

J. BARANGER

**Brève communication. Un théorème de  
caractérisation de certains sous-espaces  
hilbertiens de  $l_1$**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge*, tome 4, n° R3 (1970), p. 131-134

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1970\\_\\_4\\_3\\_131\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_3_131_0)

© AFCET, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UN THEOREME DE CARACTERISATION DE CERTAINS SOUS-ESPACES HILBERTIENS DE $l_1$

par J. BARANGER (1)

*Sommaire. —  $l_1$  est l'espace des séries absolument convergentes. Dans le but d'obtenir des formules optimales de calcul de la somme d'une série telles qu'elles sont définies dans [2] (c'est-à-dire par minimisation d'une norme d'une fonctionnelle très simple) on cherche à élargir la collection des sous-espaces hilbertiens de  $l_1$  « utilisables » dont on dispose. Le théorème donné ici en fournit une famille. Ces résultats se transposent ensuite facilement dans (c) espace des suites convergentes. Enfin on signale que ce cadre se prête assez bien à la définition de suites-splines.*

Rappelons qu'un sous-espace hilbertien  $h$  d'un espace vectoriel topologique  $E$  (cf. [3]) est un espace de Hilbert inclus dans  $E$  tel que l'injection canonique de  $h$  dans  $E$  soit continue :

On note

$$\begin{aligned} \Delta u_n &= u_{n+1} - u_n & , & & \Delta^0 u_n &= u_n \\ \Delta^p u_n &= \Delta(\Delta^{p-1} u_n) & & & p \in \mathbb{N} - \{0\} \end{aligned}$$

Soit  $\varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels strictement positive donnée.

$$H^p(\varphi) = \left\{ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} n^j \Delta^{j-1} u_n = 0 \quad j = 1 \dots p \right.$$

$$\left. \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (\Delta^p u_n)^2 < \infty \right\}$$

(Pour  $p = 0$  il n'y a pas de conditions  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^j \Delta^{j-1} u_n$ .)

---

(1) IMAG.

**Théorème 1.** — Muni du produit scalaire

$$(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (\Delta^p u_n) (\Delta^p v_n)$$

$H^p(\varphi)$  est un sous-espace hilbertien de  $l_1$  si et seulement si

$$(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2p}}{\varphi_n} < \infty$$

*Condition suffisante* : Elle se démontre en considérant l'application  $\Phi$  de  $H^p(\varphi)$  dans  $l_2$  (ensemble des suites de carré sommable) définie par :

$$(\Phi u)_n = \sqrt{\varphi_n} \Delta^p u_n$$

On vérifie que  $\Phi$  est bijective, la surjection s'obtenant par  $p$  sommations successives. De plus :

$$\|u\|_{H^p(\varphi)} = \|\Phi u\|_{l_2}$$

donc  $H^p(\varphi)$  isomorphe à  $l_2$  est un espace de Hilbert.

On démontre par récurrence la formule :

$$(\sim) x_i \Delta^p y_i = \Delta \left( \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \Delta^j x_i \Delta^{p-j-1} y_{i+j} \right) + (-1)^p y_{i+p} \Delta^p x_i$$

(Pour  $p = 0$  la somme est prise nulle.)

Soit  $(u_n)$  une suite donnée et  $(s_n)$  la suite de ses signes ( $u_n s_n = |u_n|$ ). On considère la suite  $S_n$  telle que :

$$\begin{cases} \Delta^p S_n = s_n \\ \Delta^{p-j-1} S_j = 0 \quad j = 0, \dots, p-1 \end{cases}$$

On vérifie facilement que :

$$|\Delta^{p-j} S_n| \leq \alpha_j n^j \text{ pour } n \text{ grand} \quad j = 1 \dots p$$

En sommant  $(\sim)$ , appliquée avec  $x_i = u_i$  et  $y_i = S_i$ , de 0 à  $N$  et en faisant tendre ensuite  $N$  vers l'infini on obtient :

$$\sum_{i=0}^{\infty} |u_i| = \|u\|_{l_1} \leq \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+p)^{2p}}{\varphi_i} \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^p(\varphi)}$$

ce qui démontre que l'injection canonique est continue et fournit une borne pour  $\|u\|_{l_1} / \|u\|_{H^p(\varphi)}$ .

