

J. LARISSE

**Comportement d'un processus de fabrication dans  
lequel interviennent des tests de contrôle**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge*, tome 4, n° R3 (1970), p. 91-105

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1970\\_\\_4\\_3\\_91\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_3_91_0)

© AFCET, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## COMPORTEMENT D'UN PROCESSUS DE FABRICATION DANS LEQUEL INTERVIENNENT DES TESTS DE CONTROLE

par J. LARISSE<sup>(1)</sup>

---

*Résumé. — On considère une usine de fabrication d'unités identiques entre elles, mais à cela près quelconques. Cette installation se compose d'une chaîne principale comportant les différentes étapes de la fabrication, après chacune desquelles intervient un test de contrôle, et de chaînes de recyclage pour les unités n'ayant pas satisfait à un de ces tests, ces unités étant, de plus, stockées avant d'être recyclées. On se propose d'étudier les grandeurs d'entrée, de sortie et la valeur du stock au cours du processus de fabrication.*

*Dans le paragraphe I on décrit le modèle mathématique, que l'on étudie ensuite dans II et III en appliquant la théorie des chaînes de Markov inhomogènes. Dans IV, on étend les résultats obtenus au cas, souvent vérifié en pratique, où les probabilités de rejet des unités varient, dans un certain sens, de manière arbitraire.*

### I. INTRODUCTION ET DESCRIPTION DU MODELE

Dans [5] on a étudié un processus de fabrication d'éléments combustibles pour un réacteur nucléaire. A différentes étapes de la fabrication ces éléments sont soumis à des tests de contrôle, les éléments défectueux étant emmagasinés avant d'être recyclés. Nous nous proposons, ici, de discuter un cas plus général correspondant à un fonctionnement qui pourrait être plus « économique » et nous donnons une réponse à un problème posé dans [5].

---

(1) Euratom, CETIS, CCR, Ispra.

Le modèle mathématique de l'installation envisagée est schématisé de la manière suivante (fig. I.1) :

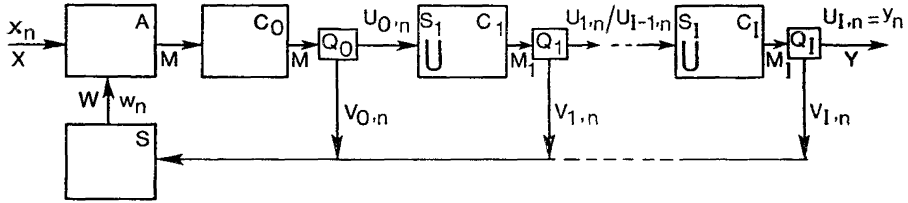


Figure 1

Ce système comprend différentes unités  $A, C_0, C_1 \dots C_I$ , qui représentent les différentes transformations, physiques ou chimiques, auxquelles est soumise la matière première. Après certaines de ces opérations, cette matière, sous forme d'éléments combustibles, est soumise aux tests de contrôle,  $Q_0, Q_1 \dots Q_I$ . Un élément satisfaisant au test passe au stade suivant de fabrication. Dans le cas contraire, il est stocké dans le magasin  $S$  avant d'être recyclé. D'autre part, les unités  $C_1, C_2 \dots C_I$  sont dotées de magasins  $S_1, S_2 \dots S_I$  où les éléments sont préalablement stockés avant d'être traités.

Le fonctionnement de l'ensemble du système est le suivant :

1) Après avoir introduit dans l'unité  $A$  par les entrées  $X$  et  $W$  une certaine quantité de matériel suivant une loi que nous précisons plus loin, l'unité  $A$  est mise en marche durant un intervalle de temps  $v_1$ . Dans l'intervalle successif de temps  $t_1$ , la matière traitée dans  $A$  est transférée dans  $C_0$  et  $A$  est de nouveau chargé.

2) Pendant le temps  $v_2$  les unités  $A$  et  $C_0$  fonctionnent simultanément. Dans l'intervalle de temps  $t_2$  la matière traitée en  $C_0$  est transférée en  $Q_0$ , la matière traitée en  $A$  est transférée en  $C_0$  et  $A$  est chargé.

3) Dans l'intervalle de temps  $v_3$ , les unités  $A$  et  $C_0$  fonctionnent simultanément, et en  $Q_0$  on procède à un test de contrôle. Dans l'intervalle successif de temps  $t_3$ , les éléments satisfaisants sont transférés dans le magasin  $S_1$ , les autres dans le magasin  $S$  et on procède comme précédemment au chargement de  $A$  et  $C_0$ .

La suite des opérations se déduit sans difficultés de 3). On chargera successivement  $Q_1, C_2, Q_2 \dots C_I, Q_I$  et on obtiendra ainsi au temps

$$\sum_{i=1}^{2I+3} (v_i + t_i)$$

les premiers éléments finis à la sortie  $Y$ . A partir de cet instant les opérations sont analogues entre elles.

