REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

D. CHENAIS
M. TERRENOIRE

Pseudoquestionnaires

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 5, nº R2 (1971), p. 43-54
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_2_43_0>

R.I.R.O.
(5e année, R-2, 1971, p. 43-54)

PSEUDOQUESTIONNAIRES

par D. CHENAIS (1) et M. TERRENOIRE (1)

Résumé. — *Étant donné un processus aléatoire T pouvant prendre un nombre fini d'états T_i sur une population Ω, nous considérons une famille D de processus aléatoires définis sur Ω. Chaque élément q de D a un nombre fini d'états q_i, et nous supposons connues les probabilités conditionnelles $p(q_i|T_j)$.*

Nous étudions des processus de décision arborescents, utilisant les éléments de D comme question, et visant à déterminer l'état du système T lors d'une épreuve ω quelconque de Ω.

Les questionnaires de Picard traitent du cas où les probabilités conditionnelles sont toutes égales à 0 ou 1 ; nous avons introduit les pseudoquestionnaires pour traiter du cas général. A différentes exigences quant à la qualité de la décision, nous faisons correspondre différentes notions de convergence pour les pseudoquestionnaires. Nous établissons des conditions asymptotiques sur D, nécessaires et suffisantes pour assurer ces différentes convergences.

I. DEFINITIONS

1) Pseudoquestionnaires

Soient un ensemble Ω et une tribu a d'événements dans Ω. Nous supposons donnés :

— un système complet d'événements T sur (Ω, a), fini, soit :

$$T = (T_1, \ldots, T_n).$$

— n lois de probabilité l_j définies respectivement sur (T_j, a_j), où a_j est la trace de a sur T_j.

Étant donné par ailleurs un entier $a (a \geqslant 2)$, nous considérons l'ensemble $Q(a)$ des systèmes complets d'événements définis sur (Ω, a) ayant au plus a éléments. En notant :

$$q_1, \ldots, q_{a(q)}$$

(1) Faculté des Sciences, Lyon.

les éléments d'un système q, nous dirons que q est une *question*, de *base* $a(q)$, d'*issues* $(q_1, ..., q_{a(q)})$.

Par ailleurs, en notant $\zeta(a, n)$ l'ensemble des matrices stochastiques de a lignes et n colonnes, nous considérons l'application α de $Q(a)$ dans $\zeta(a, n)$ définie de la façon suivante :

$$\alpha(q) = ((\alpha_i^j(q))), i \in \{ 1, ..., a \}, j \in \{ 1, ..., n \}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_i^j(q) = 1_j(q_i \cap T_j) & i \leqslant a(q), j \in \{ 1, ..., n \} \\ \alpha_i^j(q) = 0 & i > a(q), j \in \{ 1, ..., n \} \end{cases}$$

REMARQUE

Pout tout q, nous supposons, sans restriction de généralité que :

$$\forall i \in \{ 1, ..., a(q) \}, \exists j \in \{ 1, ..., n \} : \alpha_i^j(q) \neq 0$$

(S'il n'en était pas ainsi, il nous suffirait de réduire le nombre d'issues de la question q.)

Définition 1

Nous appellerons *détecteur* opérant sur T, un sous-ensemble D de $Q(a)$ dont tous les éléments sont stochastiquement indépendants pour les lois l_j, $j \in \{ 1, ..., n \}$.

Définition 2

Étant donné un détecteur D, nous appellerons *pseudoquestionnaire* construit sur D, un triplet $(\mathcal{A}, u, B)$ où :

— $\mathcal{A}$ est un graphe arborescent (fini ou infini [5]) (X, Γ) dont tous les sommets ont au plus a successeurs.

— u est une application de l'ensemble Y des sommets non terminaux de $\mathcal{A}$ dans D vérifiant :

i) $$|\Gamma_y| = a(u(y)) \qquad \forall y \in Y$$

ii) la restriction de u à l'ensemble des sommets de tout chemin de $\mathcal{A}$ est injective.

— $B = \{ b_y \mid y \in Y \}$, où b_y est une bijection entre l'ensemble des arcs sortant de y, et celui des issues de la question $u(y)$ (cf. fig. 1).

