

REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

M. CHEIN

Graphes h -maximaux

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 4, n° R3 (1970), p. 71-81

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_3_71_0

© AFCET, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GRAPHES h -MAXIMAUX

par M. CHEIN (1)

Résumé. — On introduit dans cet article la notion de « graphe h -maximal », c'est-à-dire un graphe d'épaisseur h et qui devient d'épaisseur $h+1$ quand on lui ajoute une arête.

Cette notion est une généralisation de la notion de « graphe planaire maximal », et son étude fournit certains résultats sur la structure des graphes d'épaisseur h .

I. DEFINITIONS

On considère des graphes simples finis.

Dans son article [10] Tutte introduit la notion d'épaisseur d'un graphe comme étant le nombre minimum de graphes partiels disjoints (au sens des arêtes), planaires et dont l'union est égale au graphe initial. Une décomposition d'un graphe G en t graphes partiels planaires et 2 à 2 disjoints au sens des arêtes s'appelle une t -décomposition planaire de G . Cette étude a débuté lorsque l'on a démontré que le graphe complet K_9 n'était pas biplanaire ([1], [9], [11]). Beineke et Harary ont démontré ensuite [4] que :

si $p \neq 9$ et $p \not\equiv 4 \pmod{6}$ alors l'épaisseur du graphe complet K_p était :

$$e(K_p) = \left\lceil \frac{1}{6}(p + 7) \right\rceil$$

L'étude des graphes d'épaisseur h amène Tutte à définir un graphe h -minimal comme étant un graphe d'épaisseur h tel que tout sous-graphe partiel est d'épaisseur $\leq h - 1$. Il démontre qu'il existe une infinité de graphes h -minimaux non isomorphes pour $h \geq 3$. Nous introduisons ici la notion de graphe h -maximal, (déjà définie et étudiée pour $h = 1$) ce qui donne certains résultats dans l'étude de la structure des graphes h -planaires. Nous démontrons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit h -maximal.

Si G est un graphe on note S_G et A_G les ensembles de sommets et d'arêtes de G .

On posera : $|S_G| = n_G$ $|A_G| = m_G$

(1) Faculté des Sciences du Mans.

Un graphe G est dit *h-maximal dans un graphe G'* , G et G' ayant même ensemble de sommets et G étant un graphe partiel de G' , si G est d'épaisseur h et si en lui ajoutant une arête quelconque a de $A_{G'} - A_G$ il devient d'épaisseur $h + 1$.

Un graphe G *h-maximal dans K_n* est dit *h-maximal*. Si G est *h-maximal* et d'ordre n alors G est *h-maximal dans G'* , quel que soit G' tel que $G \subset G' \subset K_n$.

Puisqu'on ne peut pas ajouter d'arêtes aux graphes complets, il est impossible d'augmenter leur épaisseur sans ajouter de sommets. Les résultats sur l'épaisseur des graphes complets donneront des indications sur les graphes *h-maximaux*, notamment des intervalles pour le nombre de sommets des graphes *h-maximaux*.

Remarquons qu'un *graphe 1-maximal*, au sens de la définition précédente, n'est autre qu'un graphe planaire maximal au sens classique ([8], p. 5).

II. QUELQUES RESULTATS SUR L'ÉPAISSEUR D'UN GRAPHE

Théorème 1 ([2]) :

L'épaisseur d'un graphe ayant n sommets et m arêtes est telle que :

$$e(G) \geq \frac{m}{3(n-2)}$$

Théorème 2 ([10]) :

Soit k un entier positif et G un graphe d'épaisseur t , $t \geq k$. Il existe un sous-graphe partiel de G qui est k -minimal.

Théorème 3 ([10]) :

Si G est t -minimal, avec $t > 0$, alors le degré minimum de G est $\geq t$.

Les graphes *t-minimaux connus* sont les suivants :

(0) Le seul graphe d'épaisseur nulle est le graphe vide.

(I) Le seul graphe 1-minimal est constitué d'une arête.

