REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

MICHEL SAINT-ANDRÉ

# Brèves communications. Détermination d'un vecteur optimal pour le calcul d'intégrales

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge*, tome 5, nº R2 (1971), p. 141-149

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_2_141_0>

R.I.R.O.
(5[e] année, R-2, 1971, p. 141-149)

# DÉTERMINATION D'UN VECTEUR OPTIMAL POUR LE CALCUL D'INTÉGRALES
## (simples ou multiples)

par Michel SAINT-ANDRÉ

Sommaire. — *Pour calculer l'intégrale définie d'une fonction continue, je propose de déterminer un vecteur optimal* $\bar{\alpha}_0 \in \mathbf{R}^n$ *minimisant le coût de calcul de :* $S_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k\bar{\alpha}_0)$ *approchant :* $\mathfrak{I} = \int_{[0,1]^n} f(\bar{x})\, d\bar{x}$ *à* $\varepsilon$ *près.*

*Si on suppose la fonction f transformée au préalable en une fonction prolongeable par périodicité en une fonction continue sur* $\mathbf{R}^n$ *(comme je l'ai déjà exposé dans* [4] *pages 53-54 et rappelé dans* [5]*), on effectue ainsi un « balayage » de l'hypercube fondamental de* $\mathbf{R}^n$ *suivant des segments de droites parallèles.*

## A. CALCUL APPROCHE D'UNE INTEGRALE DEFINIE

Considérons une fonction $f$ continue, périodique sur $\mathbf{R}^n$ de période : $t_j = 1$ par rapport à chaque variable $x_j$, pour : $j = 1, 2, \ldots n$.

Rappelons le résultat suivant (établi dans [4], page 14).

**Théorème**

(i) Si $f$ est une fonction continue, périodique sur $\mathbf{R}^n$, représentable par sa série de Fourier $S_f(\bar{x})$ en tout point $\bar{x} \in [0, 1]^n$ :

$$S_f(\bar{x}) = c_{\bar{0}} + \sum_{\bar{p} \in S} c_{\bar{p}} e^{2i\pi<\bar{p},\bar{x}>}$$

où :

$$S = \{\bar{p} \in \mathbf{Z}^n - \{\bar{0}\}\,;\, c_{\bar{p}} \neq 0\}$$

(1) Département de mathématiques, Fac. des Sciences, Université de Sherbrooke, Canada (équipe de recherche associée au C.N.R.S., n° 3, Clermont-Ferrand).

(ii) Si $S_f(\bar{x})$ est une série normalement convergente.

(iii) Si : $\eta_{\mathcal{S}}(\bar{\alpha}) > 0$ avec : $\eta_{\mathcal{S}}(\bar{\alpha}) = \underset{\bar{p} \in \mathcal{S}}{\text{Min}} \left|1 - e^{2i\pi<\bar{p},\bar{\alpha}>}\right|$

où : $\mathcal{S} = \{ \bar{p} \in S ; \|\bar{p}\| = \underset{j=1,2,\ldots,n}{\text{Max}} |p_j| \leqslant R \}$.

Alors l'erreur $I_N$ d'ordre $N$ commise en remplaçant $\mathfrak{I}$ par $S_N$ est telle que :

$$|I_N| = |\mathfrak{I} - S_N| \leqslant \frac{K}{N} + \rho(R)$$

où :

$$K = \frac{2}{\eta_{\mathcal{S}}(\alpha)} \cdot \sum_{\bar{p} \in \mathcal{S}} |c_{\bar{p}}| \quad \text{et} \quad \rho(R) = \sum_{\bar{p} \in \mathfrak{R}} |c_{\bar{p}}|$$

avec :

$$\mathfrak{R} = \{ \bar{p} \in S ; \|\bar{p}\| \geqslant R + 1 \} = \complement_S \mathcal{S}$$

Remarques

1. Pour satisfaire les hypothèses (i) et (ii) il suffit par exemple que la fonction $f$ soit continue, périodique sur $\mathbf{R}^n$ et admette une dérivée partielle $n^e$ mixte : $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$ continue sur $[0, 1]^n$.