REMARQUE

La condition ii), ci-dessus, s'interprète comme suit : on s'interdit d'utiliser plus d'une fois une même question sur un chemin de $\mathcal{A}$.

$$\begin{cases} u(x) = q, \text{ question d'issues } q_1, q_2 \\ b_x((x, y)) = q_1 \\ b_x((x, z)) = q_2 \end{cases}$$

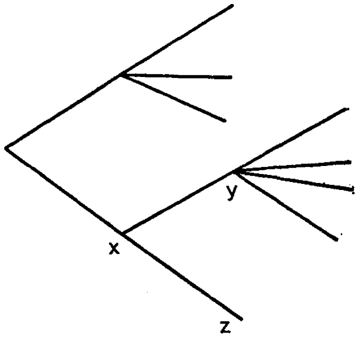

Figure 1

Nous considérons un pseudoquestionnaire K comme un graphe, et utilisons le langage habituel des graphes [2], et même plus précisément celui des questionnaires [3]. Nous dirons ainsi qu'un sommet x de $\mathcal{A}$ est un sommet de K, et nous noterons $r(x)$ son rang, c'est-à-dire le nombre de ses ascendants dans $\mathcal{A}$. Nous dirons que K est de *hauteur* R, si tous ses sommets sont de rang au plus égal à R, l'un d'eux étant de rang égal à R.

Nous remarquons qu'il y a une correspondance entre le système complet d'événements $u(y)$ que nous appelons question et le sommet y du graphe d'interrogation qui est appelé question par Picard [5].

2) Probabilités attachées aux différents éléments d'un pseudoquestionnaire

Supposons donné un élément π de l'ensemble $\mathbf{P}_n$

$$\mathbf{P}_n = \{ \pi \in \mathbf{R}^n : \sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1, \pi_j \geqslant 0 \, \forall j \in \{ 1, ..., n \} \}$$

π engendre sur (Ω, a) une loi de probabilité p définie par :

$$p(A) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j l_j(A \cap T_j) \qquad \forall A \in a.$$

Il est clair que pour cette loi

$$\pi_j = p(T_j)$$

et que quel que soit $\pi \in \mathbf{P}_n$:

$$l_j(A \cap T_j) = p(A \mid T_j) = \frac{p(A \cap T_j)}{p(T_j)} \qquad (\text{si } \pi_j \neq 0).$$

Considérons alors un pseudoquestionnaire $K = (\mathcal{A}, u, B)$ et la loi de probabilité p engendrée par un élément π de $\mathbf{P}_n$. Étant donné un sommet x de K, soit $(x_0, ..., x_k)$ la suite ordonnée de ses ascendants dans K. On pose (cf. fig. 2) :

$$\begin{cases} q(l) = u(x_l) \quad l \in \{0, ..., k\} \\ b_{xl}((x_l, x_{l+1})) = q_1(l) \\ \varepsilon(x) = \bigcap\limits_{l=0}^{k} q_1(l) \end{cases}$$

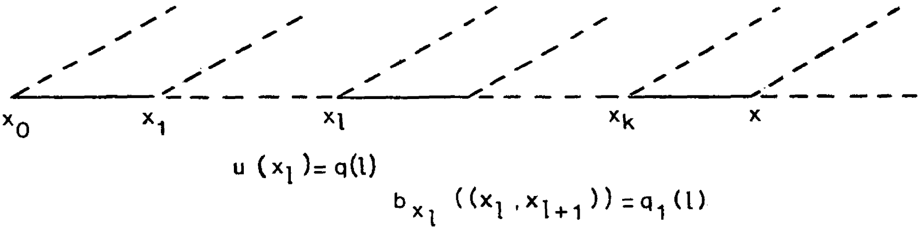

Figure 2

Nous appellons *probabilité de x dans K opérant sur* π la quantité $p(\varepsilon(x))$ que nous noterons $p(x)$. En raison de l'indépendance stochastique des questions vis-à-vis des lois l_j, nous avons :

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j \prod_{1=0}^{k} \alpha_1^j(q(l)).$$

Nous appellons *vecteur de probabilité associé à x dans K opérant sur* π l'élément $\mathcal{T}(T \mid x)$ de $\mathbf{P}_n$, ayant pour composantes

$$p(T_j \mid \varepsilon(x))$$

que nous noterons $p(T_j \mid x)$.

