Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique

J. C. Miellou

Brève communication. Méthode de l'état adjoint par « relaxation »

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, tome 6, n^{o} R1 (1972), p. 81-87

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_1_81_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, R-1, 1972, p. 81-87)

METHODE DE L'ETAT ADJOINT PAR « RELAXATION »

par J. C. MIELLOU (1)

Résumé. — *Nous explicitons dans le cas de problèmes de contrôle optimal, et de jeux différentiels de systèmes gouvernés par des équations variationnelles elliptiques, une méthode de décomposition du type Gauss-Seidel, dont la mise en œuvre présente des analogies avec celle de la méthode de l'état adjoint classique.*

Cette méthode entre dans le cadre général de la classe d'algorithmes proposée dans [6], [7].

I. NOTATIONS. RAPPELS

Nous reprenons les notations de Lions [5], chap. II.

Soient V et H deux espaces de Hilbert sur $\mathbf{R}$. On désigne par $\| \ \|$ la norme dans V, et $| \ |$ la norme dans H.

On suppose que :

(1.) $V \subset H$, l'injection de V dans H est continue, et V est dense dans H.

On identifie H à son dual, et si V' est le dual de V, on a :

(1.2) $V \subset H \subset V'$, chaque espace étant dense dans le suivant avec injection continue

Soit :

(1.3) $a(u, v)$ forme bilinéaire continue sur V,
V elliptique, c'est-à-dire : $a(v, v) \geqslant \alpha \|v\|^2, \forall v \in V, \alpha > 0$

Soit L une forme linéaire continue sur V, grâce à (1.2) on a :

(1.4) $L(v) = (f, v)$ où $f \in V'$.

Grâce aux hypothèses (1.3), on sait que :

(1.5) $a(u, v) = (Au, v)$ où A est un isomorphisme de V sur V'.

(1) Laboratoire d'Informatique, Faculté des Sciences et des Techniques, La Bouloie Besançon.

On se donne l'espace de Hilbert $\mathcal{U}$ des contrôles et un opérateur

(1.6) $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; V')$.

On considère un système (physique, mécanique, etc...) gouverné par l'opérateur A donné par (1.5). Pour chaque contrôle $u \in \mathcal{U}$, l'état du système est donné par y solution de :

$$Ay = f + Bu, \quad y \in V.$$

du fait que y dépend de la variable u, on note l'état $y(u)$, donc l'équation d'état s'écrit :

(1.7) $Ay(u) = f + Bu, \quad y(u) \in V.$

On considère ensuite l'observation :

(1.8) $z(u) = Cy(u)$, où $C \in \mathcal{L}(V; \mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ étant un espace de Hilbert.

On donne enfin :

(1.9) $N \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{U}')$, N hermitien défini positif : $(Nu, u) \geqslant \nu \|u\|^2_{\mathcal{U}}, \nu > 0$, $\forall u \in \mathcal{U}$

A tout contrôle $u \in \mathcal{U}$, on associe le coût :

(1.10) $J(u) = \|Cy(u) - Zd\|^2_{\mathcal{H}} + (Nu, u)$; où $Zd \in \mathcal{H}$ est donné.

Soit :

(1.11) $\mathcal{U}_{ad}$ un ensemble convexe fermé de $\mathcal{U}$. ($\mathcal{U}_{ad}$ est l'ensemble des contrôles admissibles.)

Le problème de contrôle est alors :

Trouver $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que $J(u) = \inf\limits_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$.

On introduit $\mathcal{H}^{-1}$ le dual de $\mathcal{H}$ et $\Lambda_{\mathcal{H}} = \Lambda$ l'isomorphisme canonique de $\mathcal{H}$ sur M'.

Soit $\Lambda_{\mathcal{U}}$ l'isomorphisme canonique de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}'$ dual de $\mathcal{U}$.

Soit A^* l'adjoint de A, on définit l'état adjoint comme étant la solution $p(v)$ de : $A^*p(v) = C^* \Lambda(Cy(v) - zd)$,

où C^* est l'adjoint de C : $C^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}'; V')$.

D'après [5], Th. 1.4, chap. II, le contrôle optimal est caractérisé par le système :

$$(S_1) \quad \begin{cases} Ay(u) = f + Bu, \\ A^*p(u) = C^* \Lambda(Cy(u) - Zd), \\ u \in \mathcal{U}_{aad} \; (B^*p(u) + Nu, v - u) \geqslant 0, \; \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \end{cases}$$

II. METHODE DE L'ETAT ADJOINT PAR RELAXATION

On considère l'application $u = Tw$ où T est une application de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}_{ad}$ définie par :

(2.1) $Ay(w) - Bw = f$

(2.2) $C^* \Lambda Cy(w) + A^*p(w) = C^* \Lambda Z_d$.

(2.3) $(B^*p(w) + Nu, v - u) \geqslant 0 \ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$ où $u \in \mathcal{U}_{ad}$

Proposition 1. — Sous les hypothèses (1.1), ..., (1.11), l'application T est définie de manière univoque, son domaine étant $\mathcal{U}$; elle prend ses valeurs dans $\mathcal{U}_{ad}$.

