Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique

René Alt

Brèves communications. Deux théorèmes sur la A-stabilité des schémas de Runge-Kutta simplement implicités

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, tome 6, nº R3 (1972), p. 99-104
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_3_99_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, décembre 1972, R-3, p. 99-104)

Brèves communications

DEUX THEOREMES SUR LA A-STABILITE DES SCHEMAS DE RUNGE-KUTTA SIMPLEMENT IMPLICITES

par René ALT (1)

Résumé. — *On démontre les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les schémas du type Runge-Kutta d'ordres 3 et 4 pour être A-Stables au sens de Dahlquist. Cette propriété est importante car elle permet, dans l'intégration numérique des systèmes différentiels de choisir un pas qui ne dépende que de la précision désirée.*

Introduction

Soit à résoudre numériquement l'équation :

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_o) = y_o$$

ou $x \in [x_o, x_o + a] \subset \mathbf{R}$ et $y \in D \subset R^p$, $P \geqslant 1$, et où l'on suppose que la fonction f vérifie les conditions d'existence et d'unicité de la solution et que y admet des dérivées au sens de Frechet jusqu'à l'ordre qui sera nécessaire. Dans de nombreux cas par exemple lorsque f est linéaire mal conditionnée, la stabilité du schéma numérique impose un pas petit alors que l'allure de la solution ou la précision voulue autoriserait un pas beaucoup plus grand. Cependant les méthodes A-Stables ne sont pas soumises à cette contrainte.

Définition 1 [3]

Un schéma numérique à un pas : $y_{n+1} = \Phi(x_n, y_n, h)$ est A-stable si, lorsque appliqué à toute équation scalaire de la forme :

$$y' = -\lambda y, \; Re(\lambda) > 0 \; \lambda \in C.$$

(1) Institut de programmation, Université de Paris VI.

Il donne (1) : $y_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Dahlquist [4] a montré qu'une méthode possédant cette propriété est nécessairement implicite et que l'ordre maximum d'un schéma A-stable a pas lié est 2. Si l'on désire un ordre supérieur il est donc raisonnable de s'orienter vers les méthodes du type Runge-Kutta.

Définition 2 [2]

Un schéma du type Runge-Kutta simplement implicite de rang q est défini par :

$$(2) \qquad \begin{cases} y_n^i = y_n + h \sum_{j=0}^{i} a_{ij} f(x_n^j, y_n^j) \\ y_{n+1} = y_n^q \end{cases}$$

avec $x_n^j = x_n + \theta_j h$.

h désignant le pas d'intégration, les a_{ij} et θ_j des paramètres (non indépendants).

On va montrer ici, que sous certaines conditions, pour $q = 2$ et $q = 3$ les schémas (2) sont A-Stables. En effet lorsqu'on applique (2) à l'équation $y' = -\lambda y$ on peut expliciter y_{n+1} en fonction de y_n. Plus précisément on a :

$$y_{n+1} = R_q(\lambda h)\; y_n$$

ou $R_q(\lambda h)$ est une fraction rationnelle quotient de deux polynomes de degrés q. On en déduit le :

Lemme 1

Une condition nécessaire et suffisante pour que les méthodes simplement implicites (2) soient A-Stables est :

$$(\alpha)\ |R_q(\lambda h)| \leqslant 1 \qquad \text{pour} \qquad \mathcal{R}e(\lambda h) = 0$$

$$(\beta) \qquad a_{ii} > 0 \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, q$$

En effet pour que (1) soit satisfaite il faut et il suffit que l'on ait $R_q(\lambda h) < 1$, quel que soit λ tel que $\mathcal{R}e(\lambda h) > 0$. D'après le principe du maximum cette condition est équivalente à : $R_q(\lambda h)$ holomorphe dans le demi-plan $\mathcal{R}e(\lambda h) > 0$ et $R_q(\lambda h) \leqslant 1$ pour $\mathcal{R}e(\lambda h) = 0$. Or il est facile de vérifier que $R_q(\lambda h)$ a pour dénominateur : $P(\lambda h) = \prod_{i=1}^{q} (1 + a_{ii}\lambda h)$. En faisant l'hypothèse que h est strictement positif, $\mathcal{R}_q(\lambda h)$ n'aura pas de pôles dans $Re(\lambda) > 0$. Si et seulement si (β).