(II) Tous les graphes conformes à $K_{3,3}$ ou à K_5 sont 2 minimaux et ce sont les seuls.

(III) K_9 , $K_{7,7}$ et $K_{5,13}$ sont 3-minimaux.

(IV) $K_{4t-5, 4t-5}$ est t -minimal $\forall t \geq 2$ [5].

$K_{2t-1, 4t^2-10t+7}$ est t -minimal $\forall t \geq 2$ [6].

Théorème I

Un graphe est d'épaisseur h si et seulement si il contient un sous-graphe partiel conforme à un graphe h -minimal et aucun conforme à un graphe $(h + 1)$ -minimal.

Ce théorème est évident d'après le théorème 2 et la définition de l'épaisseur d'un graphe. Pour $h = 1$ et en tenant compte de la liste ci-dessus on obtient le théorème de Kuratowski. Pour $h \geq 3$ on peut remplacer conforme par isomorphe en vertu du théorème 3.

III. ETUDE DES GRAPHES h -MAXIMAUX

Propriété 1

Soit G un graphe t -maximal d'ordre n et une arête $a \in A_{K_n} - A_G$ alors le graphe $G \cup \{a\}$ contient un sous-graphe $(t + 1)$ -minimal.

En effet $G \cup \{a\}$ est d'épaisseur $t + 1$ d'après la définition d'un graphe t -max et en utilisant le théorème 2 la propriété énoncée est démontrée.

Propriété 2

Il existe un graphe G d'ordre n t -maximal si et seulement si

$$e(K_n) \geq t + 1.$$

Si G est t -max l'épaisseur d'un graphe partiel de G est inférieure ou égale à l'épaisseur de G or

$$e(G \cup \{a\}) = t + 1$$

quelle que soit l'arête a de $A_{K_n} - A_G$, et $G \cup \{a\}$ est graphe partiel de K_n . Si

$$e(K_n) = t + 1,$$

en supprimant des arêtes on peut obtenir un graphe partiel d'épaisseur t .

Si l'on ajoute un ensemble maximal d'arêtes en conservant l'épaisseur, on n'obtient pas K_n puisque $e(K_n) = t + 1$.

Propriété 3

Un graphe t -maximal a au moins $6t-2$ sommets (pour $t \geq 3$).

La propriété 2 entraîne que le nombre minimum de sommets d'un graphe t -maximal G est strictement supérieure au nombre maximum de sommets d'un graphe complet d'épaisseur t . Donc,

$$\begin{aligned} n_G &> \max \{ p \mid e(K_p) = t \} \\ &\geq \max \{ p \mid [(p + 7)/6] = t; p \neq 9, p \not\equiv 4 \pmod{6} \} \\ &\geq \max \{ p \mid [(p + 7)/6] < t + 1; p \neq 09, \not\equiv 4 \pmod{6} \} \\ &= \max \{ p \mid p \leq 6t - 1; p \neq 9, p \not\equiv 4 \pmod{6} \} \\ &= \max \{ p \mid p \leq 6t - 2; p \neq 9, p \not\equiv 4 \pmod{6} \} \\ &= 6t - 3. \end{aligned}$$

C'est-à-dire, $n_G \geq 6t - 2$.

Tout graphe 2-maximal a au moins 9 sommets puisque $e(K_8) = 2$. Comme l'épaisseur de K_9 est 3, d'après (III) il existe des graphes 2-maximaux d'ordre 9 qui ont d'ailleurs une structure particulière (voir la propriété 4).

On voit ainsi qu'un graphe t -maximal a au moins $6t - 3$ sommets pour $t \geq 1$.

Propriété 4

Les graphes 2-maximaux d'ordre 9 sont isomorphes à $K_9 - \{a\}$, $a \in A_{K_9}$.