On voit immédiatement, qu'en fait, le temps ne joue aucun rôle particulier. En effet, les  $v_i$  et  $t_i$  peuvent varier de manière arbitraire, seule compte la simul-

tanéité des opérations élémentaires. Pour cette raison, nous appellerons cycles de fabrication les différents processus décrits en 1), 2), etc. Nous indexerons au moyen de l'indice  $n$  entier positif, chacun de ces cycles. On peut alors vérifier aisément le schéma suivant :

Cycle	Unités et tests en opération
1	$A$
2	$A, C_0$
3	$A, C_0, Q_0$
4	$A, C_0, Q_0, C_1$
...	.....
$2I + 3$	$A, C_0, Q_0, C_1, Q_1 \dots C_I, Q_I$
...	.....
$n$	$A, C_0, Q_0 \dots C_I, Q_I$
...	.....

Décrivons maintenant le fonctionnement individuel de chaque unité.

1) Avant chaque cycle,  $A$  est chargé avec une quantité  $M$  de matière par les entrées  $X$  et  $W$ .  $M$  représente la capacité de l'unité  $A$ . On a donc

$$(I.1) \quad x_n + w_n = M \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1$$

2) L'unité  $C_0$  reçoit  $M$  et, après chaque cycle, la sortie est la même quantité  $M$  sous forme d'éléments sensiblement identiques. Pour cette raison, il est commode de choisir comme unité de mesure de  $M$  le nombre constant d'éléments fabriqués à chaque cycle. Nous désignerons par  $p_0$  la probabilité, que nous admettrons égale pour tous les cycles, qu'un élément satisfasse au test. On aura donc (fig. I.1)

$$(I.2) \quad \Pr(u_{0,n} = M - k) = \Pr(v_{0,n} = k) = \\ = \binom{M}{k} p_0^{M-k} q_0^k$$

$$0 < p_0 < 1 \quad ; \quad p_0 + q_0 = 1 \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, M$$

3) Chaque unité  $C_i, i = 1, 2 \dots I$  est doté d'un magasin  $S_i$ . Soient  $s_{i,n}, \bar{s}_{i,n}$  le nombre d'éléments présents dans le magasin  $S_i$  respectivement au début et à la fin du  $n$ -ième cycle. On a alors

$$(I.3) \quad s_{i,n} = \bar{s}_{i,n-1} + u_{i-1,n-1} \quad i = 1, 2 \dots I$$

D'autre part, soit  $M_i$  un entier positif associé à  $S_i$ . Si  $s_{i,n} \geq M_i$ , on traite la quantité  $M_i$ , autrement l'unité  $C_i$  ne fonctionne pas. Il suit alors que

$$(I.4) \quad \bar{s}_{i,n} = s_{i,n} \quad \text{si} \quad s_{i,n} < M_i \\ = s_{i,n} - M_i \quad \text{autrement}$$

Si  $p_i$  est la probabilité, égale pour tous les cycles, qu'un élément soit accepté au contrôle  $Q_i$ , on a

$$(I.5) \quad \Pr(u_{i,n} = M_i - k) = \Pr(v_{i,n} = k) = \binom{M_i}{k} p_i^{M_i-k} q_i^k$$

$$0 < p_i < 1 \quad ; \quad p_i + q_i = 1 \quad ; \quad k = 0, 1 \dots M_i \quad ;$$

$$i = 1, 2 \dots I$$

4) Enfin, si  $z_n$  est le stock dans  $S$  au début du  $n$ -ième cycle, pendant ce cycle  $z_n$  s'accroît de  $\sum_{i=0}^I v_{i,n}$  et on posera

$$(I.6) \quad \bar{z}_n = z_n + \sum_{i=0}^I v_{i,n}$$

A la fin de ce cycle, on extrait de  $S$  la quantité  $w_n$ , et on a

$$(I.7) \quad z_{n+1} = \bar{z}_n - w_n$$

D'autre part,  $w_n$  obéit à la règle suivante :

$$(I.8) \quad w_n = \xi M \quad \text{si} \quad \bar{z}_n - \xi M \geq 0$$

$$= \bar{z}_n \quad \text{autrement}$$

et  $0 < \xi \leq 1$ .

Les équations (I.6), (7) et (8) donnent

$$(I.9) \quad z_{n+1} = \text{Max} \left\{ 0; z_n + \sum_{i=0}^I v_{i,n} - \xi M \right\}, \quad n \geq 1$$

La règle de fonctionnement que nous avons explicitée au début du paragraphe, les équations (I.1) à (I.9) et les conditions initiales ( $n = 1$ ) déterminent entièrement le comportement du système  $S$ . Notre but est donc d'étudier les variables  $s_{i,n}$ ;  $\bar{s}_{i,n}$ ;  $z_n$ ;  $\bar{z}_n$ ;  $x_n$ ;  $y_n = u_{i,n}$  en fonction de  $n \geq 1$ .

