Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique

Michel Valadier

Sur le filtre de Kalman-Bucy en temps continu

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, tome 6, nº R2 (1972), p. 9-22

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_2_9_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, juillet 1972, R-2, p. 9-22)

SUR LE FILTRE DE KALMAN-BUCY EN TEMPS CONTINU

par Michel VALADIER [1]

Résumé. — *Dans la littérature le filtre de Kalman-Bucy est présenté sous forme d'équation différentielle stochastique. Le but de cet article est de montrer, sous l'hypothèse que certains coefficients sont fonctions absolument continues du temps, que l'équation peut être résolue pour chaque trajectoire du processus observation comme une équation différentielle déterministe. Le résultat est démontré en utilisant les mesures cylindriques et des calculs de Bensoussan.*

INTRODUCTION

Le filtre de Kalman a de multiples applications car il permet de tirer le meilleur parti de l'information bruitée dont on dispose (cf. le livre de Faurre). Le filtre de Kalman en temps discret est suffisant pour beaucoup d'applications. Le temps continu est intéressant, pour le mathématicien, parce qu'il faut introduire le bruit blanc, et que la démonstration se complique, pour tout le monde, dans la mesure où on est curieux de savoir ce qui se passe dans ce cas limite, et aussi pour certaines applications où le temps continu est essentiel : systèmes régis par des équations aux dérivées partielles (cf. Bensoussan) et jeux différentiels stochastiques (théorie encore peu développée).

Dans cet article on démontre la propriété du filtre en temps continu et en dimension finie. On s'est attaché, en faisant des hypothèses de régularité sur les coefficients, à montrer que l'équation du filtre (4) n'est pas seulement une équation différentielle stochastique, mais s'applique aux trajectoires du processus observation.

On aurait pu se ramener aux résultats de Wonham ou Bensoussan [2], mais il nous a paru intéressant de rédiger complètement la démonstration. Le résultat est proche de Bensoussan [2] chap. 6, et les calculs sont inspirés de Bensoussan [1] chap. 3, p. 178 (méthode du découplage). L'avantage est qu'on ne parle pas d'équations différentielles stochastiques, et que le lecteur a seulement besoin de

(1) Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier.

quelques connaissances classiques en probabilités, de savoir ce qu'est le mouvement brownien ou d'en admettre l'existence, et, s'il va jusqu'à lire la démonstration, de connaître les promesures (ou mesures cylindriques, cf. l'exposé de Bourbaki).

Présentation formelle du filtre de Kalman-Bucy

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\dot{v}, x(0) = x_0 & (1) \\ \dot{y} = Hx + \dot{w}, y(0) = 0 & (2) \end{cases}$$

On note $\dot{x}$ pour $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,

— A, B, H sont des matrices respectivement (n, n), (n, k), (m, n), dépendant du temps,

— v est une fonction continue, trajectoire du mouvement brownien à valeurs dans $\mathbf{R}^k$,

— w est une fonction continue, trajectoire du mouvement brownien à valeurs dans $\mathbf{R}^m$,

— x_0 est un point aléatoire de $\mathbf{R}^n$, gaussien, de moyenne $\hat{x}_0$, de covariance P_0,

— x_0, v et w sont indépendants,

— $x(t)$ est l'état du système, y est l'observation.

Le problème est : donner une loi conditionnelle de $x(T)$ connaissant y sur $[o, T]$. Comme tout est gaussien, on peut s'attendre à ce que cette loi conditionnelle soit de covariance indépendante de y, et de moyenne fonction affine de y (cf. en dimension finie le théorème 3, p. 92 de Barra, qui est d'ailleurs le fondement du filtre de Kalman en temps discret).

La covariance sera $P(T)$, où P est solution de l'équation, dite de Ricatti :

$$\dot{P} = AP + PA' + BB' - PH'HP, P(0) = P_0 \tag{3}$$

(on note A' la transposée de A).

La moyenne $\hat{x}_y(T)$ sera donnée par l'équation différentielle.

$$\dot{\hat{x}}_y = A\hat{x}_y + K(\dot{y} - H\hat{x}_y), \hat{x}_y(0) = \hat{x}_0 \qquad \text{où} \qquad K = PH'. \tag{4}$$

Fait remarquable, cette équation est valable pour T quelconque. On dit qu'on a la propriété de récursivité, et c'est pour cela qu'on utilise le mot filtre : si on peut réaliser par un circuit électrique l'équation (4), on fait entrer $y(t)$ au fur et à mesure que l'on observe, et on obtient à chaque instant la moyenne $\hat{x}_y(t)$.

