REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

STOJAN GORGIEVSKI

Brève communication. Sur la stabilité des schémas extrapoles dans la résolution de problèmes paraboliques

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 5, nº R3 (1971), p. 112-120

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_3_112_0>

R.I.R.O.
(5e année, N° R-3, 1971, p. 112-120)

SUR LA STABILITE DES SCHEMAS EXTRAPOLES DANS LA RESOLUTION DE PROBLEMES PARABOLIQUES

par Stojan GORGIEVSKI [1]

Sommaire. — *On construit des schémas implicites extrapolés d'ordre élevé pour des problèmes de type parabolique par application du procédé d'extrapolation de Richardson.*

On étudie la stabilité inconditionnelle de ces schémas extrapolés dans les cas monodimensionnel et multidimensionnel.

I. POSITION DU PROBLEME

Considérons le système différentiel

$$(1) \qquad \begin{aligned} u'(t) + Au(t) &= f(t) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

issu d'un problème aux dérivés partielles de type parabolique où :

— A est l'opérateur matriciel obtenu pas discrétisation par rapport à la variable d'espace de l'opérateur différentiel du problème (cf. [1]). L'opérateur A sera toujours supposé hermitique, défini-positif, borné.

— $t \rightarrow u(t)$ est une fonction de R dans V_h, où V_h est un espace de dimension finie, muni d'une structure d'espace d'Hilbert dont le produit scalaire sera noté (,) et la norme associée $\| \;\|$.

Laissant de côté la partie analytique de ce problème (nous renvoyons pour cela le lecteur à Lions [4], nous supposerons que le système (1) admet une solution unique dans $C[0, T; V_h]$.

Pour résoudre numériquement le problème (1), nous associons à chacun des schémas habituellement utilisés et inconditionnellement stables (schéma implicite classique, schéma de Grank-Nicholson, schéma dissocié et schéma de directions alternées) une formule de schémas extrapolés qui fournissent des algorithmes nouveaux.

(1) Faculté des Sciences de Besançon, I.U.T., Belfort.

II. SCHEMA IMPLICITE EXTRAPOLE

Le schéma implicite extrapolé est basé sur le procédé d'extrapolation de Richardson (cf. [3]), appliqué au schéma implicite classique :

$$(2) \qquad \begin{aligned}(I + \tau A)u^{p+1} &= u^p + \tau f^p \\ u^0 &= u_0.\end{aligned}$$

Chaque intervalle $[p\tau, (p + 1)\tau]$ est divisé en pas élémentaires de longueur

$$\tau_k = \frac{\tau}{2^{k-1}}.$$

Le schéma implicite extrapolé s'écrit (1) :

$$(3_{11}) \qquad (I + \tau A)u_1^{p+1} = u^p$$

$$(3_{21}) \qquad \left(I + \frac{\tau}{2} A\right)u_2^{p+1/2} = u^p$$

$$(3_{22}) \qquad \left(I + \frac{\tau}{2} A\right)u_2^{p+1} = u_2^{p+1/2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$(3_{k,j+1}) \qquad \left(I + \frac{\tau}{2^{k-1}} A\right)u_k^{p + \frac{j+1}{2^{k-1}}} = u_k^{p + \frac{j}{2^{k-1}}}$$

$$j = 0, 1, \ldots, 2^{k-1} - 1 \quad ; \quad u_k^p = u^p \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n.$$

La solution approchée obtenue par le schéma extrapolé est définie par la combinaison linéaire :

$$\tilde{u}^{p+1} = \sum^{n} T_k^n u_k^{p+1},$$

où T_k^n sont les coefficients d'extrapolation définis par :

$$T_k^n = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{1 - \dfrac{\tau_k}{\tau_i}} \qquad (k \leqslant n)$$

avec les propriétés (cf. [3]) :

$$(p_1) : \sum_{k=1}^{n} T_k^n = 1$$

$$(p_2) : \sum_{k=1}^{n} T_k^n(\tau_k)^{s-1} = 0 \qquad s = 2, \ldots, n$$

$$(p_3) : |T_{k+1}^n| > T_k^n.$$

(1) Nous nous limitons au cas homogène.

