CLAUDE BREZINSKI

Brèves communications. Comparaison de suites convergentes

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 5, nº R2 (1971), p. 95-99

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_2_95_0>

R.I.R.O.
(5e année, R-2, 1971, p. 95-99)

Brèves communications

COMPARAISON DE SUITES CONVERGENTES

par Claude Brezinski (1)

Résumé. — *Formulation d'un matériel mathématique qui permet de comparer la convergence de suites dans un espace métrique. Définition de l'ordre d'une suite, de l'α-équivalence de deux suites et d'un indice de comparaison.*

De nombreuses méthodes d'analyse numérique sont des méthodes itératives. Il est donc important de pouvoir « mesurer » la vitesse de convergence d'une suite et comparer entre elles les vitesses de convergence de deux suites. Le matériel dont on dispose pour effectuer ce travail (ordre d'une suite, constante asymptotique d'erreur et indice d'efficacité) est insuffisant. Le but de cet article est de proposer de nouvelles notions qui permettent ces comparaisons.

Soit (E, d) un espace métrique et $\{ u_n \}$ une suite d'éléments de E qui converge vers u.

Définition 1 : On dit que la suite $\{ u_n \}$ est d'ordre r si :

$$d(u_{n+1}, u) = 0(d^r(u_n, u)) \qquad \text{et} \qquad d^r(u_n, u) = 0(d(u_{n+1}, u))$$

Théorème 1 : s'il existe, l'ordre d'une suite est unique.

Posons $d_n = d(u_n, u)$ et supposons qu'il existe $p \neq r$ tel que la suite soit aussi d'ordre p. On a alors :

$$C_2 d_n^r \leqslant d_{n+1} \leqslant C_1 d_n^r \quad \text{et} \quad C_3 d_n^p \leqslant d_{n+1} \leqslant C_4 d_n^p$$

$$d_{n+1} \leqslant C_1 d_n^{r-p} d_n^p \leqslant \frac{C_1}{C_3} d_n^{r-p} d_{n+1}$$

ce qui donne

$$1 \leqslant \frac{C_1}{C_3} d_n^{r-p}$$

(1) Attaché aux Services Techniques des Armées.

si $r > p$ alors d_n^{r-p} tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc $r = p$; si $r < p$ on écrit $d_{n+1} \leqslant C_4 d_n^{p-r} d_n^r$ et la suite de la démonstration est identique.

Définition 2 : On appelle coefficient asymptotique d'erreur, le nombre :

$$C = \limsup_{n \to \infty} \frac{d(u_{n+1}, u)}{d^r(u_n, u)}$$

et $R = -\log C$ le taux asymptotique d'erreur

On a

$$C = \limsup_{n \to \infty} \left[\frac{d(u_n, u)}{d^{r^n}(u_0, u)} \right]^p \text{ avec } p = 1/n \text{ si } r = 1$$

$$p = \frac{r - 1}{r^n - 1} \text{ si } r \neq 1.$$

Si $r = 1$ on gagne R chiffres significatifs exacts environ en passant de u_n à u_{n+1}, si $r > 1$ on multiplie par r ce nombre de chiffres exacts.

REMARQUES : En général la définition de l'ordre d'une suite telle qu'on la trouve le plus souvent dans la littérature est donnée par

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d(u_{n+1}, u)}{d^r(u_n, u)} \neq 0 \text{ ou } + \infty.$$

Cette définition n'est pas toujours applicable car il se peut que la limite n'existe pas. Tel est le cas de $u_n = 1/n$ si n pair est $1/2n$ sinon. En utilisant la définition 1 on trouve que cette suite est d'ordre un.

Une autre définition de l'ordre d'une suite que l'on rencontre fréquemment est $d(u_{n+1}, u) = 0(d^r(u_n, u))$. Prenons $u_n = a_1^{a_2^n} 2$ avec $0 < a_1 < 1$ et $a_2 > 1$. Cette suite est d'ordre a_2. La définition ne définit pas de façon unique l'ordre de cette suite. En effet on a $u_{n+1} = u_n^{a_2} \leqslant u_n^b \quad \forall 1 < b < a_2$.

Enfin remarquons que la définition 1 ne permet pas d'attribuer un ordre à n'importe quelle suite (par exemple $u_n = 1/n$ si n pair et $1/n^3$ sinon). On peut donc se poser le problème de savoir si la définition 1 est insuffisante ou si l'on est réellement incapable de définir un ordre de convergence pour certaines suites.