Hypothèses techniques

L'équation (1) n'a pas de sens, à moins de supposer B indéfiniment dérivable (problème du produit de la distribution $\dot{v}$ et de la fonction B). On va supposer B absolument continue et A intégrable, et on remplace $B\dot{v}$ par $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Bv) - \dot{B}v$ $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right.$ est prise au sens distribution$\left.\right)$:

$$\dot{x} = Ax + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Bv) - \dot{B}v,\ x(0) = x_0. \tag{1 bis}$$

Cette équation a, dans $\mathcal{C}([0, T], \mathbf{R}^n)$, au plus une solution, car l'équation homogène n'a que la solution nulle. Soit Φ la résolvante associée à A. Alors (1 *bis*) admet la solution suivante :

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t, 0)x_0 + B(t)v(t) + \displaystyle\int_0^t \Phi(t, s)[A(s)B(s) - \dot{B}(s)]v(s)\,\mathrm{d}s \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - B(0)v(0). \end{cases} \tag{1 ter}$$

On prend comme espace de probabilité de base

$$\Omega_1 = \mathbf{R}^n \times \mathcal{C}([0, T], \mathbf{R}^k) \times \mathcal{C}([0, T], \mathbf{R}^m)$$

muni de la probabilité produit de : la loi gaussienne de moyenne $\hat{x}_0$ de covariance P_0 sur $\mathbf{R}^n$, et des mesures de Wiener (loi du mouvement brownien) sur les deux derniers facteurs (cf. par exemple Bourbaki, § 6, n° 7). On notera $x_1(t)$ la variable aléatoire sur Ω_1 dont la valeur en (x_0, v, w) est donnée par (1 *ter*). Soit également

$$y_1(t) = \int_0^t H(s)x_1(s)\,\mathrm{d}s + w(t) - w(0) \tag{2 bis}$$

On suppose H absolument continue.

De la même façon que pour l'équation (1), on remplace dans (4), $K\dot{y}$ par $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Ky) - \dot{K}y$ ($K = PH'$ est absolument continue) :

$$\dot{\hat{x}}_y = (A - KH)\hat{x}_y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Ky) - \dot{K}y,\ \hat{x}_y(0) = \hat{x}_0. \tag{4 bis}$$

Si Ψ est la résolvante associée à $A - KH$, on a explicitement

$$\hat{x}_y(t) = \Psi(t, 0)\hat{x}_0 + K(t)y(t) + \int_0^t \Psi(t, s)[(A(s) - K(s)H(s))K(s) - \dot{K}(s)]y(s)\,\mathrm{d}s. \tag{4 ter}$$

Formulation du résultat

L'équation (4 *bis*) a une solution unique pour toute $y \in \mathcal{C}([0, T], \mathbf{R}^m)$, c'est-à-dire pour toute valeur possible de l'observation y_1. Le résultat à montrer est que la loi gausienne $L(y)$, de moyenne $\hat{x}_y(T)$ et de covariance $P(T)$, est une loi conditionnelle de $x_1(T)$ sachant $y_1 = y$. De façon plus précise, notons L_{es} la loi sur $\mathbf{R}^n \times \mathcal{C}([0, T], \mathbf{R}^m)$ de $(x_1(T), y_1)$ et L_s la loi de y_1 (e = état, s = sortie). On doit avoir, pour tout U borélien de $\mathbf{R}^n$ et tout V borélien de $\mathcal{C}([0, T], \mathbf{R}^m)$

$$L_{es}(U \times V) = \int_V L(y)(U) L_s(\mathrm{d}y)$$

(cf. Neveu, III-2 pour l'intégration de probabilités de transition) ou encore

$$L_{es} = \int (L(y) \otimes \delta_y) L_s(\mathrm{d}y)$$

(δ_y désigne la masse de Dirac en y).

