

J. F. MAITRE

**Brève communication. Sur la séparation des  
valeurs propres d'une matrice positive**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge*, tome 4, n° R3 (1970), p. 118-124

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1970\\_\\_4\\_3\\_118\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_3_118_0)

© AFCET, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LA SEPARATION DES VALEURS PROPRES D'UNE MATRICE POSITIVE

par J. F. MAITRE (1)

Résumé. — On montre que, pour une matrice positive ( $\geq 0$ ), telle que  $A^i p = \rho p$ , avec  $p > 0$  ( $\rho$  : rayon spectral), les valeurs propres  $\lambda$  distinctes de  $\rho$  satisfont

$$|\lambda| \leq \min \{ \rho - m^*, M^* - \rho \} < \rho \frac{M^* - m^*}{M^* + m^*},$$

avec

$$M^* = \sum_i \left( p_i \max_j \frac{a_{ij}}{p_j} \right), \quad m^* = \sum_i \left( p_i \min_j \frac{a_{ij}}{p_j} \right).$$

Ce résultat nouveau est comparé aux bornes déjà obtenues par différents auteurs (Ostrowski, Hopf, Bauer-Deutsch-Stoer, Lynn-Timlake, Schaeffer).

### I. INTRODUCTION

L'étude des principales propriétés des matrices positives a été entreprise au début du siècle (Frobenius [5], Perron [14]), puis complétée et élargie dans le cadre plus général des opérateurs positifs dans un espace ordonné, notamment par Krein et Rutman [7], ainsi que Schaefer dont le livre [15] expose les principaux résultats et donne une bibliographie récente. Le livre de Varga [17] et celui de Marcus et Minc [11] comportent un exposé assez complet des propriétés des matrices positives.

Le présent travail, inspiré par un article récent de Schaefer [16], donne une nouvelle borne pour le module des valeurs propres distinctes de la « racine de Perron », qui est toujours meilleure que celle donnée dans cet article. Nous avons jugé utile de compléter cette étude par une comparaison de ce résultat, avec ceux obtenus par Ostrowski [12], [13], Hopf [6], Bauer-Deutsch-Stoer [2], [4] et Lynn-Timlake [8], que nous commençons par rappeler en uniformisant les notations.

(1) Institut de Mathématiques Appliquées, Grenoble.

## II. RAPPEL DES PRINCIPALES BORNES ET DES METHODES UTILISEES

Avant d'énumérer les différents résultats (dans l'ordre chronologique), donnons quelques précisions de vocabulaire et de notation. Un vecteur  $x$  ou une matrice  $A$  sont dits positifs ( $x \geq 0, A \geq 0$ ) si toutes leurs composantes sont positives, et strictement positives ( $x > 0, A > 0$ ) si toutes les composantes sont strictement positives. On notera  $|x|$  le vecteur de composantes  $|x_i|$ ,  $\rho(A)$  ou  $\rho$  le rayon spectral de  $A$ .

On sait qu'une matrice positive  $A$  admet  $\rho$  comme valeur propre avec un vecteur propre positif; on notera  $p$  le vecteur correspondant à  $A^t$  :

$$(1) \quad A^t p = \rho p.$$

Dans 2.1 à 2.4,  $A$  est supposée strictement positive et donc  $\rho > 0$ . Dans 2.5 on suppose  $p$  strictement positif, avec  $A$  seulement positive.

Les bornes données pour les valeurs propres  $\lambda (\lambda \neq \rho)$  sont soit du type  $\mu (|\lambda| \leq \mu)$ , soit du type  $\sigma (|\lambda|/\rho \leq \sigma)$  :

$$(2) \quad \forall \lambda(A) \neq \rho(A) : |\lambda| \leq \mu = \rho \cdot \sigma.$$

Nous utiliserons enfin les notations suivantes :

$$(3) \quad M_i = \max_j a_{ij} \quad m_i = \min_j a_{ij} \quad M = \max_i M_i \quad m = \min_i m_i$$

$$(4) \quad M'_i = \max_j \frac{a_{ij}}{p_j} \quad m'_i = \min_j \frac{a_{ij}}{p_j} \quad M' = \max_i M'_i \quad m' = \min_i m'_i,$$

$$(5) \quad M'' = \sum_i p_i M'_i \quad m'' = \sum_i p_i m'_i.$$

**2.1** Ostrowski a fondé ses résultats sur la considération du nombre

$$(6) \quad \sup_{x \perp p} \inf \{ \alpha ; |Ax| \leq \alpha A |x| \}$$

qui est égal à

$$(7) \quad \sigma_1 = \frac{\max_i \left( \frac{M'_i}{m'_i} \right) - 1}{\max_i \left( \frac{M'_i}{m'_i} \right) + 1}.$$