Il est clair que ceci n'a de sens que si $p(x) \neq 0$; nous avons alors :

$$p(T_j \mid x) = \frac{\pi_j \prod\limits_{l=0}^{k} \alpha_1^j(q(l))}{p(x)}.$$

Les vecteurs associés aux sommets de K et les probabilités de ces sommet peuvent se calculer par récurrence sur le rang, à l'aide du théorème de Bayes :

$$p(T_j \mid x_{l+1}) = \frac{p(T_j \mid x_l)\, \alpha_1^j(q(l))}{\sum\limits_{j=1}^{n} p(T_j \mid x_l) \alpha_1^j(q(l))}$$

$$p(x_{l+1}) = \left[\sum_{j=1}^{n} p(T_j \mid x_l) \alpha_1^j(q(l))\right] p(x_l)$$

3) Longueur de cheminement d'un pseudoquestionnaire

La notion de longueur de cheminement introduite par Picard à l'occasion des questionnaires [3] se transpose naturellement pour des pseudoquestionnaires de hauteur finie.

Considérons un élément π de $\mathbf{P}_n$, et désignons par Z et Y les ensembles de sommets respectivement terminaux et non terminaux d'un pseudoquestionnaire K de hauteur finie.

La longueur de cheminement de K opérant sur π est :

$$L[K, \pi] = \sum_{x \in Z} p(x) r(x).$$

On montre [3] la propriété :

$$L[K, \pi] = \sum_{y \in Y} p(y).$$

4) Information traitée par un pseudoquestionnaire opérant sur π,

Considérons un pseudoquestionnaire $K = (\mathcal{A}, u, B)$ et un élément π de $\mathbf{P}_n$. Soit y un sommet non terminal de K, on appelle information traitée [4] par le sommet y de K opérant sur π la quantité

$$I(y) = H(\mathcal{T}(T \mid y)) - \sum_{z \in \Gamma_y} \frac{p(z)}{p(y)} H(\mathcal{T}(T \mid z))$$

où $H(\pi)$ désigne l'entropie d'un élément π de $\mathbf{P}_n$,

$$H(\pi) = -\sum_{j=1}^{n} \pi_j \operatorname{Log} \pi_j, \quad [1].$$

Y désignant l'ensemble des sommets non terminaux de K, si $\mathcal{A}$ est fini, on appelle information traitée par K opérant sur π, la quantité

$$I(K, \pi) = \sum_{y \in Y} p(y) I(y).$$

Nous remarquons que cette quantité est majorée par $H(\pi)$, ce qui permet d'en étendre la définition à un graphe infini.

5) Convergence de pseudoquestionnaires

Un pseudoquestionnaire K sera utilisé comme un processus d'interrogation visant à déterminer l'événement T_j qui s'est réalisé lors d'une épreuve $\omega \in \Omega$; nous dirons qu'un sommet x *de K est interprétable pour* π s'il existe $j_0 \in \{1, ..., n\}$ tel que

(1) $$p(T_{j_0} \mid x) = 1.$$

Ainsi, étant donné un détecteur D, nous considérons l'ensemble $\mathcal{K}(D)$ des pseudoquestionnaires construits sur D, dont les sommets terminaux sont les sommets interprétables pour tout élément π de $\mathbf{P}_n$.

Or, on montre facilement qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{K}(D)$ admette un élément de hauteur finie est que D vérifie la propriété suivante :

$$(2)\quad \forall j \in \{ 1, ..., n \}\ \forall j' \in \{ 1, ..., n \}, j \neq j'\ \exists q \in D :$$
$$(\alpha_i^j(q) \neq 0 \Rightarrow \alpha_i^{j'}(q) = 0\ \forall i \in \{ 1 ... a(q) \}).$$

Cette condition (2) étant très restrictive, nous avons été conduits à considérer des détecteurs infinis, et à assouplir le critère d'interprétabilité (1) ; étant donné $\varepsilon > 0$, nous dirons qu'un sommet x de K est *interprétable à ε près pour* π s'il existe $j_0 \in \{ 1, ..., n \}$ tel que :

$$p(T_{j_0} \mid x) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

La définition des différents modes de convergence fait appel aux notions suivantes :

Étant donné $K \in \mathcal{K}(D)$, $\pi \in \mathbf{P}_n$, $\varepsilon \in]0, 1[$, $R \in \mathbf{N}$, nous noterons :

— $K(\pi, \varepsilon)$ la restriction [1] de K dans laquelle les sommets terminaux sont les sommets interprétables à ε près pour π.