*Condition nécessaire* : Si  $H^p(\varphi)$  est un sous-espace hilbertien de  $l_1$  il existe  $K$  tel que :

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} u_i \right| \leq \|u\|_{l_1} \leq K \|u\|_{H^p(\varphi)}$$

D'après le théorème de Riesz il existe alors  $v \in H^p(\varphi)$  tel que :

$$(*) \quad (u, v)_{H^p(\varphi)} = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \quad \forall u \in H^p(\varphi)$$

En utilisant une formule analogue à la formule de Green on montre que  $v$  solution de (\*) vérifie :

$$(**) \quad \begin{cases} \Delta^p(\varphi_n \Delta^p v_n) = (-1)^p \\ \sum_{k=j}^{p-1} (-1)^{p-1-k} C_k^j \Delta^{p-1-k}(\varphi_0 \Delta^p v_0) = (-1)^{j+1} \quad j = 0 \dots p-1. \end{cases}$$

On en déduit facilement que :

$$\varphi_n |\Delta^p v_n| \sim \frac{n^p}{p!} \quad (n \rightarrow \infty)$$

donc  $\varphi_n |\Delta^p v_n|^2 \sim \frac{n^{2p}}{\varphi_n}$ .

Alors  $v \in H^p(\varphi)$  implique  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2p}}{\varphi_n} < \infty$  ce qui termine la démonstration.

REMARQUE 1 : Pour  $p = 0$  quand la condition (0) n'est pas réalisée l'espace  $H^0(\varphi)$  est toujours un espace de Hilbert et on a :

**Proposition** :  $H^0(\varphi)$  est un sous-espace hilbertien de  $l_2$  si (7)  $\sup \frac{1}{\varphi_n} < \infty$ .

De plus quand (7) n'est pas réalisé  $H^0(\varphi)$  n'est pas contenu dans (c).

*Démonstration* :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 \leq \sup_n \frac{1}{\varphi_n} \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 \varphi_n$$

prouve la condition suffisante. Réciproquement si

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 \leq K \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 \varphi_n \quad \forall u \in H^0(\varphi)$$

en prenant pour  $u$  la suite  $e_i = (0 \dots 1 \ 0 \dots)$  on a :

$$1 \leq K \varphi_i \quad \forall i$$

Enfin si  $\sup \frac{1}{\varphi_n} = \infty$  il existe une suite  $\varphi_{n_k}$  tendant vers zéro. En restreignant

au besoin cette suite on peut supposer  $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{n_k} < \infty$ . Alors la suite  $u_n = 1$  si  $n = n_k$  0 sinon, est dans  $H^0(\varphi)$  mais pas dans (c).

REMARQUE 2 : Pour  $p \geq 1$   $H^p(\varphi)$  peut cesser d'être un espace de Hilbert si (0) n'est pas vérifié.

REMARQUE 3 : On peut transposer le résultat du théorème 1 dans  $bv$ , ensemble des suites  $u = (u_n)$  telles que  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta u_n| < \infty$  muni de la norme  $\|u\|_{bv} = |u_0| + \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta u_n|$  de la manière suivante. L'application

$$\theta : l_1 \rightarrow bv$$

$$(\theta u)_n = \begin{cases} u_0 + \dots + u_{n-1} & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

est une isométrie de  $l_1$  sur  $bv^0 = \{u \in bv \mid u_0 = 0\}$

Si on note (pour  $p \geq 0$ )

$$h^{p+1}(\varphi) = \theta(H^p(\varphi)) = \left\{ u = (u_n) \mid u_0 = 0 \right. ,$$

$$\left. \lim_{n \rightarrow \infty} n^j \Delta^j u_n = 0 \quad j = 1 \dots p \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (\Delta^{p+1} u_n)^2 < \infty \right\}$$

Le théorème 1 donne immédiatement le

**Théorème 2 :**  $\forall p \geq 1$   $h^p(\varphi)$  muni du produit scalaire

$$(u, v)_{h^p(\varphi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (\Delta^p v_n)$$

est un sous-espace hilbertien de  $bv$  ssi  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2p-2}}{\varphi_n} < \infty$ .

REMARQUE 4 : Un moyen de définir des suites splines est alors le suivant. On considère l'application identique de  $H^p(\varphi)$  dans lui-même. D'après un théorème d'Attéia [1] il existe alors une suite unique  $u \in H^p(\varphi)$  telle que  $u_{n_0} \dots u_{n_N}$  soient donnés (et différents) et telle que :  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (\Delta^p u_n)^2$  soit minimum.

De telles suites splines fournissent des procédés d'interpolation et d'extrapolation que nous étudierons ultérieurement.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ATTEIA, « Étude de certains noyaux et théorie des fonctions splines en analyse numérique », Thèse, Grenoble, 20 juin 1966.
- [2] J. BARANGER, « Approximation optimale de la somme d'une série », *C.R.A.S.*, t. 271 (1970), série A, p. 149-152.
- [3] L. SCHWARZ, « Sous-espaces hilbertiens et anti-noyaux associés », Séminaire Bourbaki, 1961-1962, fas. 3.