+\varepsilon})}. \tag{7}$$

Démonstration. Soit Ψ_d le polynôme cyclotomique d'ordre d. On sait que :

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Psi_d(x).$$

Donc : $r^n - s^n = \prod_{d|n} r^{\varphi(d)} \Psi_d \left(\frac{s}{r}\right)$,

où $\varphi(d)$ désigne l'indicateur d'Euler.

Il en résulte immédiatement que le nombre H_n défini par :

$$H_n = \prod_{d=1}^{n} r^{\varphi(d)} \Psi_d \left(\frac{s}{r}\right) \tag{8}$$

est un multiple commun à $r - s$, $r^2 - s^2, \dots, r^n - s^n$. Il reste à obtenir la majoration (7).

On sait que pour $d \geq 3$ [3] :

$$\left|\Psi_d \left(\frac{s}{r}\right)\right| \leq \exp\left(d^{\frac{c}{\log\log d}}\right) \left[1 + \left|\frac{s}{r}\right| + \cdots + \left|\frac{s}{r}\right|^{\varphi(d)}\right]$$

où c est une constante.

Donc :

$$|H_n| \leq \theta \cdot |r|^{\sum_{d=1}^{n} \varphi(d)} \, |r|^{\frac{1}{\log|r|} \sum_{d=3}^{n} d^{\frac{c}{\log\log d}}} \left(\frac{1}{1 - \left|\frac{s}{r}\right|}\right)^n,$$

où θ est une constante.

Mais on a ([11], p. 268) : $\sum_{d=1}^{n} \varphi(d) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + 0(n \log n)$, et il est facile de voir que, $\forall \varepsilon > 0$: $\sum_{d=3}^{n} d^{\frac{c}{\log\log d}} = o(n^{1+\varepsilon})$.

Ainsi (7) est démontrée.

Remarque 1. Si $R = \mathbb{Z}$, on peut démontrer que H_n défini par (8) est le PPCM de $r - s$, $r^2 - s^2, \dots, r^n - s^n$. Voir [4].

Remarque 2. Pour majorer $|H_n|$, on aurait pu utiliser une formule générale de M. Mignotte ([12], corollaire 1). Cette formule aurait seulement donné $\frac{3}{2} + \varepsilon$ à la place de $1 + \varepsilon$ dans (7), mais cela aurait été suffisant pour la suite.

LEMME 2. *Soit $x \in \mathbb{C}$, et $A \in \mathbb{R}$, $A > 1$. On suppose qu'il existe deux suites P_n et Q_n d'éléments de R (R anneau des entiers de K, $K = \mathbb{Q}\left[i\sqrt{d}\right]$ ou $K = \mathbb{Q}$) vérifiant :*

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{vmatrix} Q_n & P_n \\ Q_{n+1} & P_{n+1} \end{vmatrix} \neq 0$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|Q_n x - P_n| \leq A^{-\beta n^2 + o(n^2)}$, $\beta > 0$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|Q_n| \leq A^{\alpha n^2 + o(n^2)}$, $\alpha > 0$

Alors x est irrationnel.

De plus : $\forall \varepsilon > 0, \exists q_0 = q_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall \eta \in K, \qquad |den\ \eta| \geq q_0 \Rightarrow |x - \eta| \geq |den\, \eta|^{-\omega - \varepsilon},$$

avec $\omega = \dfrac{\alpha}{\beta} + 1$.

Démonstration. Elle est tout à fait analogue à celle du lemme 3 de [1] par exemple, et nous l'omettons.

3. Démonstration du théorème 1.

Nous utilisons les approximants de Padé de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{q^n - 1}$ obtenus dans [9].

En posant $u_n = q^n - 1$, il a été démontré dans [9], théorème 4, que :

$$Q_n(x) f(x) - P_n(x) = x^{2n+1} R_n(x),$$

où $R_n(x)$ est une série entière, et :

$$Q_n(x) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p u_{2n-p} u_{2n-p-1} \cdots u_{n-p+1} \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q q^{\frac{p(p-1)}{2}} x^p \tag{9}$$

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} u_{n+m} u_{n+m-1} \cdots u_{m+1} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q q^{\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}} \times \sum_{k=1}^{m} \frac{x^{n+k-m}}{u_k} \tag{10}$$

Dans (9) et (10), *les coefficients q-binomiaux* $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q$ sont définis par :

$$\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q = \frac{n_q!}{p_q!(n-p)_q!},$$

avec $0_q! = 1$, $n_q! = \prod_{k=1}^{n} \frac{q^k - 1}{q - 1}$ pour $n \geq 1$. Selon la formule (41) de [9], on obtient pour $|x| \leq 1$:

$$|Q_n(x)f(x) - P_n(x)| \leq C(q)\,|q|^{\frac{n(n-3)}{2}}\,|x|^{2n+1}\,, \tag{11}$$

où $C(q)$ ne dépend ni de x, ni de n.