Définition 3 : Soit $\{ v_n \}$ une suite d'éléments de E qui converge vers v. On dit que $\{ v_n \}$ converge plus vite que $\{ u_n \}$ si :

$$d(v_n, v) = 0(d(u_n, u))$$

Définition 4 : On dit que $\{ v_n \}$ converge comme $\{ u_n \}$ si :

$$d(v_n, v) = 0(d(u_n, u)) \qquad \text{et} \qquad d(u_n, u) = 0(d(v_n, v))$$

L'ordre d'une suite et le coefficient asymptotique d'erreur sont des notions nettement insuffisantes pour comparer la rapidité de convergence de deux suites. Elles peuvent en effet être de même ordre, avoir même coefficient asymptotique d'erreur et cependant l'une peut converger plus vite que l'autre. Prenons $u_n = 1/n$ et $v_n = 1/n^\alpha$ avec $\alpha > 1$. Ces deux suites sont d'ordre un, leur coefficient asymptotique d'erreur vaut un et pourtant $\{ v_n \}$ converge plus vite que $\{ u_n \}$. De plus $\lim_{n \to \infty} \frac{v_n}{u_n^\alpha} = 1$.

La notion d'ordre n'est donc pas assez fine. Il est par conséquent nécessaire d'introduire une notion d'ordre dans la comparaison de la convergence de deux suites pour tenir compte du fait que $\{ v_n \}$ peut converger comme $\{ u_n^\alpha \}$. D'où la définition suivante :

Définition 5 : On dit que $\{ v_n \}$ est α-équivalente à $\{ u_n \}$ si :

$$d(v_n, v) = 0(d^\alpha(u_n, u)) \text{ et si } d^\alpha(u_n, u) = 0(d(v_n, v))$$

On voit que cette définition englobe la définition de l'ordre d'une suite. Il suffit de prendre $v_n = u_{n+1}$. Dire que $\{ u_{n+1} \}$ est α-équivalente à $\{ u_n \}$ revient donc à dire que $\{ u_n \}$ est d'ordre α. α est appelé coefficient d'équivalence de $\{ v_n \}$ par rapport à $\{ u_n \}$.

De même qu'il n'est pas possible de définir un ordre pour n'importe quelle suite, il n'est pas toujours possible de comparer deux suites à l'aide de la notion d'α-équivalence. Comme exemple il suffit de prendre $u_n = 1/n^2$ et $v_n = 1/n$ si n pair et $1/n^3$ sinon.

Théorème 2 : s'il existe, α est unique.

En effet supposons qu'il existe β tel que $\{ v_n \}$ soit β-équivalente à $\{ u_n \}$. On a, en posant $d_n = d(u_n, u)$ et $\delta_n = d(v_n, v)$:

$$C_2 d_n^\alpha \leqslant \delta_n \leqslant C_1 d_n^\alpha \text{ et } C_3 d_n^\beta \leqslant \delta_n \leqslant C_4 d_n^\beta$$

d'où

$$\delta_n \leqslant C_1 d_n^{\alpha-\beta} d_n^\beta \leqslant \frac{C_1}{C_3} d_n^{\alpha-\beta} \delta_n$$

ce qui donne

$$1 \leqslant \frac{C_1}{C_3} d_n^{\alpha-\beta}$$

si $\alpha > \beta$ alors $d_n^{\alpha-\beta}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, d'où $\alpha = \beta$; si $\alpha < \beta$ on écrit $\delta^n \leqslant C^4 d_n^{\beta-\alpha} d_n^\alpha$ et la suite de la démonstration est identique.

Théorème 3 : La relation définie par $\{ u_n \} \backsim \{ v_n \}$ si $\{ u_n \}$ est 1-équivalente à $\{ v_n \}$ est une relation d'équivalence sur $C(E)$ ensemble des suites convergentes d'éléments de E.

En effet $d(v_n, v) = 0(d(u_n, u))$ et $d(u_n, u) = 0(d(v_n, v))$ entraînent

$$d(u_n, u) - d(v_n, v) = 0\,(d(v_n, v))$$

qui est une relation d'équivalence.

Si $\{ u_n \}$ et $\{ v_n \}$ appartiennent respectivement à $C(E)$ et $C(F)$, la 1-équivalence permet d'établir une correspondance entre ces deux ensembles. On écrira $\{ v_n \} \leqslant \{ u_n \}$ si $\exists\, \alpha > 1$ tel que $\{ v_n \}$ soit α-équivalente à $\{ u_n \}$.

Théorème 4 : La relation définie par $\{ v_n \} \lesseqgtr \{ u_n \}$ si $\{ u_n \} = \{ v_n \}$ ou si $\{ v_n \} \leqslant \{ u_n \}$ est une relation d'ordre sur $C(E)$.

On a bien en effet :

réflexivité

$$\{ u_n \} \backsim \{ u_n \}$$

antisymétrie

$$\text{si} \quad \{ u_n \} \lesseqgtr \{ v_n \} \quad \text{et si} \quad \{ v_n \} \lesseqgtr \{ u_n \} \quad \text{alors} \quad \{ u_n \} = \{ v_n \}$$

transitivité

Il est évident que la relation $\leqslant$ est transitive. Le fait que $\lesseqgtr$ ne soit pas une relation d'ordre total explique d'ailleurs pourquoi cette notion d'α-équivalence ne permet pas de comparer n'importe quelles suites.

