Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique

J. F. Durand

L'algorithme de Gauss-Seidel appliqué à un problème unilatéral non symétrique

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, tome 6, nº R2 (1972), p. 23-30

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_2_23_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, juillet 1972, R-2, p. 23-30)

L'ALGORITHME DE GAUSS-SEIDEL APPLIQUE A UN PROBLEME UNILATERAL NON SYMETRIQUE

par J. F. DURAND (1)

Résumé. — *Il s'agit ici de montrer que la méthode de Gauss-Seidel permet de déterminer l'élément u de* R^n *tel que*

$Au - b \leqslant 0$
$u - a \leqslant 0$
$(Au - b, u - a)\, R^n = 0,$

lorsque la matrice A est une M-matrice pas forcément symétrique.

Les méthodes de relaxation, plus particulièrement la méthode de Gauss-Seidel permettent de déterminer la solution u d'un problème numérique de minimisation d'une fonctionnelle quadratique $J(v)$ sur un cône convexe fermé K (J. Céa [1], [2]),

$$J(v) = (Av, v)_{\mathbf{R}^N} - 2(b, v)_{\mathbf{R}^N}$$

$$K = \{ v \in \mathbf{R}^N \mid v - a \leqslant 0 \}.$$

où a et b sont deux vecteurs de $\mathbf{R}^N$ et A une matrice de type $N \times N$, symétrique et coercive. Ce problème est équivalent à déterminer u tel que

$$Au - b \leqslant 0$$

$$u - a \leqslant 0$$

$$(Au - b, u - a)_{\mathbf{R}^N} = 0.$$

Le présent travail montre que la méthode de Gauss-Seidel permet de résoudre un problème de ce dernier type dans lequel *l'hypothèse de symétrie de la matrice A*

(1) Maître-Assistant à l'I.U.T. de Nîmes-Montpellier.

est abandonnée. La convergence de cette méthode et l'unicité de la solution sont montrées en prenant pour ensemble des solutions possibles

$$\Omega = \{ v \in \mathbf{R}^N / Av - b \leqslant 0 \quad \text{et} \quad v - a \leqslant 0 \},$$

et en supposant que la matrice A est une M matrice.

L'algorithme étudié ici généralise en fait la version discrète (J. F. Durand [5]) de l'algorithme de l'harmonisation conditionnelle (J. J. Moreau [6]) pour la résolution de problèmes aux limites unilatéraux.

D'autre part, je tiens à remercier M. B. Lemaire pour ses conseils et son aide précieuse.

1. PROBLEME

Étant donné deux éléments a et b de $\mathbf{R}^N$, a pouvant cependant être $+\infty$, et une matrice A réelle de type $N \times N$, trouver x de $\mathbf{R}^N$ tel que :

$$Ax - b \leqslant 0 \tag{1.1}$$

$$x - a \leqslant 0 \tag{1.2}$$

$$(Ax - b, x - a) = 0. \tag{1.3}$$

Les conditions (1.1) et (1.2) signifient que les composantes des vecteurs $Ax - b$ et $x - a$ sont négatives ou nulles. La nullité du produit scalaire dans (1.3) associée à (1.1) et (1.2) signifie que pour toute composante de $x - a$ non nulle, la composante correspondante de $Ax - b$ est nulle.

$$\{ Ax - b \}_i \{ x - a \}_i = 0 \quad \text{pour tout} \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.4}$$

On supposera que A est une M matrice (R. S. Varga [3]), c'est-à-dire satisfait aux conditions suivantes :

• A est une Z matrice, i.e., A est une matrice à coefficients diagonaux positifs et coefficients hors diagonaux négatifs ou nuls.

$$a_{ii} > 0 \quad \text{et} \quad a_{ij} \leqslant 0 \quad \text{si} \quad i \neq j. \tag{1.5}$$

• A est régulière et $A^{-1} \geqslant 0$. (1.6)

REMARQUE : Si a est suffisamment grand, c'est-à-dire,

$$a \geqslant A^{-1} b$$

la solution x sera celle d'un problème linéaire classique :

$$Ax = b.$$

2. ENSEMBLE Ω DES SOLUTIONS POSSIBLES

Soit Ω l'ensemble suivant :

$$\Omega = \{ y \in \mathbf{R}^N / Ay - b \leqslant 0 \quad \text{et} \quad y - a \leqslant 0 \}.$$