K_9 étant 3-minimal, les graphes isomorphes à $K_9 - \{a\}$ sont bien 2-maximaux et ce sont les seuls, sinon, soit G d'ordre 9 2-maximal ayant au moins 2 arêtes de moins que K_9 , alors $G \subset K_9 - \{a\} - \{b\}$, donc K_9 n'est pas 3-minimal puisque $K_9 - \{a\}$ est 3-planaire.

Théorème II. — *Tout graphe d'ordre supérieur à 3 t -maximal est 3-connexe ($t \geq 1$).*

Démonstration :

Supposons G t -maximal et 2-connexe, G peut se décomposer $G = H \cup K$, avec :

$$\begin{cases} S_H \cap S_K = \{a, b\}, S_H \text{ et } S_K \neq \{a, b\}, \\ A_H \cap A_K = \emptyset \end{cases}$$

Considérons une t -décomposition planaire de $G = \{G_1 G_2 \dots G_t\}$ et les décompositions induites sur H et K , $H = \{H_1, H_2, \dots, H_t\}$, $K = \{K_1, K_2, \dots, K_t\}$. $S_{H_i} \cap S_{K_i} \subset \{a, b\}$, donc $H_i \cup K_i$ est un graphe au plus 2-connexes. On peut alors joindre un sommet de $H_i \notin \{a, b\}$ et un sommet de $K_i \notin \{a, b\}$ d'une manière planaire. En effet il existe $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ avec $S_{H_i} \neq \{a, b\}$ et $S_{K_i} \neq \{a, b\}$ car $(\exists j) S_{H_j} \neq \{a, b\}$ et $(\exists k) S_{K_k} \neq \{a, b\}$ sinon $\{a, b\}$ n'est pas un ensemble d'articulation.

Si $S_{K_i} = S_{H_k} = \emptyset$ on peut alors représenter planairement $H_j \cup K_k$ et $e(G) < t$.

Cette arête supplémentaire n'est pas élément de A_G sinon $\{a, b\}$ ne serait pas un ensemble d'articulation de G . Donc G n'est pas t -maximal.

Théorème III. — *Soit G un graphe d'ordre n t -maximal alors G admet une décomposition disjointe au sens des arêtes $G = (G', G'')$ avec :*

- (1) G' est $(t - 1)$ maximal et $S_{G'} = S_G$.
- (2) G'' est 1-maximal dans \bar{G}' complément de G' dans K_n . ($t \geq 2$)

Démonstration :

Considérons une t -décomposition planaire quelconque de $G = (G_1 G_2 \dots G_t)$.

Posons $G' = (G_1 G_2 \dots G_{t-1})$. Si $S_{G'} \neq S_G$, il existe $x \in S_G - S_{G'}$. Considérons une arête quelconque (xy) de G_t : on peut l'ajouter à G' sans augmenter son épaisseur puisque x est sommet pendant. On peut donc obtenir $G = (G', G'')$ $S_{G'} = S_G$, et G'' étant planaire. Si une arête a peut être ajoutée à G' sans augmenter son épaisseur, cela signifie que $a \in A_{G''}$, sinon G n'est pas t -maximal. On peut donc rendre $G'(t - 1)$ -maximal en lui ajoutant des arêtes de G'' . G'' reste donc planaire. D'autre part $G'' \subset \bar{G}'$ sinon G' et G'' auraient des arêtes communes. Si G'' n'est pas 1-maximal dans \bar{G}' cela signifie qu'on peut lui ajouter planairement une arête a mais alors $G \cup \{a\}$ est d'épaisseur t ce qui est absurde.

La réciproque du théorème III est fausse. En effet considérons le graphe $G = (G_1, G_2)$ (fig. 1).