— $K(R ; \pi, \varepsilon)$ la restriction de hauteur R de $K(\pi, \varepsilon)$ et $L[K(R ; \pi, \varepsilon)]$ sa longueur de cheminement.

— $E(R ; \pi, \varepsilon)$ l'ensemble des sommets de $K(R ; \pi, \varepsilon)$, de rang R, et non interprétables à ε près pour π.

Définition 3

Étant donné un détecteur D, un élément K de $\mathcal{K}(D)$ sera dit :

1. Fortement convergent (F-convergent) pour un élément π de $\mathbf{P}_n$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ K(\pi, \varepsilon) \text{ est de hauteur finie}$$

2. L-convergent pour un élément π de $\mathbf{P}_n$, si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0\ \lim_{R \to \infty} L[K(R; \pi, \varepsilon)] < +\infty$$

---

(1) Étant donné $K = (\mathcal{A}, u, B)$, $K' = (\mathcal{A}', u', B')$ deux pseudoquestionnaires construits sur un même détecteur, K' est une restriction de K si :
— $\mathcal{A} = (X, \Gamma)$ est un prolongement de $\mathcal{A}' = (X', \Gamma')$:
— $X' \subset X$, $\Gamma' \subset \Gamma$
— $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ ont même racine
— $\Gamma_y = \Gamma'_y \quad \forall y \in Y'$ (Y' ensemble des sommets non terminaux de $\mathcal{A}'$).
— u prolonge u'
— $b'_y = b_y \qquad \forall y \in Y'$

3. H-convergent pour un élément π de P_n, si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{R \to \infty} \sum_{x \in E(R;\pi,\varepsilon)} p(x) = 0$$

On montre facilement la propriété :

K F-converge pour $\pi \Rightarrow K$ L-converge pour $\pi \Rightarrow K$ H-converge pour π.

Si la F-convergence apparaît comme la généralisation la plus naturelle des processus de décision arborescents, tels les questionnaires, elle s'avère être un mode de convergence très exigeant et généralement peu intéressant dans la pratique [6]. Dans cet article, nous n'étudierons que la L-convergence et la H-convergence.

II. ETUDE DE LA L-CONVERGENCE

Nous cherchons une condition sur D permettant d'assurer l'existence d'éléments de $\mathcal{K}(D)$ qui soient L-convergents pour tout π de $\mathbf{P}_n$.

Cette condition porte sur la notion de point essentiellement atteint par un *détecteur :*

Définition 4

Nous dirons que $s \in \zeta(a, n)$ est essentiellement atteint par D, si pour tout $\delta > 0$, il existe une infinité de questions q de D telles que $\alpha(q)$ soit dans la boule (au sens de la topologie de la norme sur $\mathbf{R}^{n \times a}$) de centre s et de rayon δ.

Il est clair qu'un détecteur infini admet au moins un point essentiellement atteint.

Théorème 1

Étant donné un détecteur D, une condition suffisante pour qu'il existe $K \in \mathcal{K}(D)$ qui soit L-convergent pour tout π de $\mathbf{P}_n$ est que D vérifie l'hypothèse H_L suivante :

H_L | Pour tout couple (j, j'), $j \in \{1, ..., n\}$, $j' \in \{1, ..., n\}$, $j \neq j'$,
D admet un point essentiellement atteint s tel que :

$$s^j \neq s^{j'}$$

(où s^j désigne la $j$ème colonne de la matrice s).

Démonstration

D vérifiant l'hypothèse H_L, il existe un ensemble

$$S = \{ s(0), ..., s(m-1) \} \left(m \leqslant \frac{n(n-1)}{2} \right)$$

de points essentiellement atteints par D, vérifiant :

— $\forall (j, j'), j \in \{1, \ldots, n\}, j' \in \{1, \ldots, n\}, j \neq j', \exists s \in S$ tel que $s^j \neq s^{j'}$

— $\forall \sigma \in S$, si $S - \{\sigma\}$ n'est pas vide, alors il existe un couple (j, j') tel que : $s^j = s^{j'} \quad \forall s \in S - \{\sigma\}$.