Avant d'aborder cette étude on pourrait faire la remarque suivante : le système est défini à la fin du  $n$ -ième cycle par son état

$$\bar{S}_n = \{ \bar{s}_{i,n}; i = 1, 2 \dots I; z_{n+1} \}.$$

Or le passage de  $\bar{S}_n$  à  $\bar{S}_{n+1}$  est entièrement défini par les règles de fonctionnement et l'expérience aléatoire constituée par les  $I$  tests de contrôle. La suite  $\{ \bar{S}_n, n \geq 1 \}$  est donc une chaîne markovienne homogène sur un ensemble dénombrable d'états dont on pourrait décrire la matrice de transitions  $P$ . Les itérées  $P^n$  et la  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$  décrivent le comportement de  $S$ . Il est bien clair qu'une

approche aussi générale présentera de nombreuses difficultés analytiques. Pour cette raison, nous étudierons d'abord le comportement individuel des différentes unités et nous dégagerons les hypothèses suffisantes qui nous permettront d'obtenir des résultats analytiques aussi généraux que possible.

**II. FONCTIONNEMENT « CONTINU » DU MODELE**

Nous entendons par fonctionnement « continu », le fonctionnement du système en l'absence des magasins intermédiaires  $S_i, i = 1, 2 \dots I$ . Les équations décrivant la dynamique d'un tel système sont les mêmes que celles du paragraphe I, sauf les équations (I.3) et (I.4) qui n'apparaissent pas ici.

Posons  $F_n(z) = \Pr(z_n \leq z)$ , on a

$$\begin{aligned} F_{n+1}(z) &= \Pr(z_{n+1} = 0) + \Pr(0 < z_{n+1} \leq z) \\ &= \Pr\left(\sum_{i=0}^I v_{i,n} - \xi M + z_n \leq 0\right) + \Pr\left(0 < \sum_{i=0}^I v_{i,n} - \xi M + z_n \leq z\right) \\ &= \Pr\left(z_n + \sum_{i=0}^I v_{i,n} - \xi M \leq z\right) \\ &= \sum_{z_n + c_n \leq z} dF_n(z_n) g_n(c_n), \quad c_n = \sum_{i=0}^I v_{i,n} - \xi M \end{aligned}$$

(II.1)

$$F_{n+1}(z) = \sum_{c_n \leq z} F_n(z - c_n) g_n(c_n)$$

Les variables  $v_{i,n}, i = 0, 1 \dots I$  sont stochastiquement indépendantes et

$$\begin{aligned} \Pr(v_{i,n} = v_i) &= \binom{M}{v_i} (p_0 p_1 \dots p_i)^{M-v_i} (1 - p_0 p_1 \dots p_i)^{v_i} \\ i &= 0, 1 \dots I, \quad v_i = 0, 1 \dots M. \end{aligned}$$

Par conséquent, les variables  $c_n$  sont identiquement distribuées à partir du cycle  $n = 2I + 3$  et alors pour  $n \geq 2I + 3$  on a

$$\begin{aligned} \text{(II.2)} \quad g_n(c_n) = g(c) &= \Pr\left(\sum_{i=0}^I v_{i,n} = \xi M + c\right) \\ &= \sum \left\{ \prod_{i=0}^I \binom{M}{v_i} \left(\prod_{v=0}^i p_v\right)^{M-v_i} \left(1 - \prod_{v=0}^i p_v\right)^{v_i} \middle/ \sum_{\sum_{i=0}^I v_{i,n} = \xi M + c} \right\} \end{aligned}$$

Étant donnée la condition initiale  $F_1(z)$ , (II.1) permet de calculer les  $F_n, n \geq 1$ . A partir du cycle  $2I + 3$ , (II.1) n'est autre que l'équation de Lindley [8] et puisque  $F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z)$  est indépendant de  $F_1(z)$ , on a la

**Propriété II.1.**  $F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z)$  est une fonction de répartition non dégénérée si et seulement si

$$\text{(II.3)} \quad \bar{c} = \sum c g(c) = M \sum_{i=0}^I \left(1 - \prod_{v=0}^i p_v\right) - \xi M < 0$$

et  $F(z)$  est alors solution de

$$(II.4) \quad F(z) = \sum_{c \leq z} F(z - c)g(c).$$

En d'autres termes, si la condition (II.3) n'est pas vérifiée, alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = 0$  pour tout  $z$ , c'est-à-dire, qu'il est presque certain que le nombre d'éléments dans le magasin  $S$  sera supérieur, après un certain nombre fini de cycles, à toute valeur finie donnée à l'avance. Dans le cas contraire, la loi du stock tendra vers une loi bien définie, solution de (II.4). On peut trouver dans [8] un algorithme permettant de calculer  $F(z)$ . En particulier  $1/F(0)$  est le nombre moyen de cycles entre deux passages du stock par la valeur 0.

De la loi de  $z_n$ , on déduit  $\bar{z}_n$ ,  $x_n$ ,  $\omega_n$  pour tout  $n \geq 1$  au moyen des équations du paragraphe I.