Soit $\gamma > 0$.

Nous suivons la démarche de P. Borweim dans [5], et remarquons que :

$$f\left(\frac{x}{q^{[\gamma n]}}\right) = f(x) - \sum_{k=1}^{[\gamma n]} \frac{x}{q^k - x},$$

où $[\gamma n]$ est la partie entière de γn.

Nous reportons ceci dans (11), pour obtenir :

$$\left| Q_n\left(\frac{x}{q^{[\gamma n]}}\right) f(x) - Q_n\left(\frac{x}{q^{[\gamma n]}}\right) \sum_{k=1}^{[\gamma n]} \frac{x}{q^k - x} - P_n\left(\frac{x}{q^{[\gamma n]}}\right) \right| \tag{12}$$
$$\leq C(q)\,|x|^{2n+1}\,|q|^{\frac{n(n-3)}{2} - [\gamma n](2n+1)}$$

Si nous posons $q = \frac{r}{s}$ et $x = \frac{\alpha}{\beta}$, avec r, s, α, $\beta \in R$, une vérification fastidieuse mais sans difficulté montre que :

$$h_n = Q_n\left(\frac{x}{q^{[\gamma n]}}\right) \beta^n\, r^{n[\gamma n]}\, s^{\frac{n(3n+1)}{2}} \frac{H_n L_n}{J_n} \in R$$

$$\ell_n = \left[Q_n\left(\frac{x}{q^{[\gamma n]}}\right) \sum_{k=1}^{[\gamma n]} \frac{x}{q^k - x} + P_n\left(\frac{x}{q^{[\gamma n]}}\right) \right] \beta^n\, r^{n[\gamma n]}\, s^{\frac{n(3n+1)}{2}} \frac{H_n L_n}{J_n} \in R$$

où l'on a noté :

H_n = un multiple commun à $(r - s), (r^2 - s^2), \ldots, (r^n - s^n)$;

L_n = un multiple commun à $(\beta r - \alpha s), (\beta r^2 - \alpha s^2), \ldots, (\beta r^{[\gamma n]} - \alpha s^{[\gamma n]})$;

$J_n = \prod_{k=1}^{n} (r^k - s^k)$.

(La multiplication par H_n sert à chasser les dénominateurs u_k dans l'expression (11) de $P_n(x)$; la multiplication par L_n sert à chasser les dénominateurs de la somme $\sum_{k=1}^{[\gamma n]} \frac{x}{q^k - x}$; la multiplication par $s^{\frac{n(3n+1)}{2}}$ sert à chasser les dénominateurs des coefficients de Q_n et P_n ; enfin, ceci étant fait, on peut tout diviser par J_n, qui divise tous les produits $\prod_{k=1}^{n} (r^{k+h} - s^{k+h})$, $\forall h \in \mathbb{N}$. [7]).

On a, en vertu du lemme 1 :

$$|H_n| \leq |r|^{\frac{3}{\pi^2} n^2 + o(n^{1+\varepsilon})} \tag{13}$$

Par ailleurs, en prenant $L_n = \prod_{k=1}^{[\gamma n]} (\beta r^k - \alpha s^k)$, on a :

$$|L_n| \leq |r|^{\frac{\gamma^2 n^2}{2} + 0(n)} . \tag{14}$$

et il est facile de vérifier que :

$$|J_n| = |r|^{\frac{n^2}{2} + 0(n)} . \tag{15}$$

On obtient ainsi, en multipliant (12) par $\beta^n \, r^{n[\gamma n]} s^{\frac{n(3n+1)}{2}} \frac{H_n L_n}{J_n}$:

$$|h_n f(x) - \ell_n| \leq \frac{|s|^{(2\gamma+1)n^2 + 0(n)}}{|r|^{(-\frac{\gamma^2}{2} + \gamma - \frac{3}{\pi^2})n^2 + o(n^{1+\varepsilon})}}.$$

D'où :

$$|h_n f(x) - \ell_n| \leq |r|^{-(-\frac{\gamma^2}{2} + (1-2\delta)\gamma - \delta - \frac{3}{\pi^2})n^2 + o(n^{1+\varepsilon})} \tag{16}$$

Nous utilisons maintenant le lemme 2. La condition a) est vérifiée si $x \neq 0$ puisque $\begin{vmatrix} Q_n(x) & P_n(x) \\ Q_{n+1}(x) & P_{n+1}(x) \end{vmatrix} = c_n \, x^{2n+1}$ ([1], lemme 2). Les conditions b) et c) sont vérifiées en vertu de (13), (14), (15), (16), avec :

$$\alpha = \frac{\gamma^2}{2} + \gamma + 1 + \frac{3}{\pi^2} \tag{17}$$

$$\beta = -\frac{\gamma^2}{2} + (1-2\delta)\gamma - \delta - \frac{3}{\pi^2} \tag{18}$$