Il a déduit de ce résultat des bornes plus larges, mais ne faisant pas intervenir le vecteur  $p$  :

$$(8) \quad \sigma_2 = \frac{\frac{M}{m} \max_i \left( \frac{M_i}{m_i} \right) - 1}{\frac{M}{m} \max_i \left( \frac{M_i}{m_i} \right) + 1}, \quad \sigma_3 = \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} (\sigma_3 \geq \sigma_2).$$

**2.2** Hopf a établi ses résultats pour des opérateurs intégraux positifs, en considérant le nombre

$$(9) \quad \sup_{g > 0, f} \frac{\text{osc}(Af/Ag)}{\text{osc}(f/g)}$$

où  $\text{osc}(x/y)$  désigne l'oscillation de  $x$  par rapport à  $y$ , notion qui peut être étudiée dans le cadre général des espaces ordonnés [1]. Dans le cas de l'espace  $R^n$  et des matrices, on a :

$$(10) \quad \text{osc}(x/y) = \max_{i,j} \left| \frac{x_i}{y_i} - \frac{x_j}{y_j} \right|, \quad y > 0,$$

et les résultats de Hopf s'écrivent :

$$(11) \quad (12)$$

$$\sigma_4 = \frac{k-1}{k+1} \quad \text{avec} \quad k^2 = \max_{i,j,k,l} \frac{a_{ik}a_{jl}}{a_{il}a_{jk}}, \quad \text{et} \quad \sigma_5 = \frac{M-m}{M+m} \quad (\sigma_5 \geq \sigma_4).$$

**2.3** Deutsch s'est placé dans le cadre général des espaces ordonnés localement convexes. Sa majoration a été obtenue en considérant la norme de la restriction à un sous-espace invariant de l'opérateur  $A$ ; la boule unité dans ce sous-espace étant construite à partir d'une section parallèle du cône positif [4]. Il a été heureusement montré par la suite [2] qu'il était équivalent de considérer le nombre

$$(13) \quad \sup_x \frac{\text{osc}(Ax/p)}{\text{osc}(x/p)} \quad (p \text{ défini par (1)}),$$

qui, dans le cas fini des matrices donne la borne

$$(14) \quad \mu_6 = \frac{1}{2} \max_{i,j} \sum_k \left| p_k \left( \frac{a_{ki}}{p_i} - \frac{a_{kj}}{p_j} \right) \right|.$$

Nous avons obtenu indépendamment le même résultat pour une classe plus large de matrices en utilisant des semi-normes [9], et avons ensuite montré l'équivalence existant avec l'oscillation [10].

**2.4** Lynn et Timlake, en utilisant le fait que les valeurs propres  $\lambda (\neq \rho)$  de  $A$  sont aussi valeurs propres de  $A - xp^t$ , pour tout  $x$ , ont donné, entre autres, les bornes

$$(15) \quad \mu_7 = \rho - m \cdot \frac{\sum_k p_k}{\max_i p_i}, \quad \mu_8 = \rho - m \frac{\rho - s + nm}{\rho - s + m}$$

où  $n$  est l'ordre de la matrice et  $s$  désigne  $\min_i \sum_j a_{ij}$ .

On peut remarquer que la quantité  $\rho - \sum_i p_i m'_i$ , qui est un élément de notre résultat (18), apparaît comme intermédiaire dans leur démonstration.

2.5 Schaefer a également considéré des perturbations de rang 1, mais en se limitant à la seule direction  $ep^t$ , avec  $e^t = (1, 1, \dots, 1)$ . L'encadrement le plus fin du type  $\alpha ep^t \leq A \leq \beta ep^t$ , qui correspond à  $\alpha = m'$ ,  $\beta = M'$  et le lemme du § 3 ont conduit aux résultats

$$(16) \quad \mu_9 = \min \left\{ \rho - m' \cdot \sum_k p_k, M' \cdot \sum_k p_k - \rho \right\}, \quad \sigma_{10} = \frac{M' - m'}{M' + m'},$$

( $\mu_9 \leq \mu_{10}$ ).