### III. FONCTIONNEMENT « DISCONTINU » DU MODELE

Revenons maintenant au cas général de la figure I.1 dont la dynamique est décrite par les équations (I.1) à (I.9). Des équations (I.3) et (I.4) on tire

$$(III.1) \quad \begin{aligned} s_{i,n+1} &= s_{i,n} + u_{i-1,n} & \text{si } s_{i,n} < M_i \\ &= s_{i,n} + u_{i-1,n} - M_i & \text{autrement.} \end{aligned}$$

La suite  $\{s_{i,n}, n \geq 1\}$  est une chaîne markovienne. On vérifie qu'elle est apériodique et dans le cas  $i = 1$ , on sait [9], qu'elle est ergodique si et seulement si

$$(III.2) \quad MP_0 < M_1$$

Dans ce cas la variable  $s_{1,n}$  tend en loi pour  $n \rightarrow \infty$  vers une variable stochastique  $s_1$  de loi  $P_j = \Pr(S_1 = j)$ ,  $j = 0, 1, 2 \dots$  entièrement définie par

$$\begin{aligned} U(z) &= \sum_{j=0} P_j z^j = \frac{U_{M_1}(z)(z^{M_1} - 1)[1 + P_0(z - 1)]^M}{z^{M_1} - [1 + P_0(z - 1)]^M}; \\ U_{M_1}(z) &= \sum_{j=0}^{M_1-1} P_j z^j \end{aligned}$$

Autrement,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(s_{1,n} \leq j) = 0$  pour tout  $j$ . L'interprétation est analogue à celle du cas discuté dans le paragraphe précédent.

Nous remarquerons que la condition (III.2) fait intervenir  $p_0$ , paramètre qui peut varier pour la même installation d'une campagne de fabrication à une autre. Il se peut aussi que la valeur de  $p_0$  ne puisse être calculée qu'après

les premiers cycles de fabrication. Pour ces raisons nous supposons vérifiée la condition

$$(III.3) \quad M \leq M_1$$

qui implique (III.2) quel que soit  $p_0 < 1$ .

Avec cette hypothèse, de (I.3) et (I.4) on tire

$$(III.4) \quad \bar{s}_{1,n+1} = \bar{s}_{1,n} + u_{0,n} \pmod{M_1}$$

et le processus markovien apériodique  $\{\bar{s}_{1,n}\}$  devient une marche au hasard homogène sur le groupe cyclique d'ordre  $M_1$ . Mais alors, dans ce cas la distribution limite est la distribution uniforme [1], c'est-à-dire que

$$P_j = \frac{1}{M_1} \quad \text{pour } j = 0, 1 \dots M_1 - 1.$$

Pour décrire la loi du stock dans le magasin  $S_i$ ,  $i > 1$ , nous introduirons la variable aléatoire auxiliaire  $t_{i,n}$  égale à 1 si  $s_{i,n} \geq M_i$ , à 0 autrement. Dès lors, si  $u_i$  et  $v_i$  sont les variables binomiales

$$\Pr(u_i = M_i - k) = \Pr(v_i = k) = \binom{M_i}{k} p_i^{M_i - k} v_i^k$$

on aura

$$(III.5) \quad \begin{cases} u_{i,n} = t_{i,n} u_i \\ v_{i,n} = t_{i,n} v_i \end{cases}$$

La loi de  $t_{i,n}$  dépendant du paramètre  $n$ , la chaîne markovienne apériodique  $\{s_{i,n}; n \geq 1; i \neq 1\}$  est inhomogène. Nous nous limiterons pour la suite au cas où est vérifiée la condition

$$(III.6) \quad M_{i-1} \leq M_i, \quad i = 2, 3 \dots I,$$

afin d'éviter que les paramètres  $p_i$ , éventuellement inconnus *a priori* dans les applications pratiques n'interviennent dans les conditions d'ergodicité. De plus, nous obtiendrons des résultats intéressants dans ce cas. L'équation (III.4) est alors valable pour chaque  $S_i$ , c'est-à-dire que

$$(III.7) \quad \bar{s}_{i,n+1} = \bar{s}_{i,n} + t_{i-1,n} u_{i-1} \pmod{M_i}, \quad i = 2, 3 \dots I$$

Considérons alors le cas  $i = 2$  et soit  $P_k$  la matrice de transitions au  $k$ -ième pas. On vérifie aisément que les  $P_k$  ont le même support. En effet, on a

$$\begin{aligned} \|P_k\|_{jj'} = 0 &\Leftrightarrow j' - j > M_1 && \text{si } j' > j \\ & && j - j' < M_2 - M_1 && \text{si } j > j' \end{aligned}$$

et ceci pour tout  $k \geq 1$ .



On peut alors montrer en appliquant le résultat de [10] que

REMARQUE III.1.  $Q = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N P_k$  est la matrice uniforme :

$$\|Q\|_{jj'} = \frac{1}{M_2}$$

Dans notre cas particulier, une démonstration plus directe est possible. On est, en effet, assuré qu'à partir d'un  $N$  fini  $Q_N = P_1 P_2 \dots P_N$  aura tous ses éléments positifs. D'autre part, puisque chaque  $P_k$  est bistochastique, il en est de même de tout produit de telles matrices et, par conséquent,  $\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N$  appartient à l'idéal minimum complètement simple  $I$  du demi-groupe compact  $S$  des matrices finies bistochastiques et irréductibles [3]. Or toute matrice finie, irréductible, dont toutes les lignes sont identiques est idempotente.