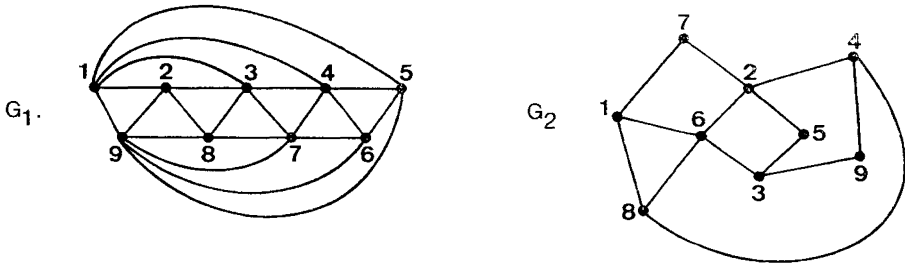


Figure 1

$$G = K_9 - (57)-(58)$$

donc G n'est pas 2-maximal bien que G_1 soit 1-maximal et qu'il soit impossible d'ajouter planairement (57) ou (58) à G_2 .

Propriété 5 : Soit G un graphe t -maximal d'ordre n . Alors si un sommet x est soit isolé, soit sur un arbre dans l'un des plans d'une t -décomposition planaire quelconque de G , son degré est égal à $n - 1 \cdot (t \geq 2)$.

En effet soit (G_1, G_2, \dots, G_t) une t -décomposition planaire de G . Si x est isolé ou sur un arbre de G_i (c'est-à-dire une composante connexe de G_i qui est un arbre) alors sur G_i on peut joindre planairement x à tous les autres sommets de G . Donc toutes ces arêtes sont éléments de A_G sinon G n'est pas t -maximal.

Propriété 6 : Si G est un graphe t -maximal d'ordre n ayant une t -décomposition planaire avec au moins $2t$ sommets isolés ou sur des arbres alors $m \geq (n + 1)t + t(4t - 5) (t \geq 2)$.

En effet si G a x sommets isolés ou sur des arbres, le graphe G se décompose en un graphe complet à x sommets tous les sommets étant reliés à tous les

autres sommets du graphe. Donc $m \geq \frac{x(x-1)}{2} + x(n-x)$, fonction qui est croissante en x quand $1 \leq x \leq n-1$. Or en posant $x = 2t$ on a :

$$\begin{aligned} t(2t-1) + 2t(n-2t) &= (n+1)t + nt - 2t^2 - 2t \\ &\geq (n+1)t + 6t^2 - 3t - 2t^2 - 2t \text{ car } n \geq 6t - 3. \end{aligned}$$

REMARQUE: *Le nombre de sommets isolés ou sur des arbres est très intéressant car c'est une borne inférieure pour le degré minimum du graphe.*

Soit $D = (G_1 G_2 \dots G_t)$ une t -décomposition planaire de G . On appellera D_s *décomposition saturée* de G obtenue à partir de D , la décomposition obtenue de la manière suivante :

On dispose sur $G_1 G_2 \dots G_{t-1}$ un ensemble maximal d'arêtes de G_i de telle sorte que $G'_1 G'_2 \dots G'_{t-1}$ ainsi obtenu reste d'épaisseur $t-1$ puis on recommence sur $G'_1 G'_2 \dots G'_{t-1}$ en saturant les $t-2$ premiers plans avec les arêtes de G'_{t-1} etc...

Propriété 7 : *Si $(G_1 G_2 \dots G_t)$ est une t -décomposition planaire saturée de G , graphe t -maximal, alors 2 composantes connexes, qui sont des arbres de G_i et G_j , sont disjointes au sens des sommets. (Ceci $\forall i$ et j) $\cdot (t \geq 2)$.*

En effet, supposons que le sommet $x \in S_{A_i}^k, A_i^k$ étant un arbre de G_i , apparaisse dans $S_{A_j}^l, A_j^l$ étant un arbre de G_j (avec $i > j$). Alors une des arêtes incidentes à x dans G_i peut être représentée planairement sur G_j donc la décomposition n'est pas saturée.