En éliminant les valeurs intermédiaires $u_k^{p+\frac{j}{2^{k-1}}}$ (j varie de 0 à $2^{k-1}-1$) de $(3_{k,j+1})$ nous avons :

$$u_k^{p+1} = \left(I + \frac{\tau}{2^{k-1}} A\right)^{-2^{k-1}} u^p,$$

et par conséquent :

$$\tilde{u}^{p+1} = \sum_{k=1}^{n} T_k^n \left(I + \frac{\tau}{2^{k-1}} A\right)^{-2^{k-1}} u^p.$$

La stabilité inconditionnelle du schéma implicite extrapolé (3) est une conséquence de la proposition suivante :

Proposition

Si A est une matrice hermitique, définie, positive, alors pour tout n on a :

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} T_k^n \left(I + \frac{\tau}{2^{k-1}} A\right)^{-2^{k-1}} \right\| < 1. \tag{4}$$

Pour démontrer ce résultat nous utilisons le lemme suivant :

Lemme : Pour tout a positif on a :

(5)

$$\frac{1}{\left(1+\frac{a}{2^{k-1}}\right)^{2^{k-1}}} < \frac{1}{\left(1+\frac{a}{2^{k-2}}\right)^{2^{k-2}}} < \ldots < \frac{1}{\left(1+\frac{a}{2}\right)^{2}} < \frac{1}{1+a} < 1.$$

La démonstration de ce Lemme repose sur le fait que si l'on considère la fonction :

$$y(x) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \exp\left[x \log\left(1 + \frac{a}{x}\right)\right].$$

et sa dérivée :

$$y' = \left[\log\left(1+\frac{a}{x}\right) - \frac{a}{x+a}\right] \exp\left[x \log\left(1+\frac{a}{x}\right)\right],$$

on voit que y' est strictement positive sur $(0, \infty)$ de sorte que y est strictement croissant.

Puisque A est une matrice hermitique, définie, positive :

$$\sum_{k=1}^{n} T_k^n \left(I + \frac{\tau}{2^{k-1}} A\right)^{-2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} T_k^n S \left(I + \frac{\tau}{2^{k-1}} D\right)^{-2^{k-1}} S^*$$

avec $S^*S = I$, où I est l'identité de V_h, et D la matrice des valeurs propres de A :

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

Démontrer la relation (4) revient à démontrer que pour tout n et pour tout $a > 0$, on a :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} T_k^n \frac{1}{\left(1 + \dfrac{a}{2^{k-1}}\right)^{2^{k-1}}} \right| < 1.$$

Nous savons que les T_k^n sont de signe alterné, c'est-à-dire que le premier est positif, le deuxième négatif, le troisième positif, etc...
(cf. la définition des T_k^n).

Utilisons maintenant la première inégalité de (5) :

$$\frac{1}{\left(1 + \dfrac{a}{2^{k-1}}\right)^{2^{k-1}}} - \frac{1}{\left(1 + \dfrac{a}{2^{k-2}}\right)^{2^{k-2}}} < 0.$$

Multiplions cette inégalité par T_k^n ; T_k^n étant positif, nous obtenons la quantité :

$$T_k^n \frac{1}{\left(1 + \dfrac{a}{2^{k-1}}\right)^{2^{k-1}}} - T_k^n \frac{1}{\left(1 + \dfrac{a}{2^{k-1}}\right)^{2^{k-2}}} < 0$$

qui est bien négative.

Ceci peut s'écrire sous la forme :

$$T_k^n \frac{1}{\left(1 + \dfrac{a}{2^{k-1}}\right)^{2^{k-1}}} - [(T_k^n + T_{k-1}^n) - T_{k-1}^n] \frac{1}{\left(1 + \dfrac{a}{2^{k-2}}\right)^{2^{k-2}}} < 0$$

ou encore :

$$T_k^n \frac{1}{\left(1 + \dfrac{a}{2^{k-1}}\right)^{2^{k-1}}} + T_{k-1}^n \frac{1}{\left(1 + \dfrac{a}{2^{k-2}}\right)^{2^{k-2}}} < (T_k^n + T_{k-1}^n) \frac{1}{\left(1 + \dfrac{a}{2^{k-2}}\right)^{2^{k-2}}} \cdot$$

Mais d'après la propriété $(p_3) T_k^n + T_{k-1}^n > 0$, et d'après (5) :

$$\frac{1}{\left(1+\frac{a}{2^{k-2}}\right)^{2^{k-2}}} < \frac{1}{1+a},$$

donc :

$$(6) \quad T_k^n \frac{1}{\left(1+\frac{a}{2^{k-1}}\right)^{2^{k-1}}} + T_{k-1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{a}{2^{k-2}}\right)^{2^{k-2}}} < (T_k^n + T_{k-1}^n) \frac{1}{1+a}$$

valable pour tout n et k.