Introduction des promesures

Soit
$$\Omega_2 = \mathbf{R}^n \times L^2([0, T], \mathbf{R}^k) \times L^2([0, T], \mathbf{R}^m)$$

muni de la promesure (ou mesure cylindrique, le terme promesure est dû à Bourbaki) produit de : la loi gaussienne de moyenne $\hat{x}_0$ de covariance P_0 sur $\mathbf{R}^n$, et des promesures gaussiennes centrées de covariance le carré de la norme (on considère $\mathbf{R}^n$, ... comme espaces euclidiens) : la covariance du produit est la forme quadratique

$$(x, \varphi, \psi) \longmapsto (P_0 x \mid x) + \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 .$$

Notons $\int$ l'opération de primitive : $\int \varphi$ est la fonction $\int_0^{\cdot} \varphi(s)\, \mathrm{d}s$. Alors l'application $(x, \varphi, \psi) \longmapsto \left(x, \int \varphi, \int \psi\right)$, de Ω_2 dans Ω_1, transforme la promesure sur Ω_2 en la probabilité déjà mise sur Ω_1 (cf. Bourbaki). On a le droit de considérer des variables aléatoires affines continues sur Ω_2.

Lorsque $(x_0, v, w) = \left(x_0, \int \varphi, \int \psi\right)$, (1 *bis*) (2 *bis*) et (4 *bis*) deviennent

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\varphi,\ x(0) = x_0 \\ \dot{y} = Hx + \psi,\ y(0) = 0 \\ \dot{\hat{x}}_y = Ax_y + K(\dot{y} - H\hat{x}_y) \end{cases}$$

On notera éventuellement x_2, y_2 pour insister sur le fait que l'on considérera ces variables aléatoires sur Ω_2.

Théorème. — *L'équation différentielle*

$$\dot{P} = AP + PA' + BB' - PH'HP, \quad P(0) = P_0 \tag{3}$$

a une solution sur $[0, T]$. *Pour tout* t, $P(t)$ *est symétrique semi-définie positive. Soit* $K = PH'$, *et pour* $y \in \mathcal{C}([0, T], \mathbf{R}^m)$, $\hat{x}_y$ *solution de*

$$\dot{\hat{x}}_y = (A - KH)\hat{x}_y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Ky) - \dot{K}y, \ \hat{x}_y(0) = \hat{x}_0. \tag{4 bis}$$

Alors la probabilité gaussienne sur $\mathbf{R}^n$, $L(y)$, *de moyenne* $\hat{x}_y(T)$ *et de covariance* $P(T)$ *est une loi conditionnelle de* $x_1(T)$ *sachant* $y_1 = y$.

REMARQUES.

1) On dit *une* loi conditionnelle car il n'y a unicité que modulo l'égalité L_s presque sûrement.

2) Si B et H sont seulement absolument continues par morceaux, le résultat reste valable.

Démonstration (l'idée principale est exposée au début du 2)).

1) Supposons T assez petit pour que (3) ait une solution sur $[0, T]$. Il est clair que $P(t)$ est symétrique. Nous allons montrer que $(P(t)h|h) \geqslant 0$ pour tout h. Pour ce faire nous allons définir quelques fonctions qui seront utiles à plusieurs reprises.

Soit donc $h \in \mathbf{R}^n$ et $z \in L^2([0, T], \mathbf{R}^m)$. Soit $\hat{x}$ solution de :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - PH'H\hat{x} + PH'z, \quad \hat{x}(0) = a. \tag{5}$$

[pour l'instant $\hat{x}$ n'a rien à voir avec la solution de (4 *bis*)].

Soit σ solution de :

$$\dot{\sigma} = -A'\sigma + H'HP\sigma - H'H\hat{x} + H'z, \quad \sigma(T) = b, \tag{6}$$

et soit :

$$\theta(t) = \hat{x}(t) - P(t)\sigma(t). \tag{7}$$

On a :

$$\dot{\sigma} = -A'\sigma + H'HP\sigma - H'H\theta - H'HP\sigma + H'z$$

$$= -A'\sigma - H'H\theta + H'z, \text{ et :} \tag{8}$$

$$\dot{\theta} = A\hat{x} - PH'H\hat{x} + PH'z - \dot{P}\sigma - P\dot{\sigma}$$

$$= (A - PH'H)(\theta + P\sigma) + PH'z - \dot{P}\sigma - P(-A'\sigma - H'H\theta + H'z)$$

$$= A\theta + AP\sigma - PH'HP\sigma - \dot{P}\sigma + PA'\sigma$$

$$= A\theta - BB'\sigma. \tag{9}$$

Deux cas seront intéressants : $b = 0$, $a = \hat{x}_0$ et $b = h$, $a = 0$, $z = 0$, Pour $b = 0$, $a = \hat{x}_0$, on notera ξ au lieu de θ, p au lieu de σ. On a :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\xi - BB'p & (10) \\ \dot{p} = -A'p - H'H\xi + H'z & (11) \\ p(T) = 0 & (12) \\ \xi(0) = \hat{x}_0 - P(0)p(0) & (13) \end{cases}$$

$$\xi(T) = \hat{x}(T). \tag{14}$$

Lorsque $w = \int \psi$ et $z = \dot{y} = Hx + \psi$, on a, d'après (5) $\xi(T) = \hat{x}_y(T)$.