2. Si $f$ est un polynôme trigonométrique, il suffit que $\langle \bar{p}, \bar{\alpha} \rangle = \sum_{j=1}^{n} p_j \alpha_j$ ne soit jamais entier relatif pour tout $\bar{p} \in S$ pour assurer que : $\eta_{\mathcal{S}}(\bar{\alpha}) > 0$ et dans ce cas particulier on a :

$$|I_N| \leqslant \frac{K}{N} \quad (R = \underset{\bar{p} \in S}{\text{Max}} \|\bar{p}\|)$$

Nous verrons au paragraphe suivant que l'erreur de méthode est nulle pour tout polynôme trigonométrique.

3. Tous les résultats énoncés ci-dessus sont applicables au calcul de la moyenne d'une fonction presque-périodique au sens de Bohr (l'hypothèse (i) est alors toujours satisfaite) et dans ce cas il suffit de remplacer : $\eta_{\mathcal{S}}(\bar{\alpha})$ par :

$$\eta'_{\mathcal{S}}(\bar{\alpha}) = \underset{\bar{p} \in \mathcal{S}}{\text{Min}} \left|1 - e^{2i\pi < \lambda_{\bar{p}}, \bar{\alpha} >}\right|$$

où les $\lambda_{\bar{p}} = (\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \ldots, \lambda_{p_n})$ sont les vecteurs pseudo-périodes de la fonction considérée.

*Conséquence :*

Pour calculer l'intégrale définie $\mathfrak{I}$ à $\varepsilon$ près d'une fonction représentable par une série de Fourier normalement convergente, il suffit de déterminer le rang $R$ tel que :

$$\rho(R) = \sum_{\|\bar{p}\| \geqslant R+1} |c_{\bar{p}}| \leqslant \varepsilon'' < \varepsilon$$

puis de choisir un $\bar{\alpha}$ appartenant à $\mathbf{R}^n$ tel que $\eta_{\mathcal{S}}(\bar{\alpha})$ soit strictement positif.

Le nombre $N$ de termes de la somme partielle $S_N$ sera au moins égal à

$$N_0 = \left[2\left(\sum_{\bar{p}\in\mathcal{S}} |c_{\bar{p}}|\right)(\varepsilon' \cdot \eta_{\mathcal{S}}(\bar{\alpha}))^{-1}\right] + 1 \text{ avec : } \varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon'', \text{ et par suite :}$$

$$|I_N| \leqslant \frac{K}{N} + \rho(R) \leqslant \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon.$$

N.B. Dans [4], pages 33-39 et pages 56-63 à l'aide des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Bessel-Parseval je donne des majorations de : $\Sigma = \sum_{\bar{p}\in\mathcal{S}} |c_{\bar{p}}|$ et de $\rho(R)$ évitant le calcul des $c_{\bar{p}}$ (calcul *a priori* plus difficile que celui de $\mathfrak{J} = c_{\bar{0}}$) et ne faisant intervenir que les dérivées partielles de la fonction considérée.

## B. REDUCTION DU COUT DE CALCUL

Le calcul de $S_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(k\bar{\alpha})$ se réduit au calcul de $S_M = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} f(k\bar{\alpha})$ si $\bar{\alpha}$ est à composantes rationnelles ($\alpha_j = \frac{P_j}{Q_j}$ irréductible pour $j = 1, 2, \ldots, n$) avec : $M = \text{p.p.c.m.}\ (Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)$.

