REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

CLAUDE PICARD

Sur un problème de pesées

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, tome 1, nº 4 (1967), p. 63-72

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1967__1_4_63_0>

R.I.R.O.
(1re année, N° 4, 1967, p. 63-72)

SUR UN PROBLEME DE PESEES

par Claude PICARD
Directeur de Recherche au C.N.R.S.
Institut Blaise-Pascal

Résumé. — Discussion de la solution du problème de pesées « les usines malhonnêtes » avec appel à la théorie de l'information et à la théorie des nombres.

I. INTRODUCTION

Nous reprenons un problème proposé par Claude Berge il y a plusieurs années :

« Les usines malhonnêtes

Dans le pays de ..., les pièces de monnaie sont fabriquées par $n + 1$ usines dont une seulement est contrôlée par le gouvernement. On apprend un jour que certaines des n autres usines emploient systématiquement un métal frauduleux pour leur fabrication. L'inspecteur chargé de déceler les fraudeurs sait seulement que toutes les pièces mauvaises pèsent le même poids, et que ce poids est différent soit en plus, soit en moins, de celui d'une bonne pièce. Il dispose d'une balance à ressort, sorte de « peson » dont l'élongation indique le poids total posé sur le plateau unique ; il peut avoir autant de pièces qu'il le désire en provenance de chaque usine. Dans ces conditions, peut-il déceler *toutes* les usines frauduleuses en effectuant seulement 3 pesées ? Bien entendu, on ne connaît même pas au départ le poids d'une bonne pièce » [1] (1).

Comme dans beaucoup de problèmes de ce type, la quantité d'information nécessaire n'est pas mesurable en unités habituelles et il faut travailler avec l'acquisition qui permet de jauger les valeurs informationnelles locales par adaptation des bases de logarithmes au nombre d'issues des diverses questions.

(1) Nous tenons à exprimer ici nos remerciements à Claude Witkowski, qui nous a donné communication de la solution partielle qu'il avait obtenue pour ce problème [3] citée en [2]. La méthode proposée ici coïncide exactement avec la sienne lorsque $n \leqslant 6$ conformément au premier corollaire, mais elle offre aussi l'avantage d'être prolongeable au-delà.

Le poids des pièces fausses n'est pas demandé dans l'énoncé et cependant, il ne semble pas possible de trouver une solution correcte ne le donnant pas ; le problème informationnel est justement biaisé par l'omission de l'exigence de la valeur de ce poids. Ceci est un phénomène extrêmement fréquent où il semble inévitable d'obtenir une information parasite — peut-être intéressante mais non demandée — en même temps que l'information recherchée ; certains exemples théoriques tendraient à montrer combien ce phénomène est profond, parce qu'il provient d'événements dépendants qui avaient été escomptés comme indépendants.

II. INFORMATION

II.1. La détermination du poids d'une pièce juste, émanant de l'usine u_0 contrôlée par le gouvernement, nécessite manifestement une pesée.

II.2. Supposant connus le poids d'une pièce juste p_0 et celui d'une pièce fausse $p_0 + \Delta$, le nombre k d'usines malhonnêtes (compris entre 0 et n) demande une information de 1 unité dans un système de base $n + 1$.

II.3. Supposant connus les poids p_0 et $p_0 + \Delta$ (où Δ peut être positif ou négatif), chacune des n pièces d'un ensemble prélevé sur les n usines douteuses pouvant être juste ou fausse indépendamment des $n - 1$ autres, le nombre de possibilités est 2^n.

Si une question peut admettre 2^n réponses, l'information requise pour obtenir la réponse unique parmi 2^n possibilités peut être égale à l'unité si on emploie un système adéquat.

Le résultat de la recherche II.2 réduit en fait les possibilités à C_n^k au lieu de 2^n, de sorte que l'information serait de 1 unité pour un système à C_n^k issues équiprobables seulement.

II.4. Si le poids d'une pièce fausse se déduit des deux dernières opérations par calcul sans exiger une nouvelle information, 3 pesées suffiront pour résoudre le problème. Sinon, il serait nécessaire de procéder à des pesées supplémentaires, mais *dans tous les cas le poids d'une pièce fausse sera* obtenue.

Suivant le cas on pourra dire que le nombre de questions est 3 ou davantage. On ne pourra pas dire que l'information a pour valeur 3 ou plus puisque l'unité d'information est variable d'une question à une autre mais on dira que l'acquisition est de 3 ou 4 (par exemple) en utilisant une notion généralisant l'information [4] :

Il s'agit de fabriquer un questionnaire semi-homogène permettant la résolution.