Si  $\mathcal{M}$  est l'ensemble de ces matrices,  $\mathcal{M} \cap S$  se réduit à la matrice  $Q$  dont tous les éléments sont égaux à  $\frac{1}{M_2}$ . Or  $Q$  est évidemment sous-demi-groupe simple de  $S$ ,  $Q$  est aussi idéal de  $S$ , puisque  $SQS = Q$ , donc  $Q = I$  et par conséquent  $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N P_k = Q$ .

REMARQUE III.2

La variable  $t_{1,n}$  tend en loi vers la variable  $t_1$  définie par

$$(III.8) \quad \Pr(t_1 = 0) = 1 - \Pr(t_1 = 1) = \Pr(s_1 < M_1) \\ = \frac{1}{M_1} \sum_{r=0}^{M_1-1} (M_1 - v) \Pr(u_0 = v)$$

Si  $M = M_1$ , (III.8) donne

$$(III.9) \quad \Pr(t_1 = 0) = q_0 \quad \text{donc} \quad \Pr(t_1 = 1) = \bar{t}_1 = p_1.$$

En effet, puisque  $\bar{c}_{1,n}$  tend en loi vers  $\bar{s}_1$ ,  $s_{1,n}$  tend en loi vers  $s_1 = \bar{s}_1 + u_0$  [2]. De  $\bar{s}_1$  uniformément distribué sur  $[0; M_1 - 1]$ , on déduit par un calcul direct (III.8) et (III.9).

REMARQUE III.3

$P = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k$  est défini par la loi de  $t_1 u_1$ .

Cela résulte de la convergence légale  $t_{1,n} u_1$  vers  $t_1 u_1$  et de (III.7).

Pour  $i > 2$  et sous la condition  $M_{i-1} \leq M_i$ , on voit de (III.7) que l'étude

des stocks  $S_i$  est analogue à celle de  $S_2$ . Les deux remarques précédentes valent encore dans ces cas et les équations (III.8) et (9) s'écrivent alors :

(III.10)

$$\Pr(t_i = 0) = 1 - \Pr(t_i = 1) = \frac{1}{M_i} \sum_{\gamma=0}^{M_i-1} (M_{i-1} - \gamma) \Pr(t_{i-1} u_{i-1} = \gamma),$$

(III.11)

$$\Pr(t_i = 1) = \bar{t}_i = \prod_{k=0}^{i-1} P_k \quad \text{dans le cas} \quad M = M_1 = \dots M_i.$$

Passons maintenant à l'étude de la loi du stock dans le magasin  $S$ . On a

$$c'_n = \sum_{i=0}^I v_{i,n} = v_{0,n} + \sum_{i=1}^I t_{i,n} v_i$$

Puisque les  $t_{i,n}$  tendant en loi vers les  $t_i$ ,  $c'_n$  tend en loi vers

$$(III.12) \quad c' = v_0 + \sum_{i=1}^I t_i v_i \quad [2].$$

D'autre part, puisque  $c'_n$  est stochastiquement indépendant de  $z_n$  on a, comme dans le paragraphe précédent, l'équation

$$(III.13) \quad F_{n+1}(z) = \sum_{c_n \leq z} F_n(z - c_n) g_n(c_n), \quad c_n = c'_n - \xi M.$$

Puisque  $g_n(c_n) = 0$  pour  $c_n \notin [-\xi M; M + M_1 + \dots + M_I - \xi M]$ , la convergence de  $g_n$  vers  $g$  est uniforme, à chaque  $\varepsilon > 0$  est donc associé  $n(\varepsilon)$  tel que

$$|g_n(c) - g(c)| < \varepsilon \text{ pour tout } c = c' - \xi M, \text{ dès que } n > n(\varepsilon).$$

Posons alors

$$G_{n_0+p+1}(z) = \sum_{c \leq z} G_{n_0+p}(z - c) g(c)$$

$$F_{n_0+p+1}(z) \equiv \sum_{c \leq z} F_{n_0+p}(z - c) g_{n_0+p}(c)$$

avec

$$G_{n_0}(z) \equiv F_{n_0}(z),$$

on en tire

$$(III.14) \quad |F_{n_0+p+1}(z) - G_{n_0+p+1}(z)| \leq \left( M + \sum_{i=1}^I M_i + 1 \right) \sum_{i=n_0}^{n_0+p} \varepsilon_i.$$

Nous dirons d'autre part, d'une suite  $\{a_n\}$ ,  $n = 1, 2 \dots$  qu'elle converge géométriquement vers sa limite  $a$  s'il existe des constantes  $A > 0$  et  $\rho$ ,  $0 < \rho < 1$ , telles que

$$|a_n - a| \leq A \rho^n \quad \text{pour tout } n \geq n_0 \text{ fini.}$$

## REMARQUE III.4

Si les suites  $\{a_n\}$  et  $\{b_n\}$  convergent géométriquement vers les limites  $a$  et  $b$  respectivement, alors les suites  $\{a_n + b_n\}$  et  $\{a_n b_n\}$  convergent géométriquement vers les limites  $\{a + b\}$  et  $\{ab\}$  respectivement.

En effet, de  $|a_n - a| \leq A\rho_1^n$  et  $|b_n - b| \leq B\rho_2^n$  on tire  
 $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq 2 \text{Max}(A, B) \{ \text{Max}(\rho_1, \rho_2) \}^n$ .