En effet sous cette hypothèse ($\bar{\alpha} \in Q^n$), la droite selon laquelle la sommation est faite passe par des points à coordonnées entières et le premier de ces points est rencontré pour : $k = M$. Il suffit alors de choisir $N$ multiple de $M$ supérieur ou égal à $N_0$ pour rendre $\frac{K}{N}$ négligeable. Pour un polynôme trigonométrique, il est alors clair que l'erreur de méthode est nulle. Dans le cas général, le terme $\frac{K}{N}$ est négligeable par rapport à $\rho(R)$ et, $\varepsilon$ étant donné, le problème se ramène donc à déterminer $R$ tel que : $\rho(R) \leqslant \varepsilon$.

Les $\bar{\alpha}$ optimaux seront alors ceux qui minimisent le coût de calcul $C$ (proportionnel à $M$) de $S_M$ (pour une même borne supérieure d'erreur $\varepsilon$ fixée à l'avance). Si nous remarquons maintenant que : $\bar{\alpha} = \left(\frac{1}{Q_1}, \ldots, \frac{1}{Q_n}\right)$ donne, en vertu de la périodicité sur $\mathbf{R}^n$ de la fonction $f$, exactement le même coût de calcul que tout $\bar{\alpha} = \left(\frac{P_1}{Q_1}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}\right)$ où $P_j$ est premier avec $Q_j$ pour tout

$j = 1, 2, ..., n$, nous sommes alors ramenés à la détermination du $\bar{\alpha}$ optimal du type : $\left(\frac{1}{Q_1}, ..., \frac{1}{Q_n}\right)$.

Dans le cas monodimensionel ($n = 1$), le vecteur optimal du type : $\alpha = \frac{1}{Q}$ (tel que : $\eta_S(\bar{\alpha}) > 0$) est : $\alpha_0 = \frac{1}{R+1}$.

En effet nous avons : $S \subseteq \{-R, ..., -1, 1, ..., R\}$ et il en résulte que pour tout $p \in S$ :

$$0 < \frac{1}{R+1} \leqslant |p|\, \alpha_0 \leqslant \frac{R}{R+1} = 1 - \frac{1}{R+1} < 1$$

d'où :

$$\eta_S(\alpha_0) = \operatorname*{Min}_{p \in S} |1 - e^{2i\pi p x_0}| > \sin \frac{2\pi}{R+1} > 0 \text{ et } \alpha_0 = \frac{1}{R+1}$$

est le plus grand pas appartenant à $]0,1[$ assurant la condition : $\eta_S(\bar{\alpha}) > 0$ car pour : $\alpha = \frac{1}{Q}$ avec : $Q \leqslant R$ on a : $|p|\, \alpha = 1$ et $\eta_S(\bar{\alpha}) = 0$ pour : $p = \pm Q$.

Dans le cas : $n = 2$, si l'on imagine le calcul de l'intégrale double en fixant tout d'abord la valeur d'une variable et compte tenu des résultats précédents il est clair que le vecteur optimal $\bar{\alpha}$ du type $\left(\frac{1}{Q_1}, \frac{1}{Q_2}\right)$ vaut :

$$\bar{\alpha}_0 = \left(\frac{1}{R+1}, \frac{1}{(R+1)^2}\right)$$

En effet nous avons : $0 < \frac{1}{(R+1)^2} \leqslant |\langle \bar{p}, \bar{\alpha}_0 \rangle| \leqslant 1 - \frac{1}{(R+1)^2} < 1$

et :

$$\eta_S(\bar{\alpha}_0) > \sin \frac{2\pi}{(R+1)^2} > 0$$

car :

$$\operatorname*{Max}_{\bar{p} \in S} |\langle \bar{p}, \bar{\alpha}_0 \rangle| = \frac{R}{R+1} + \frac{R}{(R+1)^2} = 1 - \frac{1}{(R+1)^2}$$

et :

$$|\langle \bar{p}, \bar{\alpha}_0 \rangle| = \frac{1}{(R+1)^2} |(R+1)p_1 + p_2| \geqslant \frac{1}{(R+1)^2} \text{ pour tout } \bar{p} \in S$$

puisque : $(R+1)p_1 + p_2$ est un entier relatif *non nul*, car sinon :