Théorème IV : *Si G est un graphe t -maximal d'ordre n , alors G admet une t -décomposition planaire sans sommet isolé et où tous les arbres sont disjointes 2 à 2 au sens des sommets, sinon le degré minimum de G est $\geq n - t + 2$.*

Démonstration :

Considérons une t -décomposition saturée de G . Tous les arbres sont disjointes 2 à 2 au sens des sommets d'après la propriété 7. Si le sommet x est isolé dans l'un des plans P nous dirons que nous pouvons « déplacer » l'arête (xy) du plan P' où elle se trouve sur P , si on peut supprimer (xy) de P' et la mettre sur P ceci sans créer de sommet isolé et en conservant les arbres disjointes 2 à 2 (au sens des sommets).

Supposons qu'il soit impossible de rendre x non isolé par de tels déplacements. Nous allons alors montrer que le degré minimum de G est : $d_{\min}(G) \geq n - t + 2$, ou plus exactement que le nombre de sommets de G de degré $n-1$ est $\geq n - t + 2$. Une fois que l'on a déplacé le maximum d'arêtes (xz) il reste l plans, $l \geq 1$, où x est isolé. p plans, $p \geq 1$, où le degré de x est ≥ 2 et k plans où le degré de x est 1 (voir fig. 2).

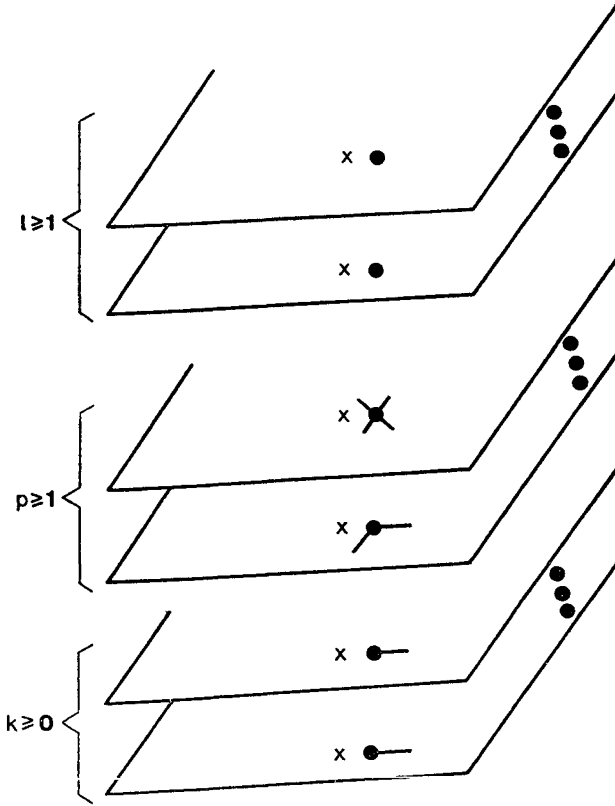


Figure 2

Considérons l'un des p plans Q où le degré de x est ≥ 2 , et soit y_i l'un des sommets adjacents à x dans Q .

(1) (xy_i) n'est pas un isthme.

(1.1) *En supprimant (xy_i) on crée un arbre.* Dans ce cas la composante connexe C de Q qui contient x a un seul cycle qui d'ailleurs contient (xy_i) . Donc on peut joindre planairement tout sommet de C planairement à tout sommet de G sur Q . Donc tous les sommets de C sont de degré $n - 1$.

(1.2) *On ne crée pas d'arbre en supprimant (xy_i) .* Puisqu'on ne peut pas déplacer (xy_i) sur l'un des plans où x est isolé, c'est que y_i est sur un arbre dans l'un de ces plans et x sur un arbre. Dans ce cas $d_G(y_i) = n - 1$.

(2) (xy_i) est un isthme.

Donc en supprimant (xy_i) on crée deux composantes connexes.

(2.1) *On crée un arbre qui contient y_i .* Dans ce cas, d'après la propriété 5 $d_G(y_i) = n - 1$ puisqu'on peut représenter planairement (xy_i) sur l'un des plans

où x est isolé. y_i est alors un sommet qui est un arbre dans une t -décomposition planaire de G .