D'autre part, à partir d'un certain  $n$  suffisamment grand, on aura

$$0 < (a - A\rho_1^n)(b - B\rho_2^n) \leq a_n b_n \leq (a + A\rho_1^n)(b + B\rho_2^n)$$

d'où

$$|a_n b_n - ab| \leq 3 \text{Max}(Ab, Ba, AB) \{ \text{Max}(\rho_1, \rho_2) \}^n.$$

## REMARQUE III.5

La convergence de  $\text{Pr}(\bar{s}_{i,n} = \bar{s}_i)$ ,  $i = 1, 2 \dots I$  vers sa limite  $\frac{1}{M_i}$  est géométrique. De plus, on peut choisir  $A$  et  $\rho$  communs pour les suites  $\{ \text{Pr}(\bar{s}_{i,n} = \bar{s}_i), n \geq 1 \}$ ,  $\bar{s}_i = 0, 1, 2 \dots M_i - 1$ .

On sait [4] que ceci est vrai pour  $i = 1$ . Pour justifier la remarque dans le cas  $i \geq 2$ , nous développerons une démonstration analogue à celle de [4] en utilisant le fait que les matrices de transitions des chaînes  $\{\bar{s}_{i,n}\}$  sont finies, bistochastiques et tendent vers une matrice bien définie, remarque (III.3) appliquée à  $i \geq 2$ .

Soit  $P$  une matrice finie, bistochastique à éléments positifs,  $\epsilon$  le plus petit de ces éléments,  $x$  un vecteur ligne ayant une composante maximum  $M_0$  et une composante minimum  $m'_0$ . Soient  $M'_1$  et  $m'_1$  les composantes maximum et minimum de  $xP$ , on vérifie que

$$(III.15) \quad M'_1 \leq M'_0 \quad ; \quad m'_0 \leq m'_1 \\ M'_1 - m'_1 \leq (1 - 2\epsilon)(M'_0 - m'_0)$$

Introduisant alors le vecteur ligne  $\rho_j$  de composantes nulles sauf la  $j$ -ème égale à  $+1$ ,  $M'_k$  et  $m'_k$  le maximum et le minimum des composantes du vecteur ligne  $\rho_j \prod_{k=1}^j P_k$ , où les  $P_k$  sont des matrices carrées, bistochastiques, du même ordre, et  $\epsilon_k$  l'élément minimum de  $P_k$ ; de  $\rho_j \prod_{k=1}^j P_k = \rho_j \prod_{k=1}^{j-1} P_k \cdot P_j$ , on déduit par application de (III.15)

$$(III.17) \quad M'_k \leq M'_{k-1} \dots \leq M'_1 \quad m'_1 \leq m'_2 \dots \leq m'_k \\ d_k = M'_k - m'_k \leq (1 - 2\epsilon_{k-1})(M'_{k-1} - m'_{k-1}) \leq \prod_{k=1}^K (1 - 2\epsilon_k)$$

Pour un  $\nu$  fini, tout mot de longueur supérieure ou égale à  $\nu$  a ses éléments positifs. Soit  $\varepsilon_{\nu k} > 0$  l'élément minimum d'un mot  $P_{k+1} \dots P_{k+\nu}$ . Lorsque  $k \rightarrow \infty$  on sait, d'après la remarque (III.3) appliquée à chaque  $i$ , que  $P_k$  tend vers une matrice bien définie. Il en est de même de la matrice  $P_{k+1} \dots P_{k+\nu}$ . Soit  $c = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_{\nu k} < 1$ . On peut choisir  $l_0$  tel que pour tout  $k \geq l_0 - \nu$  on

ait  $|\varepsilon_{\nu k} - c| < \frac{c}{2}$ , donc  $\frac{c}{2} < \varepsilon_{\nu k}$ . On a, d'une part,

$$\begin{aligned} d_{l_0} &\leq \prod_{k=1}^{l_0-\nu} (1 - 2\varepsilon_{\nu k})(1 - c)^{l_0 - (l_0 - \nu)} \\ &= \prod_{k=1}^{l_0-\nu} \frac{(1 - 2\varepsilon_{\nu k})}{(1 - c)^{l_0 - \nu + 1}} [(1 - c)^{\frac{1}{\nu}}]^{l_0} \end{aligned}$$

d'autre part, pour  $0 \leq n_1 \leq \nu$ , et puisque la suite  $d_k$  est non croissante

$$\begin{aligned} d_{l_0 + n_1} &\leq \prod_{k=1}^{l_0-\nu} (1 - 2\varepsilon_{\nu k})(1 - c)^{l_0 + \nu} \leq \prod_{k=1}^{l_0-\nu} \frac{(1 - 2\varepsilon_{\nu k})}{(1 - c)^{l_0 - \nu}} [(1 - c)^{\frac{1}{\nu}}]^{(l_0 + n_1) - n_1} \\ &\leq \prod_{k=1}^{l_0-\nu} \frac{(1 - 2\varepsilon_{\nu k})}{(1 - c)^{l_0 - \nu + 1}} [(1 - c)^{\frac{1}{\nu}}]^{l_0 + n_1} \end{aligned}$$

et la remarque est vérifiée si on pose

$$A = \sum_{k=1}^{l_0-\nu} (1 - 2\varepsilon_{\nu k}) / (1 - c)^{l_0 - \nu + 1} \quad ; \quad \rho = (1 - c)^{\frac{1}{\nu}}$$

REMARQUE III.6

La convergence de  $t_{i,n}$  vers sa limite  $t_i$  est géométrique. Il en est de même de la convergence  $c_n \rightarrow c$ .