### III. UNE NOUVELLE BORNE

Rappelons d'abord une propriété, déjà utilisée par Schaefer, et facile à démontrer :

**Lemme**

Si  $A$  est une matrice positive ( $\geq 0$ ) admettant un vecteur propre  $p$  strictement positif ( $> 0$ ), alors :

$$(17) \quad Ap = \rho(A)p.$$

Notre résultat s'énonce comme suit.

**Théorème**

Pour une matrice  $A$  positive ( $\geq 0$ ), telle que  $A^t p = \rho p$  avec  $p > 0$ , les valeurs propres différentes de  $\rho$  satisfont

$$(18) \quad |\lambda| \leq \min \{ \rho - m'', M'' - \rho \} = \mu_{11},$$

avec la borne plus large :

$$(19) \quad \mu_{12} = (M'' - m'') / (M'' + m'')$$

(cf. Notation (5)).

*Démonstration.* — Les valeurs propres de  $A$  différentes de  $\rho$  sont aussi valeurs propres des matrices

$$(20) \quad B = A - \beta xp^t \quad \text{et} \quad C = \gamma xp^t - A, \quad \text{avec}$$

$$B^t p = (\rho - \beta x^t p)p, \quad C^t p = (\gamma x^t p - \rho)p.$$

Si les matrices  $B, C$  sont positives, les valeurs apparaissant dans (20) sont leurs rayons spectraux et donc :

$$(21) \quad \lambda \neq \rho \Rightarrow |\lambda| \leq \min \{ \rho - \beta x^t p, \gamma x^t p - \rho \};$$

cela sera possible pour des valeurs finies  $\beta, \gamma$  si  $x > 0$ , et, pour  $x$  fixé, la meilleure majoration sera obtenue pour :

$$(22) \quad \beta_x = \sup \{ \beta; A - \beta x p^t \geq 0 \} = \min_{i,j} \frac{a_{ij}}{x_i p_j} = \min_i \frac{m'_i}{x_i},$$

$$\gamma_x = \inf \{ \gamma; \gamma x p^t - A \geq 0 \} = \max_{i,j} \frac{a_{ij}}{x_i p_j} = \max_i \frac{M'_i}{x_i}.$$

Il reste à optimiser par rapport à  $x$  que l'on peut normaliser en imposant  $x^t p = 1$ ; les valeurs optimales sont

$$\beta_0 = \sup \{ \beta_x; x > 0 \text{ et } x^t p = 1 \} = \sum_i p_i m'_i,$$

$$\gamma_0 = \inf \{ \gamma; x > 0 \text{ et } x^t p = 1 \} = \sum_i p_i M'_i.$$

Les dernières égalités résultent des relations :

$$\min_k \frac{m'_k}{x_k} \leq \frac{\sum_i p_i m'_i}{\sum_i p_i x_i} \quad \text{et} \quad \max_k \frac{M'_k}{x_k} \geq \frac{\sum_i p_i M'_i}{\sum_i p_i x_i},$$

les égalités pouvant être atteintes respectivement pour  $x = \left( m'_j / \sum_i p_i m'_i \right)$   
et  $x = \left( M'_j / \sum_i p_i M'_i \right)$ .

La borne  $\mu_{12}$  est une simple conséquence de l'inégalité :  $\forall a, b \in R^+$  et  $r \in R$  :

$$\min \{ r - a, b - r \} \leq \frac{b - a}{b + a} \cdot r.$$

#### REMARQUES

On aurait pu limiter la démonstration au cas des matrices stochastiques en colonnes ( $p = e$ ), puisque pour  $A \geq 0$  avec  $A^t p = \rho p$ ,  $\rho > 0$ , la matrice

$$(23) \quad A' = \frac{1}{\rho(A)} \cdot D_p A D_p^{-1} \quad (D_p \text{ diagonale avec } (D_p)_{ii} = p_i)$$

est stochastique en colonnes.

On peut d'ailleurs obtenir d'autres bornes en appliquant certains résultats du paragraphe 2 à  $A'$ .