Étant donné $\eta > 0$, nous considérons le sous-ensemble $\mathcal{K}(D, \eta)$ de $\mathcal{K}(D)$ défini de la façon suivante :

$K = (\mathcal{A}, u, B)$ est un élément de $\mathcal{K}(D, \eta)$ si et seulement si pour tout sommet non terminal y de K on a :

$$u(y) \in B(s(k), \eta)$$

où k est le reste de la division du rang $r(y)$ par m, et $B(s(k), \eta)$ est la boule de $\zeta(a, n)$ de centre $s(k)$ et de rayon η.

En raison de la définition de S, il existe $\eta_0 > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout couple (j, j') il existe $k \in \{0, \ldots, (m-1)\}$ vérifiant :

$$\|s^j - s^{j'}\| \geqslant \delta \quad \forall s \in B(s(k), \eta_0).$$

Soient alors $K = (\mathcal{A}, u, B) \in \mathcal{K}(D, \eta_0)$, $\pi \in \mathbf{P}_n$, $\varepsilon > 0$, nous allons montrer que :

$$L[K(\pi, \varepsilon)] < +\infty.$$

Pour ceci, nous considérons la restriction K' de K telle que :

un sommet x de K' est terminal si et seulement si x est de rang multiple de m, et si x ou l'un de ses ascendants est interprétable à ε près pour π.

Il est clair que $K(\pi, \varepsilon)$ est une restriction de K' et il nous suffit donc de montrer que :

$$L[K', \pi] < +\infty.$$

Considérons un sommet y de rang λm (λ entier positif) non terminal dans K', et posons sans restriction de généralité :

$$p(T_1 \mid y) = \operatorname{Max}(p(T_j \mid y) \mid j \in \{1, \ldots, n\})$$
$$p(T_2 \mid y) = \operatorname{Max}(p(T_j \mid y) \mid j \in \{2, \ldots, n\})$$

Le sommet y n'étant pas interprétable à ε près pour π, on a :

(3) $$p(T_j \mid y) \geqslant \frac{\varepsilon}{n-1} \forall j \in \{1, 2\}.$$

Soit alors $s(k) \in S$ tel que :

(4) $$\| s^1(k) - s^2(k) \| > \delta.$$

Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que :

$$u(y) \in B(s(k), \eta_0)$$

(En effet, c'est vrai à une commutativité près sur les questions du sous-pseudoquestionnaire de racine y, commutativité qui n'altère pas la convergence.)

En raison des relations (3) et (4), on peut alors montrer [6] qu'il existe $\gamma(\delta, \varepsilon) > 0$ tel que :

$$I(y) \geqslant \gamma(\delta, \varepsilon).$$

En notant $E'(R)$ l'ensemble des sommets de K', non terminaux et de rang R, on a alors :

$$\gamma(\delta, \varepsilon) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{x \in E'(\lambda m)} p(x) \leqslant \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{x \in E'(\lambda m)} p(x) I(x) \leqslant H(\pi).$$

Soit

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{x \in E'(\lambda m)} p(x) \leqslant \frac{H(\pi)}{\gamma(\delta, \varepsilon)}$$

La suite $\left(\sum_{x \in E'(R)} p(x)) \right)$ étant stationnaire pour R tel que :

$$\lambda m \leqslant R < (\lambda + 1)m$$

on a

$$\sum_{R=0}^{\infty} \sum_{x \in E'(R)} p(x) = L[K', \pi] < +\infty.$$

III. ETUDE DE LA *H*-CONVERGENCE

Signalons tout d'abord la propriété de caractérisation suivante :

Proposition

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément K de $\mathcal{K}(D)$ soit H-convergent pour π est que :

$$I(K, \pi) = H(\pi).$$

Intéressons-nous maintenant aux conditions que doit remplir D pour que $\mathcal{K}(D)$ admette un élément qui soit H-convergent pour tout élément π de $\mathbf{P}_n$.

Théorème 2

Si D ne vérifie pas (2), et si D vérifie la condition de régularité (5)

(5) Pour tout point s essentiellement atteint par D, tel qu'il existe un couple (j, j'), $j \in \{1, ..., n\}$, $j' \in \{1, ..., n\}$ $j \neq j'$, vérifiant $s^j = s^{j'}$, on a :

$$s_i^j \neq 0 \quad \forall i$$

alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un élément de $\mathcal{K}(D)$ qui soit H-convergent pour tout π de P_n, est que D vérifie la condition (6) :

(6) $\forall j \in \{1, ..., n\}$, $\forall j' \in \{1, ..., n\}, j \neq j'$, il existe une suite $\{q(r)\}$, $r \in \mathbf{N}$, d'éléments de D telle que la série :

$$\sum_r \sum_{i=1}^{a(q(r))} [\alpha_i^j(q(r)) - \alpha_i^{j'}(q(r))]^2$$

diverge.