Les conditions (α) et (β) peuvent être explicitées à l'aide des θ_i dans les cas des rangs 3 et 4. Les paramètres a_{ij} étant convenablement choisis en fonction des θ_i, les deux schémas sont respectivement d'ordre 3 et 4 et on a :

pour $q = 2$ $\qquad a_{10} = a_{11} = \dfrac{\theta}{2}$

$a_{20} = 1 - a_{21} - a_{22}$ avec $a_{21} = (6\theta(1 - \theta))^{-1}$ et $a_{22} = (2 - 3\theta)/(6(1 - \theta))$

pour $q = 3$ $\qquad a_{10} = a_{11} = \dfrac{\theta_1}{2}$

$a_{20} = \theta_2 - a_{21} - a_{22}$ avec $a_{21} = \theta_2(3\theta_1\theta_2 - \theta_1 - \theta_2)/(6\theta_1(1 - \theta_1)(2\theta_1 - 1))$

$a_{22} = (6\theta_1\theta_2(1 - \theta_1) + \theta_1 - 2\theta_2)/(6(1 - \theta_1)(2\theta_1 - 1))$

$a_{30} = 1 - a_{31} - a_{32} - a_{33}$ avec $a_{31} = (2\theta_2 - 1)/(12\theta_1(1 - \theta_1)(\theta_2 - \theta_1))$

$a_{32} = (2\theta_1 - 1)/(12\theta_2(1 - \theta_2)(\theta_1 - \theta_2)$

$a_{33} = (6\theta_1\theta_2 - 4(\theta_1 + \theta_2) + 3)/(12(1 - \theta_1)(1 - \theta_2))$

D'où :

Théorème 1

Dans le cas ou $q = 2$, une condition nécessaire et suffisante pour que (2) soit A-Stable et que l'on ait :

$$\theta > 1$$

Démonstration

Si $q = 2$ on a : $R_2(h\lambda) = \dfrac{1 - (a_{11} + a_{22})h\lambda + (a_{21}a_{10} - a_{20}a_{11})h^2\lambda^2}{(1 + a_{11}h\lambda)(1 + a_{22}h\lambda)}$

Si $h\lambda$ est imaginaire pur, $h\lambda = ix$, $x \in R$ et la condition (α) s'écrit

$$|R_2(ix)|^2 \leqslant 1.$$

Soit

$$\frac{1 + ((A - 1)^2 - 2B)x^2 + B^2x^4}{(1 + A^2 - 2C)x^2 + C^2x^4} \leqslant 1 \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} A &= a_{11} + a_{22} \\ B &= a_{21}a_{10} - a_{20}a_{11} \\ C &= a_{11}a_{22} \end{aligned}$$

Il est facile de constater que les coefficients de x^2 sont les mêmes au numérateur et au dénominateur. (α) s'écrit alors

$$B^2 \leqslant C^2.$$

Soit en exprimant B et C en fonction de θ.

$$(1-\theta)(3\theta^2-3\theta+1) \leqslant 0$$

Le polynôme du 2e degré est strictement positif et la valeur $\theta = 1$ est incompatible avec les expressions des a_{ij}. Donc :

$$(\alpha) \Leftrightarrow \theta > 1.$$

on voit que (β) est alors automatiquement vérifiée.

D'où le théorème.

Théorème 2

Dans le cas où $q = 3$, une condition nécessaire et suffisante pour que (2) soit A-Stable et que l'on ait :

$$\theta_1 > 1 \qquad \text{et} \qquad \theta_2 > 1$$

Démonstration

Si $q = 3$ on a de même :

$$R_3(h\lambda) = \frac{1 + A_1 h\lambda + A_2 h^2\lambda^2 + A_3 h^3\lambda^3}{1 + \Sigma_1 h\lambda + \Sigma_2 h^2\lambda^2 + \Sigma_3 h^3\lambda^3}$$

avec :

$$A_1 = -(a_{30} + {}_{31} + a_{32}) + a_{11} + a_{22}$$

$$A_2 = -(a_{30}(a_{11} + a_{22}) - a_{31}(a_{22} - a_{10}) - a_{32}(a_{11} - a_{20} - a_{21}) + a_{11}a_{22}$$

$$A_3 = -a_{30}a_{11}a_{22} - a_{32}a_{21}a_{10} + a_{32}a_{20}a_{11} + a_{31}a_{22}a_{10}$$

$$\Sigma_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \ \Sigma_2 = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{33}, \ \Sigma_3 = a_{11}a_{22}a_{33}$$