- Si $p_2 = 0$ il en résulte que : $p_1 \neq 0$ car $\bar{0} = (0, 0) \notin S$

et $|p_1(R+1)| \geqslant R + 1 \geqslant 1$ (contradiction)

• Si $p_2 \neq 0$ on aurait : $\dfrac{|p_1|}{|p_2|} = \dfrac{1}{R+1}$

ce qui est impossible car $\dfrac{1}{R+1}$ est une fraction irréductible et : $|p_2| \leqslant R$ pour tout $\bar{p} \in \mathcal{S}$.

Pour généraliser les résultats établis ci-dessus au cas multidimensionnel quelconque il suffit de raisonner par récurrence.

Supposons qu'en dimension $(n-1)$, en prenant :

$$\bar{\alpha}_0 = \left(\frac{1}{R+1}, \dots, \frac{1}{(R+1)^j}, \dots, \frac{1}{(R+1)^{n-1}}\right)$$

on ait : $0 < \dfrac{1}{(R+1)^{n-1}} \leqslant |\langle \bar{p}, \bar{\alpha}_0 \rangle| \leqslant 1 - \dfrac{1}{(R+1)^{n-1}} < 1.$

Montrons alors qu'en dimension $n$, en prenant :

$$\bar{\alpha}_0 = \left(\frac{1}{R+1}, \dots, \frac{1}{(R+1)^j}, \dots, \frac{1}{(R+1)^n}\right)$$

on a : $0 < \dfrac{1}{(R+1)^n} \leqslant |\langle \bar{p}, \bar{\alpha}_0 \rangle| \leqslant 1 - \dfrac{1}{(R+1)^n}$

En effet nous avons :

$$|\langle \bar{p}, \bar{\alpha}_0 \rangle| = \frac{1}{(R+1)^n} |(R+1)^{n-1}p_1 + \dots + (R+1)p_{n-1} + p_n| \geqslant \frac{1}{(R+1)^n}$$

puisque : $(R+1)^{n-1}p_1 + \dots + (R+1)p_{n-1} + p_n$ est un entier relatif non nul car :

• Si $p_1 = 0$, il existe au moins un indice $r \in \{2, 3, \dots, n\}$ tel que :

$$p_r \neq 0 \quad (\bar{0} \notin \mathcal{S})$$

et on se trouve ramené au cas $(n-1)$ et d'après l'hypothèse de récurrence :

$$|(R+1)^{n-2}p_2 + \dots + (R+1)p_{n-1} + p_n| \geqslant 1$$

• Si $p_1 \neq 0$ on a : $|p_1(R+1)^{n-1}| \geqslant (R+1)^{n-1}$

et

$$|(R+1)^{n-2}p_2 + \dots + (R+1)p_{n-1} + p_n|$$
$$\leqslant R((R+1)^{n-2} + \dots + (R+1) + 1) = (R+1)^{n-1} - 1$$

Il en résulte que :

$$0 < \frac{1}{(R+1)^n} \leqslant \frac{1}{(R+1)^n} \Big| |(R+1)^{n-1}p_1| - |(R+1)^{n-2}p_2 + \dots + (R+1)p_{n-1} + p_n| \Big| \leqslant |\langle \bar{p}, \bar{\alpha}_0 \rangle|$$

et pour tout $\bar{p} \in \mathcal{S}$ on a :

$$|\langle \bar{p}, \bar{\alpha}_0 \rangle| = \frac{1}{(R+1)^n} |(R+1)^{n-1}p_1 + \dots + (R+1)p_{n-1} + p_n|$$

$$\leqslant \frac{R}{(R+1)^n}((R+1)^{n-1} + \dots + (R+1) + 1) = 1 - \frac{1}{(R+1)^n}$$

