IOAN TOMESCU

Brève communication. Une caractérisation des graphes k-chromatiques minimaux sans sommet isolé

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, tome 6, n° R1 (1972), p. 88-91
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_1_88_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, R-1, 1972, p. 88-91)

UNE CARACTERISATION DES GRAPHES K-CHROMATIQUES MINIMAUX SANS SOMMET ISOLE

par Ioan TOMESCU (1)

Résumé. — *On obtient le nombre minimal d'arêtes d'un graphe à n sommets, de nombre chromatique k qui n'a pas de sommets isolés et on donne la caractérisation de ces graphes minimaux.*

Dans ce qui suit nous considérons des graphes finis non-orientés $G = (X, U)$ avec X l'ensemble des sommets et U l'ensemble des arêtes [1].

Proposition. Si G est un graphe sans sommet isolé, à n sommets, m arêtes et de nombre chromatique $\gamma(G) = k$, alors

$$m \geqslant \binom{k}{2} + \left\{ \frac{n-k}{2} \right\}$$

où par $\{ x \}$ nous avons noté le plus petit entier plus grand ou égal à x. Pour $n - k$ pair le graphe G ayant ce nombre minimal d'arêtes est unique, et pour $n - k$ impair il y a deux types de graphes qui ont un nombre minimal d'arêtes et qui coïncident pour $k = 2$.

Démonstration. Supposons d'abord que pour tout $x \in X$ le sous-graphe G_x qui s'obtient de G par la suppression du sommet x contient des sommets isolés. Soit y un sommet isolé dans G_x, donc un sommet qui se relie dans G seulement à x.

Mais le sous-graphe G_y contient aussi des sommets isolés, donc $[x, y] \in U$ et les sommets x et y ne sont pas reliés à d'autres sommets du graphe G. Par

(1) Faculté de Mathématiques et de Mécanique, Université de Bucarest.

l'itération de ce raisonnement on voit que si pour tout $x \in X$ le sous-graphe G_x contient des sommets isolés et le graphe G n'a pas de sommets isolés, alors n est pair, $\gamma(G) = 2$ et le nombre des arêtes de ce graphe est égal à

$$m = \frac{n}{2} = \binom{2}{2} + \frac{n-2}{2}.$$

Mais ce nombre est le nombre minimal d'arêtes du graphe G, parce que le graphe G n'a pas de sommets isolés, donc le degré $\mathrm{d}(x)$ de chaque sommet est au moins 1 et

$$2m = \sum_{x \in X} \mathrm{d}(x) \geqslant n \qquad \text{d'où} \qquad m \geqslant \frac{n}{2}.$$

Dans ce cas la proposition est vraie.

La démonstration de la proposition se fait par induction sur n.

Supposons que la propriété est vraie pour tous les graphes G ayant $n' = n - 1$ sommets et de nombre chromatique égal à $k(k \leqslant n - 1)$.

Soit G un graphe à n sommets. Si $\gamma(G) = n$, alors G est un graphe complet à n sommets et la propriété est évidente.

Si $\gamma(G) = k \leqslant n - 1$, soit $x \in X$ un sommet tel que G_x ne contienne pas de sommets isolés. Si un tel sommet n'existe pas, nous avons vu que la proposition est vraie. Nous obtenons deux cas :

a) $\gamma(G_x) = k$ et conformément à l'hypothèse d'induction le nombre minimal d'arêtes du sous-graphe G_x est égal à $\binom{k}{2} + \left\{\frac{n-k-1}{2}\right\}$.

Mais x n'est pas un sommet isolé, donc $\mathrm{d}(x) \geqslant 1$ et le nombre des arêtes du graphe G est supérieur ou égal à

$$\binom{k}{2} + \left\{\frac{n-k-1}{2}\right\} + 1 \geqslant \binom{k}{2} + \left\{\frac{n-k}{2}\right\}$$

Nous obtenons égalité, c'est-à-dire $m = \binom{k}{2} + \left\{\frac{n-k}{2}\right\}$ seulement si $n - k$ est impair, $\mathrm{d}(x) = 1$ et G_x a un nombre minimal d'arêtes.

b) $\gamma(G_x) = k - 1$. En ce cas il y a une partition de l'ensemble des sommets X dont les classes sont des ensembles intérieurement stables de la forme suivante : $\{x\}$, C_1, ..., C_{k-1} et le sommet x est relié par une arête avec au moins un sommet de chaque classe C_1, C_2, ..., C_{k-1}, donc $\mathrm{d}(x) \geqslant k - 1$, puisque au cas contraire nous obtenons $\gamma(G) \leqslant k - 1$, ce qui contredit l'hypothèse.

Donc le nombre des arêtes du graphe G est minoré par le nombre des arêtes de G_x plus $k-1$, et conformément à l'hypothèse d'induction nous obtenons :

$$m \geqslant \binom{k-1}{2} + \left\{\frac{n-1-(k-1)}{2}\right\} + k - 1 = \binom{k}{2} + \left\{\frac{n-k}{2}\right\}$$

l'égalité ayant lieu seulement si $d(x) = k - 1$ et le sous-graphe G_x a un nombre minimal d'arêtes.