Démonstration. — On est dans les conditions d'application du lemme de Lax-Milgram pour résoudre (2.1) d'où $y(w)$, puis $y(w)$ étant connu, pour résoudre (2.2) d'où $p(w)$. (2.3) se résoud par le théorème de Stampacchia sur les inéquations variationnelles d'où : $T(w)$.

Définition. — $u_0 \in \mathcal{U}$ étant donné, nous rappelons méthode de l'état adjoint par relaxation l'algorithme défini par :

$$u^{p+1} = Tu^p \qquad p = 0, 1, \ldots$$

Appelons $\mu = \|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U};V')}$, et $\lambda = \|C\|_{\mathcal{L}(V;\mathcal{H})}$ μ, λ existent d'après (1.6), (1.8).

Proposition 2. — Une condition suffisante pour la méthode de l'état adjoint par relaxation converge est que :

(2.4) $\nu\alpha^2 > \lambda^2\mu^2$

Démonstration. — On considère w_1, w_2, $p(w_1)$, $p(w_2)$, $u_1 = Tw_1$; $u_2 = Tw_2$.

Soit $\delta u = u_1 - u_2$; $\delta w = w_1 - w_2$; $\delta p = p(w_1) - p(w_2)$.

De (2.3) on déduit : $(N\delta u, \delta u) \leqslant (B^*\delta p, \delta u)$, or d'après (2.1), (2.2) : $B^*\delta p = B^*A^{-1*}C^* \Lambda C A^{-1} B\delta w$; d'où d'après (1.9) :

$$\|\delta u\| \leqslant \frac{\lambda^2\mu^2}{\nu\alpha^2} \|\delta w\|. \tag{2.5}$$

III. COMPARAISON AVEC LA METHODE DE L'ETAT ADJOINT CLASSIQUE SUR LE PLAN DE LA VITESSE DE CONVERGENCE

Rappelons cf. [1], [4] la méthode de l'état adjoint classique, appliquée au problème précédemment considéré (nous conservons les notations du § I).

En tout point w de $\mathcal{U}$ le gradient de la fonctionnelle à minimiser est $\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}(B^*p(w) + Nw)$. On considère alors l'application $u = T_\rho w$ définie par :

$$u = \mathrm{Proj}\,(w - \rho\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}(B^*p(w) + Nw))$$

(où Proj est le projecteur orthogonal dans $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}_{ad}$, et ρ est un paramètre réel).

$u_0 \in \mathcal{U}$ étant donné, la méthode de l'état adjoint classique consiste en l'algorithme itératif : $u^{p+1} = T_\rho u^p$ $p = 0, 1, \ldots$

Soit $w_1, w_2 \in \mathcal{U}$; $u_1 = T_\rho w_1$; $u_2 = T_\rho w_2$; $\delta w = w_1 - w_2$; $\delta u = u_1 - u_2$.

Pour un choix optimal du paramètre ρ : $\rho = \dfrac{\nu}{\left(\gamma + \dfrac{\mu^2\lambda^2}{\alpha^2}\right)^2}$

où $\gamma = \|N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})}$.

On a alors l'estimation :

$$\|\delta u\|^2 \leqslant \left(1 - \frac{\nu^2}{\left(\gamma + \dfrac{\mu^2\lambda^2}{\alpha^2}\right)^2}\right)\|\delta w\|^2 \tag{3.1}$$

Les estimations (2.5), (3.1) permettent une comparaison des vitesses « théoriques » de convergence des deux méthodes, comparaison que nous détaillons dans le cas particulier où $N = \nu\Lambda_{\mathcal{U}}$, c'est-à-dire dans le cas $\gamma = \nu$:

$$\text{Soit } x = \frac{\lambda^2\mu^2}{\nu\alpha^2} \text{ Alors } \left(1 - \frac{\nu^2}{\left(\nu + \dfrac{\mu^2\lambda^2}{\alpha^2}\right)^2}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{1}{(1+x)^2}\right)^{1/2}$$

et le problème de la comparaison des vitesses de convergence des deux méthodes revient à l'étude de l'inéquation : $x < \left(1 - \dfrac{1}{(1+x)^2}\right)^{1/2}$ qui est équivalente à :

(3.2) $x^3 + 2x^2 - 2 < 0$.

Le polynome au 1[er] membre de (3.2) a une racine $x_0 \simeq 0{,}839$ entre 0 et 1. On a donc la :

Proposition 3. — Pour $x < x_0$ la méthode de l'état adjoint par « relaxation » est plus rapide (au sens des vitesses de convergence associées aux estimations (2.5), (3.1)) que la méthode classique. Pour $x > x_0$ la méthode classique est plus rapide (et reste convergente lorsque x croît, alors que l'on ne sait plus démontrer la convergence de la méthode « par relaxation » pour $x \geqslant 1$).