Pour $b = h$, $a = 0$, $z = 0$, on notera β au lieu de θ, γ au lieu de σ. On a :

$$\begin{cases} \dot{\beta} = A\beta - BB'\gamma & (15) \\ \dot{\gamma} = -A'\gamma - H'H\beta & (16) \\ \gamma(T) = h & (17) \\ \beta(0) = -P_0\gamma(0) & (18) \end{cases}$$

$$\beta(t) = -P(t)\gamma(t). \tag{19}$$

Calculons :

$$(P_0\gamma(0) \mid \gamma(0)) + \int (B'\gamma \mid B'\gamma)\,dt + \int (H\beta \mid H\beta)\,dt$$

$$= (P_0\gamma(0) \mid \gamma(0)) + \int (BB'\gamma \mid \gamma)\,dt + \int (H'H\beta \mid \beta)\,dt$$

((16)) (1)

$$= (P_0\gamma(0) \mid \gamma(0)) + \int (BB'\gamma \mid \gamma)\,dt + \int (-\dot{\gamma} - A'\gamma \mid \beta)\,dt$$

$$= (P_0\gamma(0) \mid \gamma(0)) + \int (BB'\gamma \mid \gamma)\,dt + (\gamma(0) \mid \beta(0)) - (\gamma(T) \mid \beta(T))$$
$$+ \int (\gamma \mid \dot{\beta})\,dt - \int (A\beta \mid \gamma)\,dt$$

(1) On indique ainsi les formules utilisées pour passer à la ligne suivante. On écrit $\int$ au lieu de $\int_0^T$ lorsqu'il n'y a pas ambiguïté.

((18), (17), (19) et (15))

$$= \int (BB'\gamma \mid \gamma)\,\mathrm{d}t + (h \mid P(T)h) + \int (\gamma \mid A\beta - BB'\gamma)\,\mathrm{d}t - \int (A\beta \mid \gamma)\,\mathrm{d}t$$

$$= (P(T)h \mid h).$$

Finalement :

$$(20)\quad (P(T)h \mid h) = (P_0\gamma(0) \mid \gamma(0)) + \int (B'\gamma \mid B'\gamma)\,\mathrm{d}t + \int (H\beta \mid H\beta)\,\mathrm{d}t,$$

ce qui prouve que $P(T)$ est semi-définive positive.

2) Il suffit de montrer que pour tout $h \in \mathbf{R}^n$ et μ mesure de Radon sur $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbf{R}^m$, les images des deux probabilités L_{es} et

$$\int L(y) \otimes \delta_y L_s(\mathrm{d}y),$$

par l'application $(x, y) \mapsto (x \mid h) + \int (y(t) \mid \mu(\mathrm{d}t))$ sont égales (en effet d'après Bourbaki, § 6, n° 3, prop. 3, p. 73 et n° 1, prop. 1, p. 71, les deux probabilités en question sont égales si elles ont même transformée de Fourier. Et il suffit pour cela que leurs images par toute forme linéaire continue soient les mêmes). Les deux probabilités obtenues sur $\mathbf{R}$ sont gaussiennes, on va le voir ci-dessous. Il suffit donc de vérifier l'égalité des moments du premier et du deuxième ordre.