III. MODE OPERATOIRE

Le mode opératoire se déduit directement de l'étude informationnelle en traduisant la seconde et la troisième pesées dans deux systèmes de numération différents dont nous prendrons les bases les plus petites possibles, c'est-à-dire d'une part 1 et de l'autre *un certain entier a* que nous déterminerons ultérieurement.

Il faut alors opérer comme suit :

1) Peser la pièce en provenance de l'usine u_0 :

soit
$$P_1 = p_0 \tag{1}$$
le poids indiqué par le peson.

2) *Prendre une pièce de chaque usine douteuse* $u_1, u_2, \ldots u_n$ *et peser ces n pièces :*

soit
$$P_2 = np_0 + k\Delta \tag{2}$$
le poids indiqué par le peson ;

k est le nombre d'usines malhonnêtes fabriquant des pièces de poids $p_0 + \Delta$.

Si $P_2 = np_0$, toutes les n usines considérées sont honnêtes *et il n'y a pas lieu de procéder à une troisième pesée* ($\Delta = 0$ ou $k = 0$)

si $P_2 > np_0$, les pièces fausses sont trop lourdes ($\Delta > 0$)

si $P_2 < np_0$, les pièces fausses sont trop légères ($\Delta < 0$).

1) et 2) permettent alors de calculer

$$k\Delta = P_2 - nP_1$$

3) *Prendre une pièce de l'usine* u_1, *a pièces de l'usine* u_2, a^2 *pièces de l'usine* $u_3, \ldots, a^{n-1}$ *pièces de l'usine* u_n *et peser ces* $\dfrac{a^n - 1}{a - 1}$ *pièces placées simultanément sur le plateau unique :*

soit
$$P_3 = \frac{a^n - 1}{a - 1} p_0 + K\Delta \tag{3}$$
le poids indiqué par le peson, où Δ a le signe déterminé en 2).

$K\Delta$ représente le produit de l'écart Δ par l'entier K exprimé dans la base *a avec seulement des* 0 *et des* 1 :

$$K = \varepsilon_1 + a\varepsilon_2 + a^2\varepsilon_3 + \ldots + a^{n-1}\varepsilon_n,$$

où $\varepsilon_j = 0$ si l'usine u_j est honnête,

$\varepsilon_j = 1$ si l'usine u_j est malhonnête.

K admet 2^n valeurs possibles.

A l'aide des 3 pesées il est aisé de calculer le quotient $R = \dfrac{K\Delta}{k\Delta}$ soit :

$$R = \frac{P_3 - \dfrac{a^n - 1}{a - 1} P_1}{P_2 - nP_1}$$

où le dénominateur n'est pas nul, sinon il n'y aurait eu que deux pesées.

Posons $k = f(K)$.

S'il existe une relation entre tout entier K exprimé en base a avec seulement des 0 et des 1 et le rapport $R(K) = K/f(K)$, où $f(K)$ est le nombre de chiffres 1 nécessaires pour exprimer K dans le système a-aire, alors après avoir effectué les 3 pesées décrites il suffira d'effectuer les calculs suivants pour obtenir la réponse au problème posé.

1) Calculer $R = \dfrac{P_3 - \dfrac{a^n - 1}{a - 1} P_1}{P_2 - nP_1}$

2) Déterminer la valeur du couple $(K, f/K)$ à l'aide d'une table donnant la valeur de R pour tout entier inférieur à a^n.

Si K *est unique* pour la valeur de R déterminée en 1), $f(K)$ *donne alors le nombre d'usines malhonnêtes*

et l'expression a-aire de K donne les valeurs non nulles de $f(K)$ coefficients ε_j, c'est-à-dire *la liste des usines malhonnêtes.*

Il reste donc à effectuer

3) Le calcul du poids des pièces fausses :

$$\Delta = \frac{P_2 - nP_1}{f(K)}$$

Mais si K *n'est pas unique* pour la valeur de R déterminée en 1) alors le choix de la base était mauvais. On peut montrer que pour certains couples $(K, f(K))$ une quatrième pesée permet de lever l'indétermination. Le paragraphe suivant a pour objet la détermination de a.

IV. CONSIDERATIONS DE THEORIE DES NOMBRES

IV.1. Prenons $a = 2$

Soit un entier positif K, compris entre deux puissances consécutives de 2 :

$$2^{n-1} \leqslant K < 2^n$$

Dans « le système de base 1 », on peut dire que K est représenté exclusivement par K chiffres 1.

