REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE INFORMATIQUE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. MATHÉMATIQUE

MICHÈLE CHAMBAT
MICHEL CHARNAY

Brève communication. Résolution d'équations non linéaires de point fixe dans $\mathbf{R}^n$

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, tome 6, nº R3 (1972), p. 105-109
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_3_105_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, décembre 1972, R-3, p. 105-109)

RESOLUTION D'EQUATIONS NON LINEAIRES DE POINT FIXE DANS R^n

par Michèle CHAMBAT et Michel CHARNAY (1)

Résumé. — *Cet article a pour but, sous certaines conditions, d'affirmer les deux points suivants :*

— *existence et unicité de la solution x^* de l'équation de point fixe $x = F(x)$, où F est un opérateur sur R^n ;*

— *convergence vers x^* de l'itération de Gauss Seidel par point ou par bloc, appliquée à la fonction F.*

Considérons l'équation de point fixe :

$$x = F(x) \tag{1.1}$$

où F est un opérateur quelconque sur R^n.

Ce papier a pour but, sous certaines conditions, d'affirmer les deux points suivants :

a) existence et unicité de la solution x^* de (1.1);

b) convergence vers cette solution de *l'itération de Gauss-Seidel*, par point ou par bloc, appliquée à la fonction F.

I. DEFINITIONS ET RAPPELS

L'outil de base qui permet de montrer ces résultats est la contraction d'un opérateur sur R^n en norme vectorielle, notion qui apparaît souvent plus ou moins explicitement dans la littérature actuelle, par exemple [2].

Soit une décomposition des vecteurs de R^n en k blocs ($0 < k \leqslant n$) de tailles respectives $\nu_i (\Sigma \nu_i = n)$. Notons X_i le i^ième^ bloc du vecteur x.

(1) Analyse numérique, Département de Mathématiques, Université de Lyon 1.

Soit Φ_i une norme sur R^{v_i}. L'application $x \rightarrow p(x) = (\Phi_i(X_i))_i$, vecteur non négatif de R^k, est une *norme vectorielle régulière de taille k* sur R^n [4]. Nous n'utiliserons que celles-ci dans la suite. Si $k = n$ et si toutes les normes Φ_i sont identiques à la valeur absolue sur R, on définit :

la norme vectorielle type sur R^n qui, au vecteur x, fait correspondre le vecteur de R^n, noté $|x|$, formé des valeurs absolues de ses composantes.

Soit M_k l'algèbre des matrices réelles (k, k), et soit p une telle norme vectorielle régulière de taille k sur R^n.

On dit que l'application F est *contractante sur R^n en norme vectorielle p* s'il existe une matrice non négative K de M_k telle que :

(i) $\rho(K) < 1$ ρ désigne le rayon spectral

(ii) $p(F(x) - F(y)) \leqslant Kp(x - y) \ \forall \ x, y \in R^n$ (1)

On peut étendre le théorème de point fixe lié à la contraction classique. Le résultat s'énonce ainsi :

Théorème 1 : Si F est une application contractante sur R^n en norme vectorielle régulière p alors :

1) l'équation (1.1) possède une solution x^* et une seule dans R^n.

2) L'itération de point fixe $x^{r+1} = F(x^r)$ converge vers x^* quel que soit le vecteur x^0 de départ.

II. ITERATION DE GAUSS-SEIDEL PAR POINT

Nous précisons ce que nous entendons par itération de Gauss-Seidel pour résoudre l'équation de point fixe (1.1).

Soient $x = (x_i)$ un vecteur de R^n et F de composante f_i un opérateur sur R^n, nous définissons l'application G de composantes g_i :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} g_1(x) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x) &= f_2(g_1(x), x_2, \dots, x_n) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ g_n(x) &= f_n(g_1(x), g_2(x), \dots, g_{n-1}(x), x_n) \end{aligned}$$

(1) La notation $u \leqslant v$ désigne la relation d'ordre partiel « composante à composante ».

Il est clair que les fonctions F et G ont exactement les mêmes points fixes.

Nous appelons *itération de Gauss-Seidel par point* menée sur la fonction F, celle définie à partir d'un vecteur x^0 quelconque par :

$$\begin{aligned} x_1^{r+1} &= f_1(x_1^r, \ldots, x_n^r) \\ x_2^{r+1} &= f_2(x_1^{r+1}, x_2^r \ldots, x_n^r) \\ &\;\;\vdots \\ x_n^{r+1} &= f_n(x_1^{r+1}, \ldots, x_{n-1}^{r+1}, x_n^r) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Elle n'est autre que l'itération de point fixe menée sur la fonction G.

Théorème 2

Si F est contractante sur R^n en norme vectorielle type, l'itération de Gauss-Seidel donnée par les formules (2.2) converge vers l'unique point fixe de F dans R^n, et ceci au moins aussi vite que l'itération de point fixe menée sur F.