D'où :

$$0 < \frac{1}{(R+1)^n} \leqslant |\langle \bar{p}, \bar{\alpha}_0 \rangle| \leqslant 1 - \frac{1}{(R+1)^n} < 1 \text{ pour tout } \bar{p} \in \mathcal{S}$$

et

$$n_{\mathcal{S}}(\bar{\alpha}_0) = \operatorname*{Min}_{\bar{p} \in \mathcal{S}} |1 - e^{2i\pi \langle \bar{p}, \bar{\alpha}_0 \rangle}| > \sin \frac{2\pi}{(R+1)^n} > 0$$

et par suite : $|I_N| \leqslant \rho(R) = \sum_{\|\bar{p}\| \geqslant R+1} |c_{\bar{p}}|$

et le calcul de $S_N$ se réduit au calcul de :

$$S_{(R+1)^n} = \frac{1}{(R+1)^n} \sum_{k=0}^{(R+1)^n - 1} f\left(\frac{k}{R+1}, \frac{k}{(R+1)^2}, \dots, \frac{k}{(R+1)^n}\right)$$

REMARQUE : D'après les remarques faites au début de ce paragraphe, il est clair que pour tout $\bar{\alpha}$ du type $\left(\frac{P_1}{R+1}, \dots, \frac{P_j}{(R+1)^j}, \dots, \frac{P_n}{(R+1)^n}\right)$ avec : $P_j$ premier avec $(R+1)^j$ pour $j = 1, 2, \dots, n$ le calcul de $S_{(R+1)^n}$ est inchangé puisque le nombre de points de discrétisation reste le même et seules les directions optimales changent. Il est évident aussi que toute permutation des composantes de tels vecteurs optimaux donne un nouveau vecteur optimal [les points de discrétisation changent mais leur nombre (et par conséquent le coût de calcul) reste inchangé]. Il en résulte que pour un $\varepsilon$ donné, c'est-à-dire pour une valeur fixée de $R$, le nombre de vecteurs optimaux appartenant à $]0, 1[^n$ est égal à :

$$n!\left(1 - \frac{1}{r_1}\right)^n \dots \left(1 - \frac{1}{r_s}\right)^n (R+1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

où : $r_1, \dots, r_s$ sont les facteurs premiers de $R+1$, car d'après la formule d'Euler nous savons que le nombre $N\{(R+1)^j\}$ d'entiers positifs strictement inférieurs à $(R+1)^j$ et premiers avec $(R+1)^j$ vaut :

$$N\{(R+1)^j\} = (R+1)^j\left(1-\frac{1}{r_1}\right)\left(1-\frac{1}{r_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{r_s}\right)$$

pour : $j = 1, 2, \dots, n.$

## C. EXEMPLE NUMERIQUE

Soit :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{k - \cos 2\pi(x_1 + \dots + x_n)}{k^2 + 1 - 2k \cos 2\pi(x_1 + \dots + x_n)} \quad (k > 1).$$

Cette fonction est continue sur $\mathbf{R}^n$, périodique de période $T = 1$ par rapport à chaque variable et indéfiniment différentiable. Sa série de Fourier converge donc très rapidement et nous avons :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}} \cos 2\pi p(x_1 + \dots + x_n) = \frac{1}{k} + \sum_{p \in \mathbf{Z}^*} \frac{e^{2i\pi p(x_1+\dots+x_n)}}{2k^{|p|+1}}$$

Remarquons que : $\mathfrak{J} = \int_{[0,1]^n} f(\bar{x})\,d\bar{x} = c_{\bar{0}} = \frac{1}{k}$ et qu'il s'agit ici de contrôler la méthode définie ci-dessus. Par ailleurs :

$$\Sigma = f(\bar{0}) - c_{\bar{0}} = \frac{1}{k(k-1)} \qquad \text{et} \qquad \rho(R) = \sum_{p \geqslant R+1} \frac{1}{k^{p+1}} = \frac{1}{(k-1)k^{R+1}}$$