La probabilité L_{es} est gaussienne (Bourbaki ne parle que de probabilités gaussiennes centrées, mais cela n'est pas grave. Pour le cas général cf. Bensoussan [1], chap. 1); donc son image par une forme linéaire continue est gaussienne. Soit ν l'image de $\int L(y) \otimes \delta_y L_s(\mathrm{d}y)$ par la forme linéaire $(h|.) + \langle \mu, . \rangle$. On a

$$\int e^{itr}\nu(\mathrm{d}r) = \iint e^{it[(h|x) + <\mu,y>]} L(y)(\mathrm{d}x) L_s(\mathrm{d}y)$$

$$= e^{-(t^2/2)(P(T)h|h)} \int e^{it[(h|\hat{x}_y(T)) + <\mu,y>]} L_s(\mathrm{d}y).$$

Or $y \mapsto \hat{x}_y(T)$ est affine continue, donc $(h \mid \hat{x}_1(T)) + \langle \mu, y_1 \rangle$ a une loi gaussienne, et la dernière intégrale est de la forme $e^{iat}\, e^{-b^2t^2/2}$. Finalement cela montre que ν est gaussienne.

Rappelons que x_2 est définie pour $(x_0, \varphi, \psi) \in \Omega_2$ comme la solution de l'équation (1) où v est remplacé par $\int \varphi$:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi, \qquad x(0) = x_0. \tag{21}$$

De même la variable y_2 est définie par :

$$y(t) = \int_0^t [H(s)x(s) + \psi(s)]\,\mathrm{d}s. \tag{22}$$

On posera :

$$z(t) = H(t)x(t) + \psi(t). \tag{23}$$

Alors (5) (pour $a = \hat{x}_0$) définit $\hat{x}_2$ [cf. (14)].

3) Moment du premier ordre

a) *Image de* L_{es}

$$E((h|x_1(T)) + \langle \mu, y_1 \rangle) = E((h|x_1(T)) + E(\langle \mu, y_1 \rangle).$$

b) *Image de* $\int L(y) \otimes \delta_y L_s(\mathrm{d}y)$.

$$\iint [(h \mid x) + \langle \mu, y \rangle L(y)(\mathrm{d}x)L_s(\mathrm{d}y) = \int (h \mid \hat{x}_y(T))L_s(\mathrm{d}y) + E(\langle \mu, y_1 \rangle).$$

Il s'agit de montrer que :

$$\int (h \mid \hat{x}_y(T))L_s(\mathrm{d}y) = E((h \mid x_1(T)), \tag{24}$$

ou encore $E((h \mid \hat{x}_y(T))) = E((h \mid x_1(T))$.

On va exprimer $(h \mid \hat{x}_2(T))$ sur Ω_2 (on écrit $\hat{x}_2$ au lieu de $\hat{x}_{y_2}$).

On a (16) :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T (\xi \mid -\dot{\gamma} - A'\gamma - H'H\beta)\,\mathrm{d}t \\ &= (\xi(0) \mid \gamma(0)) - (\xi(T) \mid \gamma(T)) + \int (\dot{\xi} \mid \gamma)\,\mathrm{d}t \\ &\qquad + \int (\xi \mid -A'\gamma - H'H\beta)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

D'où [(14), (17)] :

$$(h|\,\hat{x}_2(T)) = (\xi(0)\,|\,\gamma(0)) + \int (\dot{\xi}\,|\,\gamma)\,\mathrm{d}t + \int (\xi\,|\,-A'\gamma - H'H\beta)\,\mathrm{d}t$$

((13), (10))

$$= (\gamma(0)\,|\,\hat{x}_0 - P(0)p(0)) + \int (A\xi - BB'p\,|\,\gamma)\,\mathrm{d}t + \int (\xi\,|\,-A'\gamma - H'H\beta)\,\mathrm{d}t$$

$$= (\gamma(0)\,|\,\hat{x}_0 - P(0)p(0)) - \int (BB'p\,|\,\gamma)\,\mathrm{d}t - \int (\beta\,|\,H'H\xi)\,\mathrm{d}t$$

(11)

$$= (\gamma(0)\,|\,\hat{x}_0 - P(0)p(0)) - \int (BB'p\,|\,\gamma)\,\mathrm{d}t - \int (\beta\,|\,-\dot{p} - A'p + H'z)\,\mathrm{d}t$$

$$= (\gamma(0)\,|\,\hat{x}_0 - P(0)p(0)) - \int (BB'p\,|\,\gamma)\,\mathrm{d}t + (\beta(T)\,|\,p(T)) - (\beta(0)\,|\,p(0)) - \int (\dot{\beta}\,|\,p)\,\mathrm{d}t + \int (A\beta\,|\,p)\,\mathrm{d}t - \int (\beta\,|\,H'z)\,\mathrm{d}t$$