En suivant cette démonstration et les cas où les inégalités écrites ci-dessus deviennent des égalités, nous obtenons par induction la caractérisation des graphes G sans sommets isolés, à n sommets et de nombre chromatique k qui ont un nombre minimal d'arêtes sous la forme suivante :

Si $n-k$ est pair, le graphe G qui a un nombre minimal d'arêtes est unique (jusqu'à un isomorphisme près) et il est composé d'un k-sous-graphe complet et de $n-k$ sommets qui sont reliés deux à deux par $\frac{n-k}{2}$ arêtes.

Si $n-k$ est impair, alors il y a deux types de graphes non-isomorphes qui ont un nombre minimal d'arêtes :

Un graphe composé d'un k-sous-graphe complet, de $n-k-1$ sommets qui sont reliés deux à deux par $\frac{n-k-1}{2}$ arêtes et d'un autre sommet qui est relié par une arête à un sommet qui appartient au sous-graphe complet à k sommets. L'autre est composé d'un k-sous-graphe complet, de $n-k-1$ sommets qui sont reliés deux à deux par $\frac{n-k-1}{2}$ arêtes et d'un autre sommet qui est relié par une arête à un sommet qui n'appartient pas au sous-graphe complet à k sommets.

Pour $k = 2$ ces deux types de graphes coïncident.

En effet, au cas *a*) pour obtenir la valeur minimale de m il faut que $n-k-1$ soit pair, donc le sous-graphe G_x ayant un nombre minimal d'arêtes est unique et pour x nous avons deux possibilités de liaison par une arête ainsi que $d(x) = 1$.

Au cas *b*) le sommet x se relie à tous les sommets du sous-graphe complet à $k-1$ sommets de G_x qui a un nombre minimal d'arêtes, parce que au cas contraire nous obtenons $\gamma(G) < k$, ce qui contredit l'hypothèse, donc le graphe minimal doit avoir nécessairement la structure indiquée ci-dessus.

Si nous n'imposons aucune restriction au graphe G à n sommets et de nombre chromatique k, le nombre minimal d'arêtes est égal à $\binom{k}{2}$, parce que entre deux classes quelconques d'une partition de l'ensemble des sommets composée de k ensembles intérieurement stables il y a au moins une arête, au cas contraire $\gamma(G) < k$.

On peut démontrer aisément par induction sur n que le seul graphe qui a ce nombre minimal d'arêtes est composé d'un k-sous-graphe complet et de $n - k$ sommets isolés.

Nous avons obtenu $m \geqslant \frac{k^2 - k}{2} + \frac{n - k}{2}$ ou $k^2 - 2k + n - 2m \leqslant 0$ d'où $k \leqslant 1 + \sqrt{2m - n + 1}$.

Corollaire. Si le graphe G à n sommets et m arêtes n'a pas de sommets isolés, son nombre chromatique vérifie l'inégalité :

$$\gamma(G) \leqslant 1 + \sqrt{2m - n + 1}$$

Cette inégalité devient égalité par exemple pour le graphe complet à n sommets K_n.

A. Ershov et G. Kuzhukhin ont obtenu dans [2] une majoration pour le nombre chromatique d'un graphe connexe à n sommets et m arêtes sous la forme suivante :

$$\gamma(G) \leqslant \frac{3 + \sqrt{9 + 8(m - n)}}{2}$$

d'où on déduit que si le graphe G est connexe et $\gamma(G) = k$, son nombre d'arêtes $m \geqslant \binom{k}{2} + n - k$.

Le graphe connexe qui a ce nombre minimal d'arêtes n'est pas unique.

Par exemple il est composé d'un k-sous-graphe complet et de $n - k$ sommets qui sont reliés chacun par une arête à un sommet du k-sous-graphe complet ou il est composé d'un k-sous-graphe complet et d'une chaîne à $n - k$ sommets qui est reliée par un de ses sommets à un sommet du k-sous-graphe complet.

Pour $k = 3$ un tel graphe connexe minimal est composé aussi d'un polygone impair à q sommets, les autres $n - q$ sommets en se reliant à un sommet du polygone ou ils forment des chaînes qui se relient par un sommet à un sommet du polygone impair.

On pose ainsi le problème de caractériser et de dénombrer les graphes connexes minimaux à n sommets et de nombre chromatique k, problème qui est résolu dans [3].

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
2. A. Ershov et G. Kuzhukhin, « Estimates of the chromatic number of connected graphs », *Dokl. Akad. Nauk*, 142, 2, 1962, p. 270-273.
3. I. Tomescu, *Le nombre des graphes connexes k-chromatiques minimaux aux sommets étiquetés*, C.R. Acad. Sc. Paris, A, 273, 1971, p. 1124-1126.