Dans le système binaire, K *est représenté* par n chiffres dont $f(K)$ *chiffres* 1. Il est évident que $f(K)$ est déterminé par K, quel que soit n et par suite le rapport $R(K) = K/f(K)$ a une valeur et une seule pour tout entier K strictement positif. De plus pour $K \leqslant 7$, $R(K)$ prend les valeurs

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{3}$$

et détermine K de manière unique ; de même $f(\alpha \cdot 2^m) = f(\alpha)$ de sorte que $R(\alpha \cdot 2^m) = 2^m R(\alpha)$ et $R(K) = 2^m \Rightarrow K = 2^m$.

Le problème que nous étudions est :

La valeur de $R(K)$ détermine-t-elle l'entier K de manière unique ?

Soient trois nombres entiers P, Q, S, tous supérieurs à 1 et tels que

$$P = Q \cdot S.$$

P, Q, S sont exprimés en binaire par respectivement $f(P)$, $f(Q)$, $f(S)$ chiffres 1 et $h(P)$, $h(Q)$, $h(S)$ chiffres 0.

En effectuant la multiplication de Q par S, le produit partiel de Q par chaque chiffre 1 de S donne des produits partiels comportant $f(Q)$ chiffres 1. Effectuant l'addition des $f(S)$ tels produits partiels on obtient au résultat le nombre P qui aura $f(Q) \cdot f(S)$ chiffres 1 s'il n'y a eu aucun report et au maximum $f(Q) \cdot f(S) - 1$ chiffres 1 s'il y a eu au moins un report.

Nous avons donc démontré :

Lemme. — *Étant donné trois nombres P, Q, S tous supérieurs à 1 exprimés dans le système binaire avec respectivement $f(P)$, $f(Q)$, $f(S)$ chiffres 1, si $P = Q \cdot S$, alors $f(P) \leqslant f(Q) \cdot f(S)$.*

Faisons varier K en croissant de 2^m à $2^{m+1} - 1$ en étudiant $R(K)$.

Pour que l'égalité $R(K') = R(K)$ soit satisfaite, il serait nécessaire que $K' = \alpha K$ et que $f(K') = \alpha f(K)$, (α rationnel et $K' > K$).

1° *K et $f(K)$ sont premiers entre eux.*

Il faut alors $K' > 2^{m+1} > K$. Donc le rapport $R(K)$ n'est égal à aucun rapport $R(K_1)$ relatif à un nombre inférieur à K.

2° *K et $f(K)$ ont un facteur commun $\beta > 2$, tel que*

$$K = \beta K_1 \qquad \text{et} \qquad f(K) = \beta\lambda.$$

Le lemme entraîne $f(K) \leqslant f(\beta) f(K_1)$.

Or, pour $\beta > 2$, le nombre de chiffres 1 permettant d'exprimer β en binaire est toujours inférieur à β, soit $f(\beta) < \beta$.

Donc $f(K) < \beta f(K_1)$ et par suite $R(K_1) \neq R(K)$.

Examinons s'il est possible d'avoir $R(K) = R(K')$ lorsque

$$2^m < K < K' < 2^{m+1} \tag{1}$$

et quelle est la plus petite valeur de m correspondante.

Posons $$K' = \gamma K_1$$

et $$f(K') = \gamma\lambda, \qquad f(K_1) > \lambda$$

β et γ entiers positifs, $\gamma > \beta$

En premier lieu K_1 ne pouvant être une puissance de 2, il faut $f(K_1) \geqslant 2$ et β est au moins égal à 2.

En écrivant l'inégalité (1) sous la forme

$$2^m < \beta K_1 < \gamma K_1 < 2^{m+1} \tag{1'}$$

on voit que dans ces conditions

$$\gamma < 2\beta.$$

En cherchant les plus petites valeurs possibles de λ, β et γ pour avoir $R(\beta K_1) = R(\gamma K_1)$ on peut montrer que :

si $\lambda = 1$ alors β est nécessairement supérieur à 2 et

si $\lambda = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$ ou 5, $f(K)$ doit être supérieur à 3.

Effectivement pour $K_1 = 2^t \cdot (2^4 + 2^2 + 2 + 1)$, les premières valeurs K, K', K'' admettent le même rapport :

$$R(K) = 23 \cdot 2^t$$

Pour $t = 0$, on obtient :

$$\frac{69}{3} = \frac{92}{4} = \frac{115}{5}$$

dont les numérateurs s'expriment en binaire par

$$1000101, \qquad 1011100, \qquad 1110011.$$

Les 6 nombres inférieurs à 2^7 admettant des valeurs de $R(K)$ ne les déterminant pas sont :

	69, 92 et 115	$(R = 23)$
	81 et 108	$(R = 27)$
ainsi que	106 et 159	$(R = 26{,}5)$,

mais dans ce dernier cas la condition (1) n'est plus satisfaite.