(2.2) *On ne crée pas d'arbre contenant y_i .* Dans ce cas s'il est impossible de déplacer (xy_i) , c'est que y_i est sur un arbre dans l'un des plans où x est isolé, donc $d_G(y_i) = n - 1$. (Dans ce cas il ne peut y avoir qu'un plan où x est isolé sinon y_i apparaîtrait dans deux arbres ce qui est contraire aux hypothèses.)

Nous avons donc démontré que tous les sommets adjacents à x étaient de degré $n - 1$ dans G . Or ce nombre est $\geq n - 1 - k$ or $k \geq t - 2$ puisque $l \geq 1$ et $p \geq 1$ donc $\text{dmin}(G) \geq n - t + 2$ en effet

$$\text{dmin}(G) \geq n - 1 - k + 1 \geq n - k \geq n - t + 2.$$

Théorème V : *Tout graphe G t -maximal d'ordre n a un nombre d'arêtes $m \geq (n + 1)t$.*

Démonstration :

Si G n'admet pas de décomposition planaire sans sommet isolé et où tous les arbres sont disjoints 2 à 2 d'après le théorème IV :

$$m \geq \frac{n(n-t)}{2}$$

Dans le cas contraire soit $(G_1 G_2 \dots G_t)$ une décomposition planaire. On note $G'_i = G_i - \bigcup A_i^k$, A_i^k étant les composantes connexes de G_i qui sont des arbres. $m_{G'_i} - n_{G'_i} \geq 2$ sinon G est un graphe complet. En effet si $m_{G'_i} - n_{G'_i} < 2$ on peut joindre planairement sur G_i 2 sommets quelconques de G_i . Posons $n'_i = |S_{G_i} - S_{G'_i}|$ le nombre d'arêtes des arbres de G_i est $\geq \frac{n'_i}{2}$ et le nombre d'arêtes de $G'_i \geq n - n'_i + 2$ donc :

$$m_G \geq \sum_i \left(n + 2 - \frac{n'_i}{2} \right) = (n + 1)t + \left(t - \frac{\sum_i n'_i}{2} \right).$$

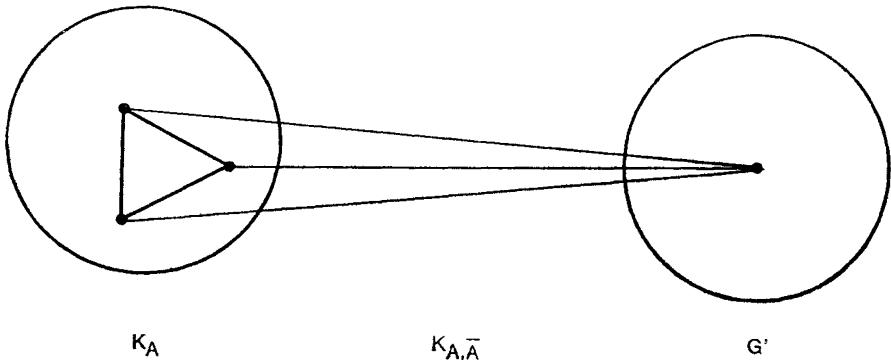


Figure 3

Si $2t \geq \sum_i n'_i$ le théorème est démontré.

Si $2t < \sum_i n'_i$ alors le graphe G a la structure suivante :

$G = K_A \cup K_{A,\bar{A}} \cup G'$ avec $|A| > 2t$ et d'après la propriété 6 le théorème est démontré (fig. 3).

Théorème VI. — *Le graphe G est t -maximal si et seulement si, pour toute t -décomposition planaire de $G = (G_1, G_2, \dots, G_t)$, la condition suivante est vérifiée pour $i = 1, 2, \dots, t$:*

Quel que soit $B \subset A_{G_i}$, avec $e(B \cup \{ \bigcup_{j \neq i} G_j \}) = t - 1$, les ensembles d'arête qui rendent G_i - B 1-maximal sont inclus dans $\bigcup_{j \neq i} A_{G_j}$.