IV. COMPARAISON DES DIFFERENTS RESULTATS

Nous ne comparerons deux bornes que sur l'ensemble de toutes les matrices positives, et nous noterons (fig. 1) si la borne  $\mu_i$  est toujours au moins aussi



Figure 1

bonne que la borne  $\mu_j$  ( $\mu_j = \rho\sigma_j$  pour les bornes données par  $\sigma$ ). Nous pouvons ainsi résumer les relations existant entre les diverses bornes par le graphe :

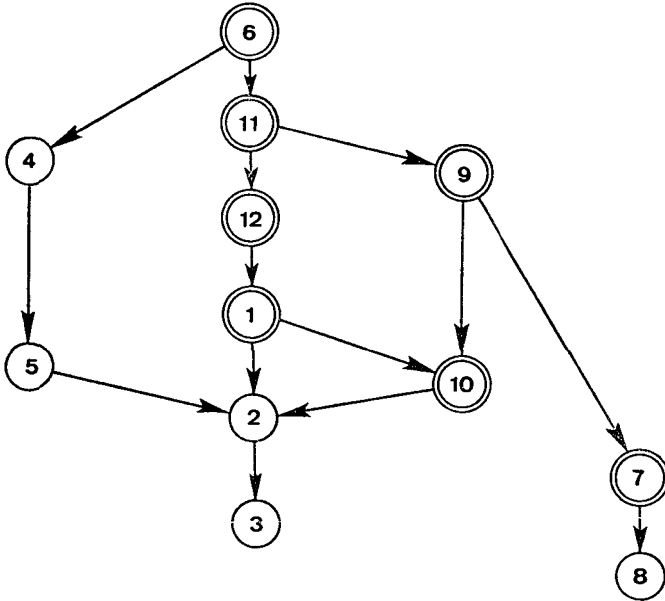


Figure 2

N.B. — Nous avons mis en évidence par un cercle doublé les formules nécessitant, dans le cas général, la connaissance du vecteur  $p$ . Nous laissons au lecteur la vérification de ces relations.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. L. BAUER, *An elementary proof of the Hopf inequality for positive operators*, Num. Math., 7, 331-337 (1965).
- [2] F. L. BAUER, E. DEUTSCH und J. STOER, *Abschätzungen für die Eigenwerte positiver linearer Operatoren*, Linear Algebra and its applications, 2, 275-301 (1969).

- [3] G. BIRKHOFF, *Extensions of Jentzsch's Theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., 85, 219-227 (1957).
- [4] E. DEUTSCH, *Zum Perron-Eigenwert positiver linearer Abbildungen*, Dissertation, München (1967).
- [5] G. FROBENIUS, *Über Matrizen aus positiven Elementen*, Akad. Wiss. Berlin, I, 514-518 (1908); II, 456-477 (1912).
- [6] E. HOPF, *An inequality for positive linear integral operators*, J. of Math. and Mech., 12, 683-692 (1963).
- [7] M. G. KREIN and M. A. RUTMAN, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, Uspehi Math. Nauk (N.S.) 3, n° 1 (23), 3-95 (1948). Amer. Math. Soc. Transl. ser., 1, 10, 199-325 (1950).
- [8] M. S. LYNN and W. P. TIMLAKE, *Bounds for Perron eigenvectors and subdominant eigenvalues of positive matrices*, Linear Algebra and its Applications, 2, 143-152 (1969).
- [9] J. F. MAITRE, *Semi-normes et localisation des valeurs propres d'un opérateur*, Séminaire d'Analyse Numérique, Grenoble (1967).
- [10] J. F. MAITRE, *Sur certaines fonctionnelles dans un espace préordonné et l'équivalence entre semi-normes et oscillation*, Séminaire d'Analyse Numérique, Grenoble (1970).
- [11] M. MARCUS and H. MINC, *A survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*, Allyn and Bacon, Inc., Boston (1964).
- [12] A. M. OSTROWSKI, *On positive matrices*, Math. Ann., 150, pp. 276-284 (1963).
- [13] A. M. OSTROWSKI, *Positive Matrices and Functional Analysis*, in : Recent advances in Matrix Theory. Schneider Ed. Madison. Univ. of Wisconsin Press (1964).
- [14] O. PERRON, *Zur Theorie der Matrizen*, Math. Ann., 64, 248-263 (1908).
- [15] H. H. SCHAEFER, *Topological Vector Spaces*, Mac Millan Co., New York (1966).
- [16] H. H. SCHAEFER, *Eine Abschätzung der nichttrivialen Eigenwerte stochastischer Matrizen*, Numer. Math., 15, 219-223 (1970).
- [17] R. S. VARGA, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey (1962).
- [18] H. WIELANDT, *Unzerlegbare nich negative Matrizen*, Math. Z., 52, 642-648 (1950).