REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE INFORMATIQUE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. MATHÉMATIQUE

MICHEL GONDRAN

# Brève communication. Programme en nombres entiers sans contraintes : génération des optimums locaux dans le cas quadratique

*Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique*, tome 6, nº R2 (1972), p. 80-83

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_2_80_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, juillet 1972, R-2, p. 80-83)

# PROGRAMME EN NOMBRES ENTIERS SANS CONTRAINTES : GENERATION DES OPTIMUMS LOCAUX DANS LE CAS QUADRATIQUE

par Michel GONDRAN (1)

Résumé. — *On donne ici une génération des optimums locaux d'un programme quadratique entier en utilisant une transformation non unimodulaire.*

La discontinuité des fonctions à variables entières permet d'utiliser efficacement la pénalisation (cf. Hammer et Rudéanu [6] et Gondran [5]).

On obtient alors un programme en nombres entiers sans contraintes. La définition et la caractérisation d'optimums locaux se font alors naturellement (cf. Coquet [1]). Dans le cas quadratique ces optimums locaux seront les points entiers intérieurs à un parallélotope. A l'aide d'une transformation non unimodulaire nous donnons ici une génération de ces points plus légère que celle donnée par Fiorot dans [2].

Considérons le programme entier sans contraintes

$$(P)\begin{cases}\text{Minimiser } f(x)\\ \text{pour } x \in Z^n\end{cases}$$

## 1. MINIMUMS LOCAUX

On appellera *voisinage* d'un point entier $\bar{x}$ les $2n$ points entiers dont la distance (dans $L^p(Z^n)$ avec $0 < p < +\infty$) à $\bar{x}$ est égale à 1.

On dira alors qu'un point $\bar{x}$ est un *minimum local* si $f(\bar{x})$ est le minimum de $f$ dans le voisinage de $\bar{x}$.

(1) E.D.F., Direction des Études et Recherches, Service I.M.A.

En posant :

$$\Delta_i^+ f(x) = f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$$

$$\Delta_i^- f(x) = f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i - 1, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$$

pour $i$ de 1 à $n$

et $\Delta f = (\Delta^+ f, \Delta^- f)$

une CNS pour que $\bar{x}$ soit un minimum local est que :

$$\Delta f \geqslant 0. \tag{1}$$

Remarque 1 : L'inéquation (1) est un CN d'optimalité pour le programme $(P)$.

## 2. GENERATION DES MINIMUMS LOCAUX POUR UNE FONCTION QUADRATIQUE

Considérons maintenant la fonction quadratique

$$f(x) = x^t Q x + 2p^t x$$

où $Q$ est une $nxn$ matrice définie positive à coefficients entiers et $p$ un $n$-vecteur à coefficients entiers.

La condition d'optimalité s'écrit ici :

$$2|Q_i x + p_i| \leqslant q_{ii} \tag{2}$$

Effectuons le changement de variables :

$$y_i = Q_i x + p_i \tag{3}$$

Dans la transformation inverse les $x_i$ seront entiers si et seulement si les $y_i$ vérifient une équation linéaire dans un groupe fini $G$ d'ordre $\Delta = |\det Q|$ (cf. [3] et [4]).

**Théorème :** *Les minimums locaux de* $(P)$ *sont obtenus par* (3) *à partir des solutions du système.*

$$(Q) \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} g^i y_i \equiv g^0 \quad (G) \\ y \in Z^n, \qquad |y_i| \leqslant \left[\dfrac{q_{ii}}{2}\right]. \end{cases}$$

Remarque 2 : Le nombre approximatif des solutions est $\dfrac{\prod_{i=1}^{n} q_{ii}}{\Delta}$.

REMARQUE 3 : Le minimum de $(P)$ est le minimum local minimisant $y^t Q^{-1} y$, cad la norme $Q^{-1}$ du gradient.

La résolution du système $(Q)$ peut alors se faire par une exploration exhaustive de deux façons différentes :

*a*) Faire varier les $y_i$ de $-\left[\frac{q_{ii}}{2}\right]$ à $+\left[\frac{q_{ii}}{2}\right]$, $i$ de 1 à $n$.

— Calculer chaque fois $R \equiv \sum_{i=1}^{n} g^i y_i - g^0$ en remarquant que

$$R(y_1, \dots, y_i + 1, \dots, y_n) \equiv R(y_1, \dots, y_i, \dots, y_n) + g^i.$$

— Chaque fois que $R \equiv 0$, on a un minimum local et on calcule $y^t Q^{-1} y$.

*b*) Si l'équation linéaire dans le groupe fini $G$ peut s'écrire :

$$y_1 \equiv \sum_{i=2}^{n} h^i y_i + h^0 \tag{4}$$

— On fait varier les $y_i$ de $-\left[\frac{q_{ii}}{2}\right]$ à $+\left[\frac{q_{ii}}{2}\right]$, $i$ de 2 à $n$.

— On calcule chaque fois $y_1$ par (4) en remarquant que

$$y_1(y_2, \dots, y_i + 1, \dots, y_n) \equiv y_1(y_2, \dots, y_i, \dots, y_n) + h^i$$

— Chaque fois qu'un représentant de $y_1$ est plus petit que $\left[\frac{q_{11}}{2}\right]$, on a un minimal local et on calcule $y^t Q^{-1} y$.

EXEMPLE

$$(P) \begin{cases} \operatorname{Min} f(x) = 13x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18x_1 + 12x_2 \\ x \in Z^2 \end{cases}$$

Le changement de variable sera :

$$y_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = 13x_1 - 4x_2 - 9$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2} = -4x_1 + 5x_2 + 6$$

Les minimums locaux vérifient alors le système :

$$(Q) \begin{cases} y_1 + 40y_2 \equiv 35 \pmod{49} \\ y \in Z^2, \quad |y_1| \leqslant 6, \quad |y_2| \leqslant 2 \end{cases}$$

Pour résoudre $(Q)$ utilisons l'exploration $b)$ : faisons donc varier $y_2$ de $-2$ à $+2$,

| $y_2$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $17$ | $-23$ | $-14$ | $-5$ | $4$ |

D'où 2 minimums locaux :

$$y = (-5, 1) \quad \text{avec} \quad y^t Q^{-1} y = 2$$

$$y = (4, 2) \quad \text{avec} \quad y^t Q^{-1} y = 4$$

Le minimum du programme $(P)$ correspond donc à $y = (-5, 1)$, d'où la solution optimale $x = (0, -1)$.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] G. Coquet, Communication privée, mars 1967.

[2] J. Ch. Fiorot, « Génération des points entiers d'un parallélotope de $R^n$ », *CRAS*, Paris, série A, t. 270, 9 févr. 1970, p. 395-398.

[3] R. E. Gomory, *On the relation between integer and non integer solutions to linear programs*, Proceeding of the National Academy of sciences, vol. 53 (1965).

[4] M. Gondran, « Programmation entière non linéaire », *RIRO*, 4e année, R-3, 1970, p. 107-110 et *C.R.A.S.*, Paris, t. 272, p. 1593-5, 14 juin 1971, série A.

[5] M. Gondran, « Programme quadratique en variables bivalentes avec contraintes d'égalités ». Note EDF HI 655/02 du 4 octobre 1971.

[6] P. Hammer et S. Rudeanu, *Boolean Methods in Operations research and related areas*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1968, Dunod, Paris, 1970.