En effet  $\bar{s}_{1,n} \rightarrow \bar{s}_1$  géométriquement donc  $s_{1,n} \rightarrow s_1$  géométriquement d'après (I.3) et la remarque (III.4). D'après cette même remarque et la définition de  $t_{1,n}$  on voit que  $t_{1,n}$  tend géométriquement vers  $t_1$ . De (I.3) et des remarques (III.4) et (III.5) on déduit la convergence géométrique de  $s_{2,n}$ , puis celle de  $t_{2,n}$  et de proche en proche celle de tous les  $t_{i,n}$ ,  $i = 1, 2 \dots I$ . Enfin, de la définition de  $c_n$  et des mêmes remarques, on tire la convergence géométrique de  $c_n$  vers  $c$ .

Il existe donc les constantes  $A$  et  $\rho$ ,  $0 < \rho < 1$  telles que  $\varepsilon_i = A\rho^i$  dans (III.14). Cette inégalité devient alors

$$(III.18) \quad |F_{n_0+p+1}(z) - G_{n_0+p+1}(z)| \leq \left( M + \sum_{i=1}^I M_i + 1 \right) A\rho^{n_0} \frac{1 - \rho^{p+1}}{1 - \rho}$$

On peut donc choisir  $n_0$  de manière à ce que

$$|F_{n_0+p+1}(z) - G_{n_0+p+1}(z)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } p \geq 1.$$

Puisque  $G(z) = \lim_{p \rightarrow \infty} G_{n_0+p+1}(z)$  ne dépend pas de  $G_{n_0}(z)$  [8], on en déduit que  $G(z) = \lim_{p \rightarrow \infty} F_{n_0+p+1}(z)$ .

Maintenant de (III.12) on a

$$\bar{c} = M_{q_0} + M_1 \bar{r}_1 q_1 + \dots M_I \bar{r}_I q_I - \xi M,$$

ce qui donne, si  $M = M_1 = \dots M_I$ ,

$$\begin{aligned} \bar{c} &= M(q_0 + p_0 q_1 + p_0 p_1 q_2 + \dots p_0 \dots p_{I-1} q_I - \xi) \\ &= M \left( 1 - \prod_{i=1}^I p_i - \xi \right). \end{aligned}$$

Et on peut énoncer la

### Propriété III.1

Sous la condition  $M \leq M_1 \leq M_2 \dots \leq M_I$ , les valeurs des stocks dans les magasins  $S_i$  tendent vers les lois uniformément distribuées sur  $[0, M_i - 1]$  respectivement, et la valeur du stock dans  $S$  tend vers une loi non-dégénérée si et seulement si

$$(III.19) \quad M(q_0 - \xi) + \sum_{i=1}^I M_i \bar{r}_i q_i < 0.$$

Dans ce cas la loi limite est solution de

$$(III.20) \quad F(z) = \sum_{z \leq c} F(z - c) g(c)$$

Si  $M = M_1 = \dots M_I$ , la condition (III.19) devient

$$(III.21) \quad \prod_{i=1}^I p_i > 1 - \xi$$

## IV. STABILITE STOCHASTIQUE

Remarquons, enfin, pour terminer cet exposé, une propriété qui pourrait être utile dans certains cas pratiques. Nous avons supposé que les paramètres  $\xi$  et  $p_i$ , ont les mêmes valeurs constantes pour tous les cycles. Cette hypothèse peut, quelquefois, se révéler trop restrictive. Nous allons montrer que, sous certaines conditions, le système II peut, dans un sens que nous préciserons, être « stochastiquement stable ».

En effet, supposons qu'il existe des valeurs  $p_{i,\min}, p_{i,\max}, \xi_{\min}$  et  $\xi_{\max}$  telles que  $p_{i,n}$  et  $\xi_n$  se référant au cycle  $n$ , on ait

$$(IV.1) \quad 0 < p_{i,\min} \leq p_{i,n} \leq p_{i,\max} \leq 1$$

$$(IV.2) \quad 0 < \xi_{\min} \leq \xi_n \leq \xi_{\max}, \text{ pour tout } n \geq 1, \text{ et } i = 0, 1, 2, \dots I.$$

De l'étude du paragraphe II, on déduit que

$$dG(l_n) = \sum_{c_n = \sum_{i=0}^{i'} v_{i,n} - \xi M \leq l_n} g_n(c_n) = \sum_{\sum_{i=0}^{i'} v_{i,n} \leq l_n + \xi M} \prod_{i=0}^{i'} \binom{M}{v_i} \tilde{p}_i^{M-v_i} q_i^{-v_i},$$

où 
$$\tilde{p}_i = \prod_{v=0}^i p_v, \quad \tilde{q}_i = 1 - \tilde{p}_i,$$

et on vérifie que pour  $n \leq 2I + 3$ , à chaque  $i'$  correspondent les  $n$  tels que  $n = 3 + 2i'$  et  $n = 4 + 2i'$ .