((18), (12))

$$= (\gamma(0)\,|\,\hat{x}_0) - \int (BB'p\,|\,\gamma)\,\mathrm{d}t - \int (\dot{\beta}\,|\,p)\,\mathrm{d}t + \int (A\beta\,|\,p)\,\mathrm{d}t - \int (\beta\,|\,H'z)\,\mathrm{d}t$$

((15))

$$= (\gamma(0)\,|\,\hat{x}_0) - \int (\beta\,|\,H'z)\,\mathrm{d}t$$

((23))

$$= (\gamma(0)\,|\,\hat{x}_0) - \int (\beta\,|\,H'Hx)\,\mathrm{d}t - \int (\beta\,|\,H'\psi)\,\mathrm{d}t$$

((16))

$$= (\gamma(0)\,|\,\hat{x}_0) + \int (\dot{\gamma} + A'\gamma\,|\,x)\,\mathrm{d}t - \int (\beta\,|\,H'\psi)\,\mathrm{d}t$$

$$= (\gamma(0)\,|\,\hat{x}_0) + (\gamma(T)\,|\,x_2(T)) - (\gamma(0)\,|\,x_0) - \int (\gamma\,|\,\dot{x})\,\mathrm{d}t + \int (\gamma\,|\,Ax)\,\mathrm{d}t - \int (\beta\,|\,H'\psi)\,\mathrm{d}t$$

((17), (21))

$$= (\gamma(0) \mid \hat{x}_0 - x_0) + (h \mid x_2(T)) - \int (\gamma \mid B\varphi) - \int (\beta \mid H'\psi)$$

(25) $$= (\gamma(0) \mid \hat{x}_0 - x_0) + (h \mid x_2(T)) - \int (B'\gamma \mid \varphi) - \int (H\beta \mid \psi).$$

Ainsi :

(26) $$(h \mid x_2(T) - \hat{x}_2(T)) = (\gamma(0) \mid x_0 - \hat{x}_0) + \int (B'\gamma \mid \varphi) + \int (H\beta \mid \psi).$$

L'image de la promesure sur Ω_2 par l'application

$$(x_0, \varphi, \psi) \mapsto (\gamma(0) \mid x_0 - \hat{x}_0) + \int (B'\gamma \mid \varphi) + \int (H\beta \mid \psi)$$

est identique (grâce à la propriété de transitivité des images, cf. Bourbaki, § 6, n° 2, p. 72) à la loi de $(h \mid x_1(T) - \hat{x}_1(T))$. Cette dernière est donc centrée, ce qui établit (24).

4) Moment du deuxième ordre

a) *Image de L_{es}.*

27) $$E(\mid (h \mid x_1(T)) + \langle \mu, y_1 \rangle \mid^2)$$
$$= E(\mid (h \mid x_1(T) - \hat{x}_1(T)) + (h \mid \hat{x}_1(T)) + \langle \mu, y_1 \rangle \mid^2)$$
$$= E(\mid (h \mid x_1(T) - \hat{x}_1(T)) \mid^2)$$
$$+ 2E((h \mid x_1(T) - \hat{x}_1(T))[(h \mid \hat{x}_1(T)) + \langle \mu, y_1 \rangle])$$
$$+ E(\mid (h \mid \hat{x}_1(T)) + \langle \mu, y_1 \rangle \mid^2).$$

b) *Image de* $\int L(y) \otimes \delta_y L_s(\mathrm{d}y)$.

(28) $$\iint \mid (h \mid x) + \langle \mu, y \rangle \mid^2 L(y)(\mathrm{d}x) L_s(\mathrm{d}y)$$
$$= (P(T)h \mid h) + \int [\mid (h \mid \hat{x}_y(T)) \mid^2 + 2(h \mid \hat{x}_y(T)) \langle \mu, y \rangle$$
$$+ \mid \langle \mu, y \rangle \mid^2] L_s(\mathrm{d}y)$$
$$= (P(T)h \mid h) + E(\mid (h \mid \hat{x}_1(T)) + \langle \mu, y_1 \rangle \mid^2).$$

Montrons d'abord que :

(29) $$E(\mid (h \mid x_1(T) - \hat{x}_1(T)) \mid^2) = (P(T)h \mid h).$$

Soit ν la loi de

$$((h \mid x_1(T) - \hat{x}_1(T)), (h \mid x_1(T) - \hat{x}_1(T))) \qquad \text{dans } \mathbf{R}^2.$$

Alors, grâce à (26), ν est l'image de la promesure sur Ω_2 par l'application u :

$$(x_0, \varphi, \psi) \mapsto ((\gamma(0) \mid x_0 - \hat{x}_0) + \int (B'\gamma \mid \varphi) + \int (H\beta \mid \psi)), \text{idem}).$$

On a

$$E(\mid (h \mid x_1(T) - \hat{x}_1(T)) \mid^2) = \int xy\nu(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = Q((1, 0), (0, 1)),$$

où Q est la forme bilinéaire sur $\mathbf{R}^2$, covariance de ν.