On vérifie aisément que Ω est convexe, fermé et que :

$$\forall\, y \in \Omega \qquad (Ay - b, y - a) \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Le vecteur b étant fini, la condition (1.6) implique que Ω est borné supérieurement

$$\forall\, y \in \Omega \qquad y_i \leqslant \inf(a_i, \{ A^{-1}\, b \}_i) \qquad i = 1, 2, \dots, N.$$

Montrons que Ω est non vide. La matrice A étant carrée $N \times N$ et régulière, l'ensemble $P = \{ y \in \mathbf{R}^N / Ay - b \leqslant 0 \}$ est un cône convexe polyédrique de sommet $A^{-1}b$ et d'intérieur non vide. D'autre part d'après (1.6)

$$\forall\, y \in P \qquad y \leqslant A^{-1}\, b. \tag{2.2}$$

Soit z un point intérieur à P (tel que $Az < b$, *p.e.*, $z = A^{-1}(b - \varepsilon)$ où ε est un vecteur > 0), considérons la demi droite D issue de $A^{-1}\, b$, passant par z.

$$D = \{ y \in \mathbf{R}^N / y = A^{-1}\, b + \lambda(z - A^{-1}\, b) \quad , \quad \lambda \in \mathbf{R}_+ \}.$$

Puisque z est intérieur à P et d'après (2.2)

$$z - A^{-1}\, b < 0.$$

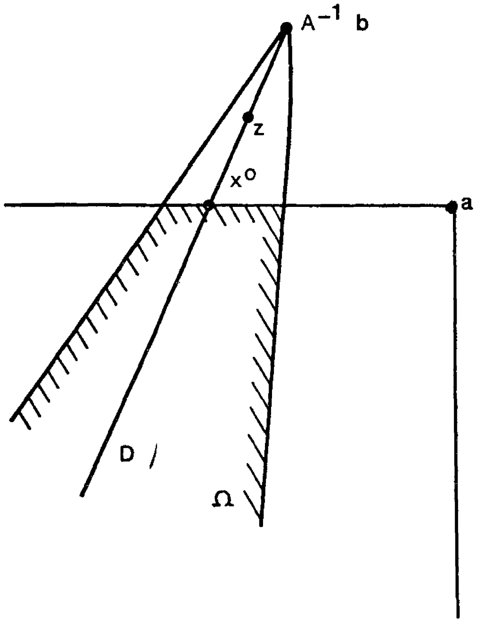
L'intersection de D avec le translaté de l'orthan négatif

$$\{ y \in \mathbf{R}^N / y \leqslant a \}$$

est donc non vide; on peut prendre pour cela :

$$\lambda \geqslant \max \left\{ 0, \max_{i=1,\dots,N} \frac{\{ a - A^{-1}\, b \}_i}{\{ z - A^{-1}\, b \}_i} \right\}. \tag{2.3}$$

Pour obtenir un point de Ω, on pourra prendre, par exemple, le point x^0 de D correspondant à l'égalité dans (2.3).



3. CARACTERISATION DE LA SOLUTION DU PROBLEME

Proposition 1 : Si x est solution du problème, c'est le plus grand élément de Ω.

Démonstration :

Montrons d'abord que si x existe :

$$x = \sup_{y \in \Omega} y. \tag{3.1}$$

Soit $I = \{ i \in \{ 1, 2, ..., N \} / x_i < a_i \}$.

Pour tout $i \notin I \quad x_i = a_i \geqslant y_i$, ce qui montre (3.1) quel que soit i n'appartenant pas à I; en particulier lorsque l'ensemble I est vide, (3.1) est vérifiée pour toutes les composantes.

Les conditions (1.4) impliquent

$$\{ Ax - b \}_i = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad i \in I,$$

ou encore en posant

$$z = y - x,$$

$$\forall\, y \in \Omega, \text{ pour tout } i \in I \sum_{j=1}^{N} a_{ij} z_j \leqslant 0. \tag{3.2}$$

Rappelons maintenant un résultat classique énoncé par Fiedler et Ptak [4] :

Si A est une matrice de classe Z, les propositions suivantes sont équivalentes :

— A^{-1} existe et $A^{-1} \geqslant 0$.