On en déduit :

Théorème 1. — *Il existe une relation biunivoque entre tout entier strictement positif* $K < 92$ *et le rapport* $R = \dfrac{K}{f(K)}$ *où* $f(K)$ *est le nombre de chiffres* 1 *nécessaires pour exprimer* K *dans le système binaire.*

Corollaire. — *Il est possible de déterminer les usines malhonnêtes en trois pesées lorsque* n *est inférieur à* 7 *en n'utilisant pas plus de* $2^n - 1$ *pièces distinctes.*

En effet pour $n = 6$, K sera inférieur à $2^6 - 1$ c'est-à-dire 63.

Dans le cas où $n \geqslant 7$, il est possible de déterminer les usines malhonnêtes dans les mêmes conditions si et seulement si la fraction $K/f(K)$ est irréductible.

IV.2. L'étude précédente montre que l'utilisation de 2^{p-1} pièces de l'usine u_p (pour tout p) ne permet pas d'obtenir de façon systématique la liste des usines malhonnêtes lorsque $n > 6$; il y a donc lieu de pousser l'étude avec une valeur de a supérieure à 2.

Prenant $a = 3$, on peut montrer que K reste déterminé par $R(K)$ si K et $f(K)$ sont premiers entre eux, mais nous n'avons pas pu mettre en défaut l'unicité de K par une démonstration.

Nous avons alors procédé à des essais numériques [1] sur l'ordinateur 3600 de l'Institut Blaise-Pascal qui permettent d'affirmer :

Théorème 2. — *Il existe une relation biunivoque entre tout entier strictement positif* $K \leqslant 3^{13}$, *s'exprimant dans le système ternaire exclusivement avec des zéros et avec* $f(K)$ *chiffres* 1, *et le rapport* $R = \dfrac{K}{f(K)}$.

Corollaire. — *Il est possible de déterminer les usines malhonnêtes en trois pesées lorsque n est inférieur à* 14 *en n'utilisant pas plus de* $\dfrac{3^n - 1}{2}$ *pièces distinctes.*

Remarque. — Les calculs n'ont pas été effectués au-delà de 3^{13} de sorte que 14 peut ne pas être la limite supérieure de validité du corollaire.

IV.3. Recherches sur a

Nous allons déterminer un ensemble de valeurs de a nous assurant une réponse au problème strict (liste des usines déterminée de manière unique à l'aide de 3 pesées), c'est-à-dire telles que K et $R(K)$ soient en correspondance biunivoque [2].

Prenons deux entiers K et K' où $K' > K$ et montrons qu'il existe un a tel que

$$R(K) \neq R(K')$$

Si $\dfrac{f(K')}{f(K)} \leqslant 1$ alors on obtient directement $R(K') > R(K)$

Soit alors $\dfrac{f(K')}{f(K)} > 1$

1) Supposons $a^m \leqslant K < K' < a^{m+1}$,

alors
$$K' \leqslant \frac{a^{m+1} - 1}{a - 1} \qquad \text{et} \qquad f(K') \leqslant m + 1$$

et
$$1 < \frac{K'}{K} \leqslant \frac{a^{m+1} - 1}{a^m(a - 1)} < \frac{a}{a - 1}$$

---

(1) Nous remercions Mme Bonatto qui a étudié et mis en œuvre les algorithmes nécessaires à cette « démonstration ».

(2) Nous remercions M. Bodard, de l'Institut Blaise-Pascal, qui nous a suggéré cette méthode.

mais
$$\frac{f(K')}{f(K)} \geqslant \frac{m+1}{m}$$
de sorte que

si $a \geqslant m+1$ c'est-à-dire si $\dfrac{a}{a-1} \leqslant \dfrac{m+1}{m}$ alors
$$\frac{K'}{K} < \frac{f(K')}{f(K)} \qquad \text{et} \qquad R(K') \neq R(K)$$

2) Supposons maintenant les deux entiers K et K' séparés par au moins une puissance positive de a :
$$K < a^m \leqslant K' < a^{m+1}.$$

On obtient de même
$$\frac{K'}{K} \geqslant \frac{a^m(a-1)}{a^m-1} > a-1$$
et comme l'inégalité
$$\frac{f(K')}{f(K)} \leqslant \frac{m+1}{1}$$
est toujours vraie, il vient :