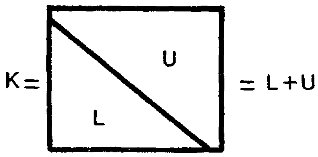
Démonstration

Il faut montrer que l'itération de point fixe menée sur la fonction G converge et d'après le théorème 1, il suffit de montrer que G est contractante en norme vectorielle type, ce qui permettra d'affirmer :

— l'existence et l'unicité du point fixe de G, donc de F;

— la convergence de l'itération (2.2).

Soit K la matrice de contraction de F que nous découpons en :



L : triangulaire inférieure stricte

U : triangulaire supérieure

Les hypothèses (*ii*) et les formules (2.1) permettent d'écrire

$$|G(x) - G(y)| \leqslant L\,|G(x) - G(y)| + U\,|x - y| \;\forall\, x, y \in R^n$$

Le rayon spectral de L étant nul, I-L est régulière et $(I - L)^{-1}U$ est de plus non négative. D'où

$$|G(x) - G(y)| \leqslant K_1\,|x - y| \;\forall\, x, y \in R^n$$

avec $K_1 = (I - L)^{-1}U$ matrice non négative. Le théorème de Stein Rosenberg implique qu'alors

$$\rho(K_1) \leqslant \rho(K) < 1$$

G est donc contractante en norme vectorielle type sur R^n, avec une matrice de contraction de rayon spectral inférieur à celui de K.

REMARQUES

1) Nous retrouvons les résultats classiques quand F est lui-même linéaire : $F(x) = Ax + b$. La contraction de F en norme vectorielle type est alors caractérisée par la condition $\rho(|A|) < 1$. La « meilleure » matrice de contraction qu'on puisse prendre est d'ailleurs $K = |A|$ à laquelle s'applique le théorème de Stein Rosenberg.

2) Le même théorème peut s'énoncer dans le cas de contraction locale sur un pavé fermé D_0 tel que $F(D_0) \subset D_0$. Le point fixe y est alors unique et l'itération (2.2) converge vers ce point fixe dès que x^0 est pris dans D_0.

III. ITERATION DE GAUSS-SEIDEL PAR BLOC

Soit une décomposition de R^n en k blocs de taille ν_i ($\Sigma\nu_i = n$). Définissons l'application G (de blocs G_i) de R^n dans lui-même, à partir de F (de blocs F_i) en tout point x (de blocs X_i) de R^n.

$$
(3.1) \qquad
\begin{aligned}
G_1(x) &= F_1(X_1, X_2, \ldots, X_k)\\
G_2(x) &= F_2(G_1(x), X_2, \ldots, X_k)\\
&\;\;\vdots\\
G_k(x) &= F_k(G_1(x), \ldots, G_{k-1}(x), X_k)
\end{aligned}
$$

Les fonction s F et G ont exactement les mêmes points fixes. Nous appelons *itération de Gauss-Seidel par bloc*, menée sur la fonction F, celle définie à partir d'un vecteur x^0 quelconque par :

$$
(3.2) \qquad
\begin{aligned}
X_1^{r+1} &= F_1(X_1^r, X_2^r, \ldots, X_k^r)\\
X_2^{r+1} &= F_2(X_1^{r+1}, X_2^r, \ldots, X_k^r)\\
&\;\;\vdots\\
X_k^{r+1} &= F_k(X_1^{r+1}, \ldots, X_{k-1}^{r+1}, X_k^r)
\end{aligned}
$$

Elle n'est autre que l'itération de point fixe menée sur la fonction G.

Théorème 3

Si F est contractant sur R^n en norme vectorielle régulière p de taille k, l'itération de Gauss-Seidel par bloc, donnée par les formules (3.2) converge vers l'unique point fixe de F dans R^n, et ceci au moins aussi vite que l'itération de point fixe menée sur F.

La démonstration est la même qu'au théorème 2 (on découpe la matrice de contraction (k, k) de la même manière).

REMARQUES

1) On peut encore énoncer ce théorème dans le cas de contraction locale sur un pavé fermé D_0. Les conclusions demeurent pourvu que D_0 soit invariant par F et qu'on démarre l'itération dans D_0.

2) Ces résultats peuvent être étendus à bien d'autres découpes de matrices [3] que celle de Gauss-Seidel. D'autre part, nous pouvons itérer le processus qui permet de passer de la fonction F à la fonction G et accumuler, en conséquence, les gains de convergence [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. CHAMBAT, *Résolution formelle d'équations de point fixe dans R^n; Algorithmes associés à une découpe de matrices.* Thèse 3e cycle Lyon (à paraître).

[2] J. M. ORTEGA et W. C. RHEINBOLDT, *Iterative solution of non linear equations in several variables* (Academic Press, 1970).

[3] F. ROBERT et J. F. MAITRE, *Normes et algorithmes associés à une découpe de matrices* (à paraître dans Num. Math.).

[4] F. ROBERT, Thèse, *Étude et utilisation de normes vectorielles en analyse numérique linéaire.* Grenoble (1968).