La détermination de $R$ en fonction de $\varepsilon$ est ici particulièrement simple puisqu'il suffit de prendre :

$$R = \left[\frac{\log \varepsilon^{-1} - \log(k-1)}{\log k}\right] \text{ pour rendre : } \rho(R) \leqslant \varepsilon$$

## D. CONCLUSION

Cette méthode de calcul d'intégrales fournit des résultats d'une très grande précision pour des fonctions à série de Fourier rapidement convergente, c'est-à-dire pour des fonctions suffisamment régulières. En outre, pour tout vecteur optimal le coût de calcul est le même que celui de la méthode qui consiste à effectuer un quadrillage de l'hypercule fondamental (de pas optimal égal à $\frac{1}{R+1}$ par rapport à chaque variable) et à calculer des sommes partielles de la forme : $S'_{R+1} = \frac{1}{(R+1)^n} \sum_{k_1=0}^{R} \dots \sum_{k_n=0}^{R} f\left(\frac{k_1}{R+1}, \dots, \frac{k_n}{R+1}\right)$. La programmation des calculs à effectuer et la détermination d'un vecteur optimal sont particulièrement simples. Par contre une majoration satisfaisante de $\rho(R)$ n'est pas toujours facile à obtenir, mais l'étude de la convergence des résultats (lorsque $R$ augmente) permet de remédier à cet inconvénient.

PROGRAMME :

```
$JOB           216SAINT-ANDRE-M,ACCT=20343
      WRITE(6,1)
    1 FORMAT(T14,'N   K',5X,'EPS',5X,'R   COUT',7X,'SOM', 9X,
     1'VALEUR EXACTE')
    2 READ(5,20) N,K,EPS,ITEST
      IF(K.EQ.1) GOTO 25
      IR=(ALOG(1./EPS)-ALOG(FLOAT(K-1)))/ALOG(FLOAT(K))
      IN=1
      IC=1
      REP=0
      IF(IR.EQ.0) GOTO 16
      IN=(IR+1)**N
      J=(IN-1)/2
      IC=J+1+MOD(IR,2)
      DO 10 I=1,J
      A=COS(6.283185*I/IN)
   10 REP=REP+(K-A)/(K**2+1-2*K*A)
   16 REP=(2*REP+1./(K-1)+MOD(IR,2)/FLOAT(K+1))/IN
      EXAC=1./K
      WRITE(6,20) N,K,EPS,IR,  IC,REP,EXAC
   20 FORMAT(10X,2I4,E10.2,I4,I6,2E16.7)
   25 IF(ITEST.EQ.0) GOTO 2
      STOP
      END
```

RÉSULTATS :