IV. METHODE DE L'ETAT ADJOINT DU TYPE « RELAXATION » APPLIQUEE A DES PROBLEMES DE POINT DE SELLE EN THEORIE DES JEUX DE SYSTEMES DECRITS PAR DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Nous reprenons les notations précédentes en considérant toutefois deux espaces de Hilbert de contrôle, $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ au lieu d'un seul précédemment. $\mathcal{U}_{ad}^i$ est un convexe de $\mathcal{U}_i$, $i = 1, 2$. Je renvoie à [3] pour la formulation des problèmes de jeux pour les équations aux dérivées partielles. Rappelons simplement que leurs solutions se caractérisent dans le cas d'équations d'état elliptique par des systèmes de la forme :

$$(4.1)\qquad \begin{cases} Ay := L + B_1u_1 - B_2u_2, \\ A^*p = C^*\Lambda(Cy - Zd), \\ (B_1^*p + N_1u_1, v_1 - u_1) \geqslant 0 \quad , \quad \forall\, v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1 \\ (B_2^*p + N_2u_2, v_2 - u_2) \geqslant 0 \quad , \quad \forall\, v_2 \in \mathcal{U}_{ad}^2 \end{cases}$$

En des notations analogues à celles du § II, on désigne par

$$\mu_i = \|B_i\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}_i;V')}\ i = 1, 2$$

et par ν_i les constantes d'ellipticité de N_i, $i = 1, 2$.

Comme au § II, soit $w = \{w_1, w_2\}$ $w_i \in \mathcal{U}_i$ $i = 1, 2$, supposé connu, on considère l'application $u = T_jw$ où $u = \{u_1, u_2\}$ avec $u_i \in \mathcal{U}_{ad}^i$ $i = 1, 2$ de la manière suivante :

$$(4.2)\qquad \begin{cases} Ay(w) = L + B_1w_1 - B_2w_2, \\ A^*p(w) = C^*\Lambda(Cy(w) - Z_d), \\ (B_i^*p(w) + N_iu_i, v_i - u_i) \geqslant 0 \quad \forall\, v_i \in \mathcal{U}_{ad}^i \quad \text{avec} \quad u^i \in \mathcal{U}_{ad}^i \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Proposition 4. — Sous des hypothèses analogues à (1.1), ..., (1.11), l'application T_J est définie de manière univoque, de domaine $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, et à valeurs dans $\mathcal{U}^1_{ad} \times \mathcal{U}^2_{ad}$. Si de plus :

(4.3) $\dfrac{\lambda^2}{\alpha^2}\left(\dfrac{\mu_1^2}{\nu_1} + \dfrac{\mu_2^2}{\nu_2}\right) < 1$, alors l'algorithme $u^{p+1} = T_J u^p \quad p = 0, 1, \ldots$ où $u^0 \in \mathcal{U}^1 \times \mathcal{U}^2$ est donné, converge fortement dans $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ vers la solution du problème (4.1)

V. REMARQUES ET CONCLUSIONS

Tant dans le cas du contrôle optimal, que des jeux différentiels, nous avons particularisé notre exposé à une méthode de l'état adjoint par relaxation du type Gauss-Seidel

En fait la condition (2.5) (ou (4.3), dans le cas des jeux différentiels), est également une condition suffisante de convergence pour des méthodes du type Jacobi, sur(sous)-relaxation, résultats qui s'obtiennent en appliquant la théorie générale exposée dans [6], [7].

Nous renvoyons à Diguglielmo [2], pour la mise en œuvre de méthodes de sur(sous)-relaxation pour des problèmes de contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations paraboliques, avec choix optimal du paramètre de relaxation.

On trouvera également dans [2] des résultats de discrétisation, en particulier, par la méthode des pas fractionnaires

Pour conclure, remarquons qu'il est important de choisir pour les problèmes de contrôle optimal ou de jeux différentiels la méthode de l'état adjoint classique, ou par relaxation, en tenant compte de leurs vitesses de convergence respectives, dans la mesure où chaque itération nécessite la résolution numérique de deux problèmes aux dérivées partielles.

Indiquons en outre, que la méthode de l'état adjoint par « relaxation » peut également être appliquée dans le cas de systèmes gouvernés par des équations matricielles, ou des systèmes différentiels ordinaires, et que même dans ce cadre technique plus élémentaire elle est, à notre connaissance, originale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. CEA, *Les méthodes de « descente » dans la théorie de l'optimisation* R.I.R.O., n° 13, R3, octobre 1968.

[2] A. DIGUGLIEMO, *Exposé au colloque national d'analyse numérique d'Anglet*, 1971 (à paraître)

[3] B. LEMAIRE, *Problèmes Min-max et applications au contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles linéaires.* Thèse, Paris, octobre 1970.

[4] P. LEMONNIER, *Méthodes de résolution numérique d'un problème de jeux pour un système décrit par des équations aux dérivées partielles.* Thèse, 3e cycle, Paris 1971.

[5] J. L. LIONS, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.* Dunod-Gauthier Villars, 1968.

[6] J. C. MIELLOU, *Opérateurs paramonotones.* Thèse, Grenoble, octobre 1970.

[7] J. C. MIELLOU, *Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel, sur (sous)-relation par Blocs, appliquées à une classe de problèmes non linéaires.* Note aux C.R.A.S., t. 273, p. 1257-1260 (20 décembre 1971), série A.