Démonstration de la condition suffisante dans le cas où $n = 2$

Le nombre de bases distinctes des questions étant fini, nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que tous les éléments de la suite $\{ q(r) \}$ ont même base a.

S'il existait un point essentiellement atteint par D, s, tels que $s^1 \neq s^2$, nous savons (théorème 1) qu'il existerait alors $K \in \mathcal{K}(D)$ qui soit L-convergent pour tout π, donc H-convergent pour tout π.

Nous supposons donc que, pour tout point s essentiellement atteint par D, on a :

$$s^1 = s^2. \tag{7}$$

Soit alors $K = (\mathcal{A}, u, B) \in \mathcal{K}(D)$, tel que pour tout sommet y de rang r, on ait :

$$u(y) = q(r).$$

Étant donné $\pi \in \mathbf{P}_2$, et $\varepsilon > 0$, nous allons montrer que :

$$\sum_{x \in E(R\,;\,\pi,\,\varepsilon)} p(x) \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $Y(R)$ l'ensemble des sommets non terminaux de $K(R\,;\,\pi, \varepsilon)$; nous savons que :

$$\sum_{y \in Y(R)} p(y) I(y) \leqslant H(\pi) (\forall R).$$

Or :

$$Y(R) = \bigcup_{r=0}^{R-1} E(r;\pi,\varepsilon)$$

et par conséquent la série de terme général

$$w_r = \sum_{y \in E(r;\pi,\varepsilon)} p(y) I(y)$$

converge.

Il nous suffit donc de montrer qu'il existe $M(r)$ tel que :

$$\begin{cases} I(y) \geqslant M(r) > 0 \qquad \forall y \in E(r;\pi,\varepsilon) \\ \text{la série } \sum_r M(r) \text{ diverge} \end{cases}$$

pour s'assurer que la suite $\sum_{x \in E(r;\pi,\varepsilon)} p(x)$ décroissante tende vers zéro lorsque r tend vers l'infini.

Or, en raison de l'hypothèse de régularité (5), et de (7), on peut montrer [6] qu'il existe $\xi > 0$ et un entier r_0 tels que :

$$\left.\begin{cases} r(y) = r \geqslant r_0 \\ \pi \in \{\pi \in \mathbf{P}_2 : \pi_j \geqslant \varepsilon \quad j \in \{1, 2\}\}. \end{cases}\right\} I(y) \geqslant \xi[\alpha_i^1(q(r)) - \alpha_i^2(q(r))]^2 \quad \forall i \in \{1, \dots, a\}$$

Or par hypothèse, il existe $i_0 \in \{1, \dots, a\}$ tel que la série

$$\sum_r [\alpha_{i_0}^1(q(r)) - \alpha_{i_0}^2(q(r))]^2$$

diverge.

Il suffit donc de poser :

$$M(r) = \xi[\alpha_{i_0}^1(q(r)) - \alpha_{i_0}^2(q(r))]^2$$

Pour n quelconque, la condition suffisante se démontre par récurrence sur n [6]. La démonstration de la condition nécessaire fait également appel à des propriétés aux limites de l'information traitée [6].

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. B. ASH, *Information Theory*, John Wiley and Sons, Inc., 1965.
[2] C. BERGE, *Théorie des graphes et ses Applications*, Dunod, Paris, 1963.
[3] C. F. PICARD, *Théorie des questionnaires*, Gauthier-Villars, Paris, 1965.

[4] C. F. PICARD, *Théorèmes de l'Information traitée*, Colloquium on information Theory, debrecen. , 1967.

[5] C. F. PICARD, *Graphes et Questionnaires*, Gauthier-Villars (sous presse).

[6] M. TERRENOIRE, *Un modèle mathématique de processus d'interrogation : les pseudo-questionnaires*. Thèse, Grenoble, 1970.

[7] M. TERRENOIRE, « Une généralisation des questionnaires : les pseudoquestionnaires », *C.R.A.S.*, série A, 270, p. 263 (1970).

[8] M. TERRENOIRE, « Pseudoquestionnaires et Information », *C.R.A.S.*, série A, 271, p. 884 (1970).