— Il existe une matrice diagonale D dont tous les éléments diagonaux sont positifs telle que $ADe > 0$ (où e est le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1), c'est-à-dire :

Il existe D diagonale telle que $d_{jj} > 0$ et

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} d_{jj} > 0. \tag{3.3}$$

La condition (3.2) peut s'écrire :

$$\forall\, y \in \Omega, \qquad \text{pour tout } i \in I \quad \sum_{j=1}^{N} a_{ij} d_{jj} \left(\frac{z_j}{d_{jj}} \right) \leqslant 0.$$

Posons :

$$M = \sup_{j \in I} \frac{z_j}{d_{jj}},$$

l'ensemble I peut s'écrire :

$$\begin{aligned} I &= I' \cup I'' \\ I' &= \left\{ j \in I \Big/ \frac{z_j}{d_{jj}} = M \right\} \quad , \quad I' \neq \emptyset \\ I'' &= \left\{ j \in I \Big/ \frac{z_j}{d_{jj}} < M \right\}. \end{aligned}$$

Les conditions (1.5) et (3.3) impliquent que M est négatif ou nul, en effet :

$$\forall\, i \in I' \quad \underbrace{M \sum_{j \in I} a_{ij} d_{jj}}_{> 0} + \sum_{j \in I''} \underbrace{a_{ij} d_{jj} \left(\frac{z_j}{d_{jj}} - M \right)}_{\geqslant 0} + \sum_{j \notin I} \underbrace{a_{ij} z_j}_{\geqslant 0} \leqslant 0.$$

Finalement, M négatif ou nul et les d_{jj} positifs impliquent

$$z_j \leqslant 0 \qquad \text{pour tout} \qquad j \in I \qquad \text{(Q.E.D.)}$$

L'unicité de la solution résulte de ce que la borne supérieure d'un ensemble pour la relation d'ordre $\geqslant$ est unique.

Proposition 2 : Parmi tous les éléments de Ω, x, s'il existe, confère son minimum à la fonction J qui applique Ω dans $\mathbf{R}_+$.

$$y \to J(y) = y^T A y - (a^T A + b^T) y + b^T a.$$

Démonstration :

On vérifie d'après (2.1) que :

$$J(y) = (Ay - b, y - a) \geqslant 0.$$

La condition (1.3) implique :

$$J(x) = \min_{y \in \Omega} J(y).$$

4. CONSTRUCTION DE LA SOLUTION PAR L'ALGORITHME DE GAUSS-SEIDEL

Soit S l'application de $\mathbf{R}^N$ dans lui-même qui à tout vecteur u fait correspondre $S(u)$ de composantes :

$$\{ S(u) \}_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} u_j \right] . \tag{4.1}$$

Étant donné un indice p appartenant à $\{ 1, 2, ..., N \}$, l'application γ_p de $\mathbf{R}^N$ dans lui-même est définie par :

$$u \to \gamma_p(u) \begin{cases} \{ \gamma_p(u) \}_i = u_i \qquad \text{pour tout} \qquad i \neq p. & (4.2) \\ \{ \gamma_p(u) \}_p = \min (\{ S(u) \}_p, a_p). & (4.3) \end{cases}$$

Par cette opération une seule composante de u est modifiée.

Proposition : L'ensemble Ω est stable par γ_p. D'autre part,

$$\forall\, u \in \Omega \quad , \quad \gamma_p(u) \geqslant u. \tag{4.4}$$

Démonstration :

Montrons d'abord (4.4). Puisque u appartient à Ω :

$$Au - b \leqslant 0 \tag{4.5}$$

$$u - a \leqslant 0. \tag{4.6}$$

D'après (4.2) il suffit de vérifier (4.4) pour la $p_i^{\text{ième}}$ composante.

La condition (1.5) permet d'écrire (4.5) sous la forme :

$$\{ S(u) \}_i \geqslant u_i \qquad \text{pour tout} \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{4.7}$$

Si $\{ S(u) \}_p < a_p$, (4.3) et (4.7) impliquent :

$$\{ \gamma_p(u) \}_p = \{ S(u) \}_p \geqslant u_p.$$

Si $\{ S(u) \}_p \geqslant a_p$, (4.3) et (4.6) impliquent :

$$\{ \gamma_p(u) \}_p = a_p \geqslant u_p.$$

En résumé, γ_p appliquée à un vecteur u de Ω ne modifie, en l'augmentant, que la $p^{\text{ième}}$ composante de u.