Il est nécessaire de distinguer les cas $n = 2p$ et $n = 2p + 1$.

Dans les deux cas, on utilise successivement les inégalités (6) pour $k = 2, \ldots, n$; en sommant membre à membre les relations obtenues, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n} T_k^n \frac{1}{\left(1+\frac{a}{2^{k-1}}\right)^{2^{k-1}}} < \sum_{k=1}^{n} T_k^n \frac{1}{1+a},$$

et d'après (p_1) :

$$\sum_{k=1}^{n} T_k^n \frac{1}{\left(1+\frac{a}{2^{k-1}}\right)^{2^{k-1}}} < \frac{1}{1+a}$$

d'où :

$$(7) \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} T_k^n \frac{1}{\left(1+\frac{a}{2^{k-1}}\right)^{2^{k-1}}} \right| < 1.$$

REMARQUE

Le résultat relatif au schéma extrapolé associé au schéma de Crank-Nicholson est assez négatif, car si le schéma de Crank-Nicholson est inconditionnellement stable cette propriété est perdue pour les schémas extrapolés correspondants.

III. SCHEMA EXTRAPOLE DISSOCIE

Pour une question d'écriture nous nous limitons au cas bidimensionnel.

Le problème exact dissocié correspondant à l'équation $u'(t) + Au(t) = f(t)$ se présente sous la forme :

$$u_1'(t) + A_1 u_1(t) = f_1(t) \tag{8}$$

avec les conditions initiales :

pour $p = 0$ $\quad u_1(0) = u_0$

pour $p = 1, ..., N$ $\quad u_1(p\tau + 0) = u_2(p\tau - 0)$

$$u_2'(t) + A_2 u_2(t) = f_2(t) \tag{9}$$

avec les conditions initiales :

pour $p = 0$ $\quad u_2(0) = u_1(\tau - 0)$

pour $p = 1, ..., N$ $\quad u_2(p\tau + 0) = u_1((p + 1)\tau - 0)$,

où $A_1 + A_2 = A$.

Les notations sont celles de Temam (cf. [5]).

Rappelons que lorsque les opérateurs A_1 et A_2 commutent

$$u_2(p\tau + 0) = u(t_p),\ u(t_p)$$

désignant la solution exacte du problème non dissocié au point $t_p = p\tau$.

Au schéma implicite dissocié (1) proposé par [6] :

$$(I + \tau A_1)u^{p+1/2} = u^p \tag{10}$$

$$(I + \tau A_2)u^{p+1} = u^{p+1/2} \tag{11}$$

avec les mêmes conditions initiales qu'en (8) et (9), nous associons les schémas extrapolés : chaque pas fractionnaire servant comme pas de base est divisé en pas élémentaires de longueur $\tau_k = \frac{\tau}{2^{k-1}}$. Le schéma extrapolé correspondant à l'équation (10) sera :

$$(I + \tau A_1)u_1^{p+1/2} = u^p \tag{12_{11}}$$

$$\left(I + \frac{\tau}{2} A_1\right)u_2^{p+1/4} = u_2^p \tag{12_{21}}$$

(1) Pour simplifier nous nous limitons au cas où $f_1(t) = f_2(t) = 0$; $f_1^p = f_2^p = 0$.

$$(12_{22}) \qquad \left(I + \frac{\tau}{2} A_1\right) u_2^{p+1/2} = u_2^{p+1/4}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$(12_{k,j+1}) \quad \left(I + \frac{\tau}{2^{k-1}} A_1\right) u_k^{p+\frac{j+1}{2^k}} = u_k^{p+\frac{j}{2^k}}$$

$$j = 0, 1, \dots, 2^{k-1} - 1 \quad \text{et} \quad u_k^p = u^p \ \forall\, k = 1, 2, \dots, n.$$

La solution approchée au point $t_{p+1/2} = \left(p + \frac{1}{2}\right)\tau$ sera définie comme combinaison linéaire des $u_k^{p+1/2}$.