Prenons maintenant $E = R$. S'il est possible de choisir dans chaque classe d'équivalence une et une seule suite telle que l'ensemble G de ces suites vérifie :

1° toute suite de G est positive dans un voisinage de $+\infty$,

2° toute suite de G (autre qu'une suite constante) tend vers zéro,

3° toute suite dont chaque terme est le produit des termes correspondants de deux suites appartenant à G, appartient elle-même à G. Il en est de même pour toute évaluation à une puissance réelle.

L'ensemble G est alors une échelle de comparaison et il est possible d'obtenir le développement asymptotique de toute suite de $C(R)$ suivant G. Par exemple l'ensemble des suites de la forme $u^n = 1/n^\alpha$ $\alpha \geqslant 0$ est une échelle de comparaison. Il en est de même des suites $u_n = \lambda^n$ avec $\lambda \in [0, 1[$.

Théorème 5 : Deux suites 1-équivalentes ont le même ordre.

Soient $\{ u_n \}$ et $\{ v_n \}$ deux suites 1-équivalentes et supposons que $\{ u_n \}$ soit d'ordre r et $\{ v_n \}$ d'ordre p, on a :

$$d_n = d(u_n, u) \qquad \text{et} \qquad \delta_n = d(v_n, v)$$

$$\left.\begin{aligned} C_2 d_n &\leqslant \delta_n \leqslant C_1 d_n \\ C_4 d_n^r &\leqslant d_{n+1} \leqslant C_3 d_n^r \\ C_6 \delta_n^p &\leqslant \delta_{n+1} \leqslant C_5 \delta_n^p \end{aligned}\right\} \rightarrow K_2 d_{n+1}^{p/r} \leqslant \delta_{n+1} \leqslant K_1 d_{n+1}^{p/r}$$

Or le coefficient d'équivalence est unique d'après le théorème 2, d'où $r = p$. Soit maintenant à comparer, du point de vue numérique, la rapidité de convergence de deux suites. Le matériel dont on dispose est fourni par l'indice d'efficacité : considérons une suite d'ordre r telle que le calcul de chaque terme de la suite nécessite p opérations (on entend par opération une opération arithmétique élémentaire ramenée à l'une quelconque d'entre elles prise comme étalon de mesure. On saura par exemple qu'une multiplication vaut 1,8 additions et une division 2,2 additions). Considérons une seconde suite d'ordre r^2 telle que le calcul de chaque terme de la suite nécessite $2p$ opérations. Il est bien évident que l'on aura rien gagné au point de vue temps de calcul car la seconde suite converge deux fois plus vite mais nécessite deux fois plus de calculs. Ces deux suites ont le même indice d'efficacité [1].

Cet indice est défini par :

$$E(u_n) = r^{1/p}$$

Plus l'indice d'efficacité d'une suite est grand et plus la rapidité de convergence est élevée. Mais on voit que la comparaison de leurs indices d'efficacité n'est pas suffisant pour comparer deux suites puisque la notion d'ordre de convergence n'est pas une notion assez fine. On est donc amené à une nouvelle définition :

Définition 6 : Soient $\{ u_n \}$ et $\{ v_n \}$ deux suites telles que $\{ u_n \}$ soit α-équivalente à $\{ v_n \}$. On appelle indice de comparaison de $\{ u_n \}$ par rapport à $\{ v_n \}$ la quantité :

$$C(u_n, v_n) = \alpha \frac{E(u_n)}{E(v_n)}$$

exemple : en supposant qu'une division vaille une multiplication on obient : $C\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = 2$ alors que $E\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1$ et $E\left(\frac{1}{n}\right) = 1$. Le résultat donné par l'indice de comparaison rend donc mieux compte de la réalité que la comparaison des indices d'efficacité.

L'indice de comparaison possède les propriétés suivantes :

1° $C(u_n, u_n) = 1$

2° $C(u_n, v_n) \cdot C(v_n, u_n) = 1$

3° $C(u_n, v_n) \cdot C(v_n, s_n) = C(u_n, s_n)$

4° Si $C(u_n, v_n) > 1$ alors la vitesse de convergence de $\{ u_n \}$ est supérieure à celle de $\{ v_n \}$.

Signalons enfin que, dans tout ce qui vient d'être dit, on peut remplacer $d(u_n, u)$ par $d(u_{n+1}, u_n)$ et que les suites comparées peuvent appartenir à des espaces métriques distincts.

[1] A. M. Ostrowski, *Solution of equation and systems of equations*, Academic Press, 1966.