Il reste à choisir γ pour obtenir la plus petite valeur possible de $\omega = \frac{\alpha}{\beta} + 1$, et à vérifier que pour cette valeur γ_0 de γ on a $\beta > 0$. Avec les notations du lemme 2 :

$$\frac{1}{\omega} = 1 - \frac{\frac{\gamma^2}{2} + \gamma + 1 + \frac{3}{\pi^2}}{(2\gamma+1)(1-\delta)}. \tag{19}$$

Une étude de variations montre que ω est minimum lorsque γ est égal à la racine positive de l'équation $\gamma^2 + \gamma - 1 - \frac{6}{\pi^2} = 0$. On choisit donc :

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5 + \frac{24}{\pi^2}} - 1\right).$$

Dans ce cas, $\beta = -\frac{\gamma_0^2}{2} - \gamma_0 - 1 - \frac{3}{\pi^2} + (2\gamma_0 + 1)(1-\delta)$ sera strictement positif si :

$$\delta < \frac{-\frac{\gamma_0^2}{2} + \gamma_0 - \frac{3}{\pi^2}}{2\gamma_0 + 1},$$

et en remplaçant γ_0 par sa valeur on obtient :

$$\delta < \frac{1}{4}\left(3 - \sqrt{5 + \frac{24}{\pi^2}}\right).$$

Le théorème 1 est démontré.

4. Démonstration du théorème 2.

La démonstration du théorème 2 est identique à celle du théorème 1, sauf que, en supposant $0 < \gamma \leq 1$, la multiplication par L_n est inutile (si $\gamma > 1$, c'est la multiplication par H_n qui est inutile, mais les résultats sur δ sont moins bons). La majoration (16) devient :

$$|h_n\, f(1) - \ell_n| \leq |r|^{-((1-2\delta)\gamma - \delta - \frac{3}{\pi^2})n^2 + o(n^{1+\varepsilon})}. \tag{20}$$

Le lemme 2 s'utilise avec :

$$\alpha = \gamma + 1 + \frac{3}{\pi^2} \tag{21}$$

$$\beta = (1-2\delta)\gamma - \delta - \frac{3}{\pi^2}. \tag{22}$$

La relation (19) devient :

$$\frac{1}{\omega} = 1 - \frac{\gamma + 1 + \frac{3}{\pi^2}}{(2\gamma+1)(1-\delta)}. \tag{23}$$

Le minimum de ω est atteint pour la valeur $\gamma_0 = 1$, et la condition $\beta > 0$ équivaut à :

$$\delta < \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{\pi^2}\right). \tag{24}$$

Je remercie l'arbitre pour ses suggestions et les améliorations qu'il m'a permis d'apporter à cet article.

Bibliographie

[1] K. Alladi and M.L. Robinson, *Legendre Polynomials and Irrationality*, J. Reine Angew. Math. **318** (1980), 137-155.

[2] J.M. Arnaudiès, *L'irréductibilité des polynômes cyclotomiques*, R.M.S. (Octobre 1991).

[3] P.T. Bateman, *Note on the coefficients of the cyclotomic polynomial*, Bull. Amer. Math. Soc. **35** (1945), 1180-1181.

[4] J.P. Bézivin, *Plus petit commun multiple des termes consécutifs d'une suite récurrente linéaire*, Collect. Math. **40, 1** (1989), 1-11.

[5] P.Borwein, *On the irrationality of* $\sum(1/(q^n + r))$, J. Number Theory **37** (1991), 253-259.

[6] P.Borwein, *On the irrationality of certain series*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **112** (1992), 141-146.

[7] P. Bundschuh, *Ein Satz über ganze Funktionen und Irrationatätsaussagen*, Inventiones Math. **9** (1970), 175-184.

[8] P. Bundschuh and K. Väänänen, *Arithmetical Investigations of a certain infinite product*, Compositio Math. **91** (1994), 175-201.

[9] D. Duverney, *Approximants de Padé et U-dérivation*, Bull. Soc. Math. France **122** (1994), 553-570.

[10] P. Erdös, *On arithmetical properties of Lambert Series*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **12** (1948), 63-66.

[11] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Science Publications, Fifth Edition (1979).

[12] M. Mignotte, *An Inequality about Irreducible Factors of Integer Polynomials*, J. Number Theory **30** (1988), 156-166.

Daniel DUVERNEY
24, Place du Concert
59800 Lille