L'ensemble Ω est stable par γ_p signifie :

$$\forall\, u \in \Omega \qquad A\, \gamma_p(u) - b \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \gamma_p(u) - a \leqslant 0.$$

La seconde relation est évidente d'après la construction de γ_p, vérifions la première :

Les conditions (1.5) et (4.4) donnent, pour tout $i \neq p$,

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} \{ \gamma_p(u) \}_j = \sum_{j \neq p} a_{ij} u_j + a_{ip} \{ \gamma_p(u) \}_p \leqslant \sum_{j \neq p} a_{ij} u_j + a_{ip} u_p \leqslant b_i.$$

D'autre part, (1.5) et (4.3) donnent :

$$\sum_{j=1}^{N} a_{pj} \{ \gamma_p(u) \}_j = \sum_{j \neq p} a_{pj} u_j + a_{pp} \{ \gamma_p(u) \}_p \leqslant \sum_{j \neq p} a_{pj} u_j + a_{pp} \{ S(u) \}_p = b_p.$$

Remarquons que les démonstrations de la stabilité de Ω par γ_p et de la croissance de γ_p définie sur Ω n'utilisent que les propriétés (1.5) de A, c'est-à-dire que A est une Z matrice.

Algorithme de Gauss-Seidel

Soit Γ l'application de R^N dans lui-même définie par :

$$u \to \Gamma(u) = \gamma_N \circ \gamma_{N-1} \circ \ldots \circ \gamma_2 \circ \gamma_1(u). \tag{4.8}$$

De façon évidente Ω est stable par Γ et

$$\forall\, u \in \Omega \qquad \Gamma(u) \geqslant u. \tag{4.9}$$

Proposition : La suite $\{ x^n \}$ définie par

$$x^0 \in \Omega \tag{4.10}$$

$$x^{n+1} = \Gamma(x^n) \tag{4.11}$$

est croissante, majorée; elle converge vers la solution x du problème.

Démonstration :

Il est toujours possible de réaliser (4.10) puisque Ω est non vide (pour la construction de x^0 voir le § 2). D'autre part, la ième composante de x^{n+1} est donnée par les formules classiques :

$$\tilde{x}_i^{n+1} = \{ S[\gamma_{i-1} \circ \dots \circ \gamma_1(x^n)] \}_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{n+1} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^n \right]$$
$$x_i^{n+1} = \min(\tilde{x}_i^{n+1}, a_i).$$

D'après (4.9) la suite est croissante et majorée puisque Ω est borné supérieurement. Soit $\bar{x}$ sa limite : $\bar{x}$ appartient à Ω puisque Ω est fermé et vérifie donc (1.1) et (1.2).

D'autre part Γ est continue comme composition d'applications continues γ_p,

$$\bar{x} = \Gamma(\bar{x})$$

c'est-à-dire, pour tout $i = 1, 2, \dots, N$, $\bar{x} = \gamma_i(\bar{x})$.

Donc, d'après (4.3) :

$$\bar{x}_i = \{ S(\bar{x}) \}_i \qquad \text{si} \qquad \bar{x}_i \neq a_i$$
$$\{ A\bar{x} - b \}_i \{ \bar{x} - a \}_i = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad i = 1, 2, \dots, N. \tag{1.4}$$

La limite $\bar{x}$ de la suite $\{ x^n \}$ satisfait à (1.1), (1.2) et (1.4) : c'est la solution x du problème.

En résumé, l'hypothèse « A est une Z matrice » permet de construire une suite croissante $\{ x^n \}$ d'éléments de Ω. L'hypothèse « $A^{-1} \geqslant 0$ » permet de montrer d'une part qu'on peut choisir x^0 dans Ω puisque Ω est non vide, d'autre part que $\{ x^n \}$ est majorée puisque Ω est borné supérieurement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Céa, *Recherche numérique d'un optimum dans un espace produit* (polycopié Fac. sc. de Rennes).

[2] J. Céa, *Optimisation théorie et algorithmes*, Dunod, 1971, pp. 142-146.

[3] R. S. Varga, *Matrix iterative analysis*, Prentice-Hall, 1962.

[4] Fiedler Ptak, « On matrices with positive off diagonal elements and positive principal minors », *Czec. Math. J.*, 12 (87), pp. 382-400 (1962).

[5] J. F. Durand, *Résolution numérique de problèmes aux limites sous-harmoniques* thèse de 3e cycle, Fac. de Sc. Montpellier, 1968.

[6] J. J. Moreau, *Majorantes sur-harmoniques minimales d'une fonction continue* Séminaire d'Analyse unilatérale, Fac. Sc. Montpellier, 1968.