Démonstration :

C'est une condition nécessaire. En effet supposons que l'on puisse rendre G_1 1-maximal, en enlevant des arêtes B que l'on peut ajouter à $\bigcup_{i=2}^t G_i$ en conservant l'épaisseur de ce graphe et en ajoutant l'ensemble d'arêtes A contenant $a \notin \bigcup_{i=2}^t A_{G_i}$. Ceci entraîne que $\{G_1 \cup A, G_2, \dots, G_t\}$, avec $G'_i = G_i - A + B_i$ et $B_i \subset B$, est d'épaisseur t or ce graphe c'est $G \cup \{a\}$ donc G n'est pas t -maximal.

Elle est suffisante en effet si on ajoute une arête $a \notin \bigcup_{i=1}^t A_{G_i}$ à G_i par exemple on rend G_i non planaire sinon a serait $\in \bigcup_{j \neq i} A_{G_j}$ donc $\in \bigcup_{j=1}^t A_{G_j}$.

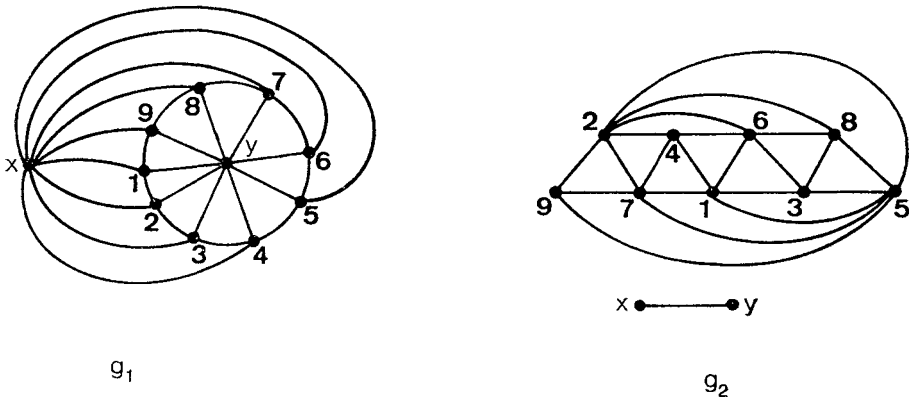


Figure 4

REMARQUE : La condition du théorème VI porte sur tous les ensembles B mais on peut ne la faire porter que sur les ensembles maximaux d'arêtes à enlever. Par exemple, considérons le graphe de la figure 4 : $G = g_1 \cup g_2$

g_1 est 1-max donc $g_1 \cup \{a\}$ est non planaire $\forall a \in A_{g_2}$

$g_2 \cup b$ est non planaire $\forall b \notin A_{g_1}$.

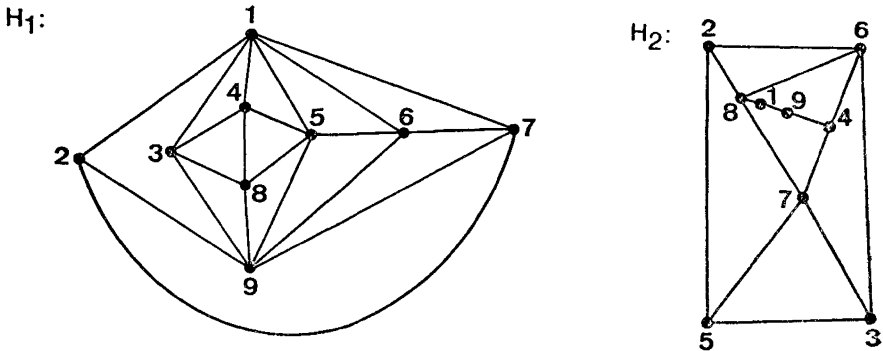
Cependant $g_1 \cup g_2$ n'est pas 2-maximal. En effet on peut mettre (x9) sur g_2 par exemple et ajouter (18) à g_1 .