Si $a > m+2$ alors
$$\frac{K'}{K} > \frac{f(K')}{f(K)} \qquad \text{donc} \qquad R(K') \neq R(K)$$

La valeur maximale de K utilisée au paragraphe 2 étant $\dfrac{a^n-1}{a-1}$, il suffira de prendre $m+1=n$. Ce qui conduit au résultat :

Théorème 3. — *Soient trois entiers a, n et K tels que*

1) $a > n+1$,

2) $K < a^n$,

3) *Dans le système de base a, K s'exprime seulement avec des zéros et avec $f(K)$ chiffres* 1,

alors il existe une relation biunivoque entre K et le rapport $R = \dfrac{K}{f(K)}$.

Corollaire. — *L'existence d'une table de correspondance entre K et R permet de déterminer un seul K et un seul $f(K)$ lorsque l'on connaît R.*

La liste des usines malhonnêtes peut donc être dressée suivant le mode opératoire du paragraphe 2 nécessitant seulement 3 pesées mais exigeant $\dfrac{a^n-1}{a-1}$ pièces différentes où $a > n+1$.

V. CONCLUSIONS

I. *2 pesées* suffisent si les usines sont toutes honnêtes.

3 pesées simples permettent de résoudre le problème complètement dans tous les cas. Il y a lieu d'utiliser pour base de numération 2 si $n \leqslant 6$, 3 si $n \leqslant 13$, sinon $n + 2$.

II. Dans tous les cas il a été possible de déterminer les usines malhonnêtes et aussi de déterminer le poids des pièces fausses, mais nous n'avons pas démontré une solution satisfaisant à la question stricte : 3 pesées sans la détermination du poids des pièces fausses.

III. D'un point de vue pratique, la méthode proposée (avec a^{p-1} ou même avec 3^{p-1} pièces de l'usine u_p) exige un nombre considérable de pièces des usines u_1 à u_n, soit : $\dfrac{a^p - 1}{a - 1}$ dans le premier cas, $\dfrac{3^p - 1}{2}$ dans le second.

Si on s'astreint à un maximum de 63 pièces par pesée et à une moyenne de 11 pièces de chaque usine, une méthode voisine conduit à :

— peser d'abord une pièce de l'usine u_0 (une seule fois) ;

— puis effectuer les deuxième et troisième pesées par groupes relatifs à des tranches de 6 usines. Le nombre total de pesées est alors

$$1 + \frac{n}{3} \qquad \text{(arrondi par excès).}$$

De la sorte pour $n = 100$, il aura fallu moins de 1 100 pièces au lieu de $\dfrac{3^{100} - 1}{2} \# 10^{47}$, voire même au lieu de $\dfrac{102^{100} - 1}{101} \# 10^{199}$.

Bien que le problème posé admette que le peson ait des possibilités illimitées, cette dernière remarque montre que la précision requise du peson est tout à fait irréalisable si on veut économiser au maximum les pesées.

Si un programme devait être utilisé sur calculateur pour évaluer deux catégories d'items, du type p_0 et du type $p_0 + \Delta$, l'algorithme basé sur cette dernière méthode serait beaucoup plus performant que celui basé sur les méthodes faisant l'objet de la conclusion I. De même pour un contrôle de machines produisant en parallèle des objets identiques dont le poids est une caractéristique (exemple donné par M. Witkowski).

En définitive l'optimum du point de vue de la théorie de l'information peut exiger un nombre si extravagant de pièces que la méthode correspondante n'est pas exploitable directement : il faut opérer sur des tranches de quelques usines seulement.

IV. On constate que pour $n = 6$ la base trouvée (2) est nettement inférieure à celle obtenue par le théorème 3 (c'est-à-dire 8). Le théorème 3 offre une solution qui est éloignée de la meilleure solution possible et nous pouvons maintenant formuler *un nouveau problème : quelle est la plus petite valeur de a permettant d'identifier les n usines? ; est-ce 3?*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Claude Berge, Rubrique des problèmes Plaisans et Délectables, *Revue Française de Recherche Opérationnelle*, nº 22 (1/1962), p. 76.

[2] Claude Berge, Rubrique des problèmes Plaisans et Délectables, *Revue Française de Recherche Opérationnelle*, nº 24 (3/1962), p. 282.

[3] Claude Witkowski, Quelques aspects d'un problème de Tri (avril 1962), Communication privée.

[4] Claude Picard, *Théorie des Questionnaires*, Gauthier-Villars, Paris (1965).