| N | K | EPS | R | COÛT | SOM | VALEUR EXACTE |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0.10E-05 | 19 | 11 | 0.5000000E 00 | 0.5000000E 00 |
| 1 | 3 | 0.10E-05 | 11 | 7 | 0.3333336E 00 | 0.3333333E 00 |
| 1 | 4 | 0.10E-06 | 10 | 6 | 0.2499999E 00 | 0.2500000E 00 |
| 1 | 5 | 0.10E-06 | 9 | 6 | 0.1999999E 00 | 0.2000000E 00 |
| 1 | 6 | 0.16E-03 | 3 | 3 | 0.1667954E 00 | 0.1666666E 00 |
| 1 | 7 | 0.10E-04 | 4 | 3 | 0.1428656E 00 | 0.1428571E 00 |
| 2 | 8 | 0.30E-03 | 2 | 5 | 0.1249999E 00 | 0.1250000E 00 |
| 2 | 9 | 0.20E-03 | 2 | 5 | 0.1111110E 00 | 0.1111111E 00 |
| 2 | 10 | 0.12E-04 | 3 | 9 | 0.9999990E-01 | 0.9999996E-01 |
| 3 | 11 | 0.10E-02 | 1 | 5 | 0.9090900E-01 | 0.9090906E-01 |
| 3 | 12 | 0.60E-04 | 2 | 14 | 0.8333319E-01 | 0.8333331E-01 |
| 4 | 13 | 0.50E-03 | 1 | 9 | 0.7692295E-01 | 0.7692307E-01 |
| 4 | 14 | 0.30E-04 | 2 | 41 | 0.7142824E-01 | 0.7142854E-01 |
| 5 | 15 | 0.32E-03 | 1 | 17 | 0.6666660E-01 | 0.6666666E-01 |
| 6 | 16 | 0.17E-04 | 2 | 365 | 0.6249725E-01 | 0.6250000E-01 |
| 7 | 17 | 0.22E-03 | 1 | 65 | 0.5882320E-01 | 0.5882353E-01 |
| 8 | 18 | 0.20E-03 | 1 | 129 | 0.5555517E-01 | 0.5555555E-01 |
| 9 | 19 | 0.16E-03 | 1 | 257 | 0.5263108E-01 | 0.5263158E-01 |
| 10 | 22 | 0.10E-03 | 1 | 513 | 0.4545169E-01 | 0.4545454E-01 |
| 11 | 25 | 0.80E-04 | 1 | 1025 | 0.3999504E-01 | 0.4000000E-01 |
| 12 | 30 | 0.40E-04 | 1 | 2049 | 0.3332750E-01 | 0.3333333E-01 |
| 15 | 51 | 0.40E-03 | 0 | 1 | 0.2000000E-01 | 0.1960784E-01 |
| 20 | 72 | 0.20E-03 | 0 | 1 | 0.1408451E-01 | 0.1388889E-01 |
| 30 | 33 | 0.10E-02 | 0 | 1 | 0.3125000E-01 | 0.3030303E-01 |
| 50 | 15 | 0.50E-02 | 0 | 1 | 0.7142854E-01 | 0.6666666E-01 |
| 100 | 23 | 0.20E-02 | 0 | 1 | 0.4545454E-01 | 0.4347826E-01 |
| 200 | 46 | 0.50E-03 | 0 | 1 | 0.2222222E-01 | 0.2173913E-01 |
| 500 | 28 | 0.14E-02 | 0 | 1 | 0.3703703E-01 | 0.3571428E-01 |
| 800 | 59 | 0.30E-03 | 0 | 1 | 0.1724138E-01 | 0.1694915E-01 |
| 1000 | 36 | 0.80E-03 | 0 | 1 | 0.2857143E-01 | 0.2777778E-01 |

COMPILE TIME= 1.36 SEC,EXECUTION TIME= 30,65 SEC.OBJECT CODE= 1568 BYTES

SUR CALCULATEUR I.B.M 360-40

## BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BASS, *Nombres aléatoires. Suites arithmétiques. Méthodes de Monte-Carlo* (Publications de l'I.S.U.P., vol. IX, 1960, fasc. 3, p. 289-325).

[2] J. P. BERTRANDIAS, *Calcul d'une intégrale au moyen de la suite : $x_n = \widetilde{An}$. Evaluation de l'erreur* (Publications de l'I.S.U.P., vol. IX, 1960, fasc. 4, p. 335-349).

[3] M. MENDÈS-FRANCE, *Calcul des moyennes des fonctions aléatoires ou pseudo-aléatoires par échantillonnage* (Publications de l'I.S.U.P., vol. XI, 1962, fasc. 3, p. 225-256).

[4] M. SAINT-ANDRÉ, *Utilisation de suites équiréparties pour le calcul des intégrales*, Thèse de 3e cycle, 10 juillet 1970, département de mathématiques appliquées, Clermont-Ferrand.

[5] M. SAINT-ANDRÉ, *Calcul de la moyenne d'une fonction presque-périodique, Application au calcul d'intégrales*, Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, R-3, 1970, p. 141-146.