Propriété 8 : Si H_1, H_2, \dots, H_t sont des graphes 1-maximaux d'ordre n , 2 à 2 disjoints au sens des arêtes, alors $G = \bigcup_{i=1}^t H_i$ est t -maximal.

Démonstration :

Le nombre d'arêtes de H_i est $3n - 6$ donc $A_G = t(3n - 6)$ ce qui entraîne (th. 1) $e(G) \geq \frac{t(3n - 6)}{3(n - 2)} = t$. Donc G est d'épaisseur t ; d'autre part G est t maximal, car si on pouvait lui ajouter une arête sans augmenter son épaisseur, l'un des graphes au moins, de toute décomposition, aurait plus de $3n - 6$ arêtes donc serait non poanaire. Toute décomposition planaire de G est un ensemble de t graphes 1-maximaux disjoints 2 à 2 au sens des arêtes.

La réciproque de cette propriété est fausse. En effet considérons une 2-décomposition planaire de $K_9 - a$ (fig. 5) :



$K_9 = H_1 \cup H_2 \cup (24)$

Figure 5

REMARQUES : 1) La propriété 8 permet d'envisager une méthode constructive pour étudier l'épaisseur des graphes complets. En effet s'il existe t graphes H_i 1-maximaux d'ordre n avec $A_{H_i} \cap A_{H_j} = \emptyset, \forall i \neq j$ alors l'épaisseur de K_n est $\geq t$.

2) La conjecture de Hobbs [6] : « les graphes K_{6t-7} sont t -minimaux pour $t \geq 5$ », est fausse.

En effet cette conjecture est équivalente à la proposition suivante : « les graphes $K_{6t-7} - \{a\}$ sont $(t-1)$ -maximaux, quel que soit $a \in A_{K_{6t-7}}$. » Or le théorème 1 dit que :

$$m \leq t(3n-6),$$

pour tout graphe d'épaisseur t ayant n sommets et m arêtes. En appliquant ce résultat à $K_{6t-7} - \{a\}$ on obtient :

$$\begin{aligned} (6t-7)(3t-3) - 1 &= 18t^2 - 39t + 20 \\ &\leq (t-1)(3(6t-7) - 6) = 18t - 45t^2 + 27 \end{aligned}$$

ce qui est absurde ($t \leq 5$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. BATTLE, F. HARARY, et Y. KODOMA, « *Every planar graph with nine points has a nonplanar complement* », Bull. Amer. Math. Soc., 68 (1962), 569-571.
- [2] L. W. BEINEKE, *The decomposition of complete graphs into planar subgraphs in « graph theory and theoretical physics »*. Edited by F. Harary Academic Press, 1967.
- [3] L. W. BEINEKE, *Complete bipartite graphs : decomposition into planar subgraphs in « A seminar on graph Theory »* (Harary ed.), Academic Press, N. Y., 1967.
- [4] L. W. BEINEKE et F. HARARY, « *The thickness of the complete graph* », Canad J. Math., 17, 1965, 850-859.
- [5] C. BERGE, *Théories de graphes et ses applications*, Dunod, 1958.
- [6] A. M. HOBBS et J. W. GROSSMAN, « *A class of thickness-minimal graphs* », Jnl Res. NBS (Math. Science), 72B, 2 (1968), 145-153.
- [7] A. M. HOBBS, *A Survey of Thickness*, in « *Recent Progress in Combinatorics* », (Tutte éd.), Acad. Press, N. Y., 1969.
- [8] O. ORE, *The four color problem*. Academic Press, 1967.
- [9] C. PICARD, « *Graphes complémentaires et graphes planaires* », Rev. Franç. Rech. Oper., 8 (1964), 329-343.
- [10] W. T. TUTTE, « *The thickness of a graph* », Indag. Math., 25, 1963, 567-577.
- [11] W. T. TUTTE, « *The nonbipartite character of the complete 9-graph* », Can. Math. Bull., 6 (1963), 319-330.