Si

$$\Phi(r; p) = \sum_{j=0}^r \binom{M}{j} p^{M-j} q^j,$$

on aura alors

(IV.3) 
$$dG(l_n, \{\tilde{p}_i\}) = \sum_{\sum_{i=0}^{i'} r_{i,n} \leq l_n + \xi M} \cdot \prod_{i=0}^{i'} \Phi(r_{i,n}; \tilde{p}_i)$$

Or

$$\Phi'_p(r, p) = \sum_{j=1}^r \binom{M}{j} p^{M-j-1} q^{j-1} (Mq - j) + Mp^{M-1}$$

Si  $Mq \geq r$ , on aura  $\Phi'_p(r, p) > 0$ , et si  $Mq < r$ , on voit que

$$\Phi'_p(r, p) > \sum_{j=1}^M \frac{1}{pq} \binom{M}{j} p^{M-j} q^j (Mq - j) + Mp^{M-1} = 0$$

Donc  $\Phi'_p(r, p) > 0$  pour tout  $p$ ,  $0 < p < 1$ , ce qui entraîne

(IV.4) 
$$dG(l_n, \{\tilde{p}_i\}) \leq dG(l_n, \{\tilde{p}'_i\})$$

pour  $p_i \leq p'_i, i = 0, 1, 2 \dots I$ .

D'autre part, il est évident que

(IV.5) 
$$dG(\xi, l_n) \leq dG(\xi', l_n) \quad \text{si} \quad \xi \leq \xi'.$$

De l'expression [8]

$$F_{r+1}(z) = \int_{c_r \leq z} \dots \int_{c_1 \leq z - c_2 - \dots - c_{r-1}} dG(\xi_1, c_1) \dots dG(\xi_r, c_r)$$

on obtient, en tenant compte des relations (IV.1) à (5), et en désignant par  $F_r(z, \min), F_r(z), F_r(z, \text{Max})$  les fonctions de répartition de la variable  $z$  correspondant aux chaînes markoviennes dont les paramètres sont respectivement  $\{p_{i,\min}, \xi_{\min}\}, \{p_{i,n}, \xi_n\}, \{p_{i,\text{Max}}, \xi_{\text{Max}}\}$ ,

(IV.6) 
$$F_{r+1}(z, \min) \leq F_{r+1}(z) \leq F_{r+1}(z, \text{Max}).$$

Dès lors, la condition

$$(IV.7) \quad \sum_{i=0}^I \left( 1 - \prod_{v=0}^i p_{v,\min} \right) < \xi_{\min},$$

qui entraîne évidemment

$$\sum_{i=0}^I \left( 1 - \prod_{v=0}^i p_{v,\max} \right) < \xi_{\max}$$

suffit pour assurer l'existence des fonctions limites de répartition non-dégénérées  $F(z, \min)$  et  $F(z, \max)$  dans le cas II. Par conséquent, la valeur du stock  $z_n$  est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est bornée inférieurement et supérieurement par deux fonctions de répartition bien définies et non-dégénérées. Dans ce sens, on peut dire que le système est « stochastiquement stable ». Signalons enfin qu'on peut établir dans le cas III, une condition suffisante sur les paramètres  $M_i$  et  $p_i$  entraînant une propriété analogue. Nous reviendrons sur ces développements dans un prochain travail.

## CONCLUSIONS

Nous avons étudié le comportement d'un processus de fabrication dans lequel interviennent des tests de contrôle. On pourrait, évidemment reprendre la même étude avec une loi différente pour le magasin  $S$ , par exemple, une loi identique à celle des magasins intermédiaires  $S_i$ . On peut voir que dans ce cas, la propriété de « stabilité stochastique » existe encore. D'autre part, les résultats connus sur les chaînes de Markov inhomogènes permettent d'envisager des règles bien moins simples que celles que nous avons décrites. La convergence géométrique existe aussi dans le cas de chaînes sur un nombre dénombrable d'états, ce qui entraîne que la restriction à (III.3) de la condition (III.2) n'est pas essentielle pour l'obtention de résultats analytiques.

D'autre part, les résultats ainsi obtenus peuvent être utilisés pour calculer les différents paramètres de manière à atteindre un comportement optimal, suivant l'objectif que l'on se fixe. Dans un projet d'automatisation de la fabrication, il serait intéressant de mettre à profit les propriétés de stabilité du système pour le réglage de l'appareillage. Dans certains cas il y a des pertes de matières aux différentes étapes de la fabrication et les variables à contrôler ne sont pas simplement les éléments fabriqués mais des quantités qui ne peuvent être connues qu'avec une erreur statistique non-négligeable. On trouvera dans [6] et [7] l'exemple du contrôle de la matière fissile dans une usine de fabrication d'éléments combustibles et le résultat de tests statistiques appliqués à un cas réel pour juger de la validité des hypothèses mathématiques du modèle.