$$\tilde{u}^{p+1/2} = \sum_{k=1}^{n} T_k^n u_k^{p+1/2}.$$

Cette valeur sert de donnée initiale pour le schéma extrapolé correspondant à l'équation (11) :

$$(13_{11}) \qquad (I + \tau A_2) u_1^{p+1} = \tilde{u}^{p+1/2}$$

$$(13_{21}) \qquad \left(I + \frac{\tau}{2} A_2\right) u_2^{p+3/4} = \tilde{u}^{p+1/2}$$

$$(13_{22}) \qquad \left(I + \frac{\tau}{2} A_2\right) u_2^{p+1} = u_2^{p+3/4}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$(13_{k,j+1}) \quad \left(I + \frac{\tau}{2^{k-1}} A_2\right) u_k^{p+\left(\frac{1}{2}+\frac{j+1}{2^k}\right)} = u_k^{p+\left(\frac{1}{2}+\frac{j}{2^k}\right)}$$

$$j = 0, 1, \dots, 2^{k-1} \quad u_k^{p+1/2} = \tilde{u}^{p+1/2} \quad \forall\, k = 1, 2, \dots, n.$$

La solution approchée au point $t_{p+1} = (p + 1)\tau$ sera définie par :

$$\tilde{u}^{p+1} = \sum_{k=1}^{n} T_k^n u_k^{p+1}.$$

En éliminant les valeurs intermédiaires $u_k^{p+\frac{j}{2^k}}$ de $(12_{k,j+1})$, nous avons :

$$(14) \qquad \tilde{u}^{p+1/2} = \sum_{k=1}^{n} T_k^n \left(I + \frac{\tau}{2^{k-1}} A_1\right)^{-2^{k-1}} u^p.$$

De même en éliminant les valeurs intermédiaires $u_k^{p+\left(\frac{1}{2}+\frac{j}{2^k}\right)}$ de $(13_{k,j+1})$, nous avons :

$$\tilde{u}^{p+1} = \sum_{k=1}^{n} T_k^n \left(I + \frac{\tau}{2^{k-1}} A_2\right)^{-2^{k-1}} \tilde{u}^{p+1/2} \tag{15}$$

L'élimination de $\tilde{u}^{p+1/2}$ donne maintenant :

$$\tilde{u}^{p+1} = \sum_{k=1}^{n} T_k^n \left(I + \frac{\tau}{2^{k-1}} A_1\right)^{-2^{k-1}} \sum_{k=1}^{n} T_k^n \left(I + \frac{\tau}{2^{k-1}} A_2\right)^{-2^{k-1}} u^p.$$

Un raisonnement analogue à celui du § II nous donne les évaluations :

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} T_k^n \left(I + \frac{\tau}{2^{k-1}} A_1\right)^{-2^{k-1}} \right\| < \frac{1}{1 + a_1}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} T_k^n \left(I + \frac{\tau}{2^{k-1}} A_2\right)^{-2^{k-1}} \right\| < \frac{1}{1 + a_2}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{k=1}^{n} T_k^n \left(I + \frac{\tau}{2^{k-1}} A_1\right)^{-2^{k-1}} \sum_{k=1}^{n} T_k^n \left(I + \frac{\tau}{2^{k-1}} A_2\right)^{-2^{k-1}} \right\| \\ &\qquad = \left\| \sum_{k=1}^{n} T_k^n \left(I + \frac{\tau}{2^{k-1}} A_1\right)^{-2^{k-1}} \right\| \\ &\qquad\quad \left\| \sum_{k=1}^{n} T_k^n \left(I + \frac{\tau}{2^{k-1}} A_2\right)^{-2^{k-1}} \right\| \leqslant \frac{1}{1 + a_1} \cdot \frac{1}{1 + a_2} < 1 \end{aligned}$$

d'où la stabilité inconditionnelle du schéma extrapolé dissocié.

REMARQUES

a) Dans le cas de la méthode de directions alternées on retrouve, comme il était prévisible, les difficultés rencontrées au point II pour les schémas extrapolés associés à la méthode de Crank-Nicholson.

b) En ce qui concerne l'ordre de précision des schémas extrapolés en la variable de temps et les résultats numériques (cf. [2]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. AUBIN, *Approximation des espaces de distribution et des opérateurs différentiels* (Thèse, Paris, 1966),

[2] S. GORGIEVSKI, *Extrapolation de Richardson pour certains problèmes de type parabolique* (Colloque d'Analyse Numérique, Aussois, juin 1969).

[3] P. J. LAURENT, *Etude de procédés d'extrapolation de Richardson en Analyse Numérique* (Thèse, Grenoble, 1964).

[4] J. L. LIONS, *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites* (Springer Verlag, 1961).

[5] R. TEMAM, *Sur la stabilité et la convergence de la méthode à pas fractionnaires* (Thèse, Paris, 1967, p. 90).

[6] YANENKO, *Méthode à pas fractionnaires* (en russe) (« Nauka », Novossibirsk 1967), traduction Nepomiastchy, A. Colin, 1968.