Désignons par $\mathfrak{Q}$ la forme bilinéaire covariance de la promesure sur Ω_2. On a (cf. Bensoussan [1] formule (2.5), p. 14, et également Bourbaki, § 6, nº 5, prop. 5, p. 78) :

$$\begin{aligned} Q((1, 0), (0, 1)) &= \mathfrak{Q}({}^t u(1, 0), {}^t u(0, 1)) \\ &= \mathfrak{Q}(u_1, u_2) \\ &= (P_0\gamma(0) \mid \gamma(0)) + \int (B'\gamma \mid B'\gamma) + \int (H\beta \mid H\beta) \\ &= (P(T)h \mid h), \qquad \text{d'après (20), d'où (29).} \end{aligned}$$

Reste à montrer que :

(30) $$E((h \mid x_1(T) - \hat{x}_1(T))[(h \mid \hat{x}_1(T)) + \langle \mu, y_1 \rangle]) = 0.$$

Pour cela montrons que

(31) $$-\Phi(t, o)P_0\gamma(0) - \int_0^t \Phi(t, s)B(s)B'(s)\gamma(s)\,\mathrm{d}s + P(t)\gamma(t) = 0.$$

En effet, en désignant par $k(t)$ le premier membre de (31), on a $k(0) = 0$ et

$$\begin{aligned} \dot{k} &= -A\Phi(.,0)P_0\gamma(0) + A\left(-\int \dots\right) - BB'\gamma - \dot{\beta} \quad (19) \\ &= Ak + A\beta - BB'\gamma - \dot{\beta} \\ &= Ak \quad (15). \end{aligned}$$

Calculons $\langle \mu, y_2 \rangle$. On a :

$$\begin{aligned} \langle \mu, y_2 \rangle &= \int (\mu(\mathrm{d}t) \mid y_2(t)) = \int_0^T \left(\mu(\mathrm{d}t) \mid \int_0^t \dot{y}_2(s)\,\mathrm{d}s\right) \\ &= \int_0^T (\mu([s, T]) \mid \dot{y}_2(s))\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

On a $\dot{y}_2 = z_2 = Hx_2 + \psi$. Posons $\mu([s, T]) = f(s)$. On a

$$(32) \quad \langle \mu, \dot{y}_2 \rangle = \int (f(t) \mid H(t)x_2(t))\,\mathrm{d}t + \int (f(t) \mid \psi(t))\,\mathrm{d}t$$

$$= \int (f(t) \mid H(t)\Phi(t, 0)x_0)\,\mathrm{d}t + \int_0^T (f(t) \mid H(t) \int_0^t \Phi(t, s)B(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}t + \int (f \mid \psi)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int (f(t) \mid H(t)\Phi(t, 0)x_0)\,\mathrm{d}t + \int_0^T \left(\int_s^T \Phi'(t, s)H'(t)f(t)\,\mathrm{d}t \mid B(s)\varphi(s)\right)\mathrm{d}s + \int (f \mid \psi).$$

En utilisant (26), (25) et (32), on obtient pour (30)

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} & E\Big(\Big[(\gamma(0) \mid x_0 - \hat{x}_0) + \int (B'\gamma \mid \varphi) + \int (H\beta \mid \psi)\Big] \\ & \quad \Big[-(\gamma(0) \mid x_0 - \hat{x}_0) + \Big(h \mid \Phi(T, 0)x_0 + \int_0^T \Phi(T, s)B(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s\Big) \\ & \quad - \int (B'\gamma \mid \varphi) - \int (H\beta \mid \psi) + \int (f \mid H\Phi(., 0)x_0) \\ & \quad + \int_0^T \Big(\int_s^T \Phi'(t, s)H'(t)f(t)\,\mathrm{d}t \mid B(s)\varphi(s)\Big)\mathrm{d}s + \int (f \mid \psi)\Big]\Big) . \end{aligned} \right.$$

(comme ci-dessus on a une application linéaire $\Omega_2 \to \mathbf{R}^2$. Le E signifie que l'on intègre dans $\mathbf{R}^2$ par rapport à la probabilité image).

L'intégration de (33) donne :

i) des termes dus à x_0 :

$$-(P_0\gamma(0) \mid \gamma(0)) + (P_0\gamma(0) \mid \Phi'(T, 0)h) + \left(P_0\gamma(0) \mid \int_0^T \Phi'(., 0)H'f\,\mathrm{d}t\right)$$

ii) des termes dus à φ :

$$\int \left(B'\gamma \mid B'\Phi'(T, .)h - B'\gamma + B'(s) \int_s^T \Phi'(t, s)H'(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

iii) des termes dus à ψ :

$$\int (H\beta \mid -H\beta + f).$$

Pour montrer que le total est nul on regroupe séparément les termes « en h^2 » et les termes « en hf ».

Pour les termes en h^2 on a :

$$(-P_0\gamma(0) \mid \gamma(0)) + (P_0\gamma(0) \mid \Phi'(T,0)h) + \int (B'\gamma \mid B'\Phi'(T,.)h)$$

$$+ \int (B'\gamma \mid -B'\gamma) + \int (H\beta \mid -H\beta)$$

((16))

$$= (-P_0\gamma(0) \mid \gamma(0)) + (\Phi(T,0)P_0\gamma(0) \mid h) + \int (\Phi(T,.)BB'\gamma \mid h)$$

$$- \int (BB'\gamma \mid \gamma) + \int (\dot\gamma + A'\gamma \mid \beta)$$

$$\left(\text{or} \int (\dot\gamma + A'\gamma \mid \beta) = (\gamma(T) \mid \beta(T)) - (\gamma(0) \mid \beta(0)) - \int (\gamma \mid \dot\beta) + \int (A'\gamma \mid \beta)\right.$$

et avec (18), (17), (19) et (15))

$$= (\Phi(T,0)P_0\gamma(0) \mid h) + \int (\Phi(T,.)BB'\gamma \mid h) - \int (BB'\gamma \mid \gamma)$$

$$- (P(T)h \mid h) - \int (\gamma \mid A\beta - BB'\gamma) + \int (A'\gamma \mid \beta)$$

$$= (\Phi(T,0)\, P_0\, \gamma(0) | h) + \int (\Phi(T,.)\, BB'\gamma | h) - (P(T)h | h)$$

$= 0$ d'après (31) appliqué avec $t = T$.

Pour les termes en hf on a :

$$\left(P_0\gamma(0) \mid \int_0^T \Phi'(t,0)H'(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right) +$$

$$+ \int \left(B'\gamma \mid B'(s) \int_s^T \Phi'(t,s)H'(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}s + \int (H\beta \mid f)$$

$$= \int \left(H(t)\Phi(t,0)P_0\gamma(0) + \int_0^t H(t)\Phi(t,s)B(s)B'(s)\gamma(s)\,\mathrm{d}s\right.$$

$$\left. + H(t)\beta(t) \mid f(t)\right) \mathrm{d}t.$$

Avec (19), (31) donne la nullité.

5) Maintenant $P(t)$ s'interprète comme la covariance conditionnelle de $x_1(t)$ qui est majorée par le moment du deuxième ordre de $x_1(t)$. Ce dernier est borné sur $[0, T]$. Donc $P(t)$ ne diverge pas et l'équation (3) a une solution sur $[0, T]$.

BIBLIOGRAPHIE

BARRA (J. R.), *Notions fondamentales de statistique mathématique*, Dunod, 1971.

BENSOUSSAN (A.), *Identification et filtrage*, Thèse, Paris, Publiée dans Cahier de l'IRIA, 1969, n° 1.

— *Filtrage optimal des systèmes linéaires*, Dunod, 1971.

BOURBAKI (N.), *Intégration*, Chap. 9, 1re éd., 1969.

FAURRE (P.), *Navigation inertielle optimale et filtrage statistique*, Dunod, 1971.

NEVEU (J.), *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, 1964.

WONHAM (W. M.), *Random differential equations in control theory. Probabilistic methods in applied mathematics.* Ed. Barucha-Reid. Academic Press, p. 131-212.