Le schéma étant d'ordre 4, les a_{ij} vérifient un certain nombre de relations parmi lesquelles :

$$\sum_{j=0}^{i} aij = \theta_i \quad \text{avec} \quad \theta_3 = 1\,; \quad \sum_{j=1}^{i} a_{ij}\theta_j = \frac{\theta_i^2}{2}\,; \quad \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\theta_j^2 = \frac{1}{3}$$

Ce qui permet d'obtenir des expressions plus symétriques pour les A, soit :

$$A_1 = \Sigma_1 - 1 \qquad A_2 = \Sigma_2 - \Sigma_1 + \frac{1}{2} \qquad A_3 = \Sigma_3 - \Sigma_2 + \frac{1}{2}\Sigma_1 - \frac{1}{6}$$

La condition (α) du lemme (1) s'écrit ici :

$$|R_3(ix)|^2 \leqslant 1 \qquad x \in R \qquad \text{avec}$$

$$|R_3(ix)|^2 = \frac{1 + (A_1^2 - 2A_2)x^2 + (A_2^2 - 2A_1A_3)x^4 + A_3^2x^6}{1 + (\Sigma_1^2 - 2\Sigma_2)x^2 + (\Sigma_2^2 - 2\Sigma_1\Sigma_3)x^4 + A_3^2x^6}$$

Il est facile de constater, en effectuant la division suivant les puissances croissantes de $h\lambda$ dans la fraction $R_3(h\lambda)$ et en identifiant jusqu'à l'ordre 4 avec le développement de $e^{-\lambda h}$ que les coefficients de x^2 et de x^4 dans $|R_3(ix)|^2$ sont respectivement les mêmes au numérateur et au dénominateur. On a alors :

$$|R_3(ix)|^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow (A_3)^2 \leqslant (\Sigma_3)^2$$

ou encore :

$$(\alpha') \qquad \left(2\Sigma_3 - \Sigma_2 + \frac{1}{2}\Sigma_1 - \frac{1}{6}\right)\left(\Sigma_2 - \frac{1}{2}\Sigma_1 + \frac{1}{6}\right) \geqslant 0$$

Remarque : Cette relation s'exprime uniquement à l'aide des coefficients diagonaux et est symétrique en ces variables.

En substituant les a_{ii} par leurs valeurs en fonction de θ_1 et θ_2, (α') s'écrit : $T.\, S \geqslant 0$

avec

$$T = [-4(\theta_1 - 1)(3\theta_1^2 - 3\theta_1 + 1)]\theta_2^2 + 2(\theta_1 - 1)(-6\theta_1^3 + 15\theta_1^2 - 10\theta_1 + 3)\theta_2 + (\theta_1 - 1)(12\theta_1^3 - 22\theta_1^2 + 12\theta_1 - 3)$$

$$S = (-36\theta_1^4 + 72\theta_1^3 - 60\theta_1^2 + 24\theta_1 - 4)\theta_2^2 + 2(18\theta_1^4 - 39\theta_1^3 + 36\theta_1^2 - 16\theta_1 + 3)\theta_2 - 12\theta_1^4 + 30\theta_1^3 - 31\theta_1^2 + 15\theta_1$$

On constate alors que S est du signe du polynôme en facteur de θ_2^2 qui est toujours négatif $\left(\text{il passe par un maximum unique valant } -\frac{1}{4}\right)$.

De plus si, $\theta_1 < 1$ le polynôme T est positif quel que soit θ_2. Pour que (α') soit satisfaite il est donc nécessaire que l'on ait $\theta_1 > 1$ ($\theta_1 = 1$ est incompatible avec les expressions des a_{ij}).

Une étude sans difficulté du système de contraintes.

$$\theta_1 > 1, \qquad T \leqslant 0, \qquad a_{ii} > 0, \qquad i = 1, 2, 3$$

nous montre que celui-ci est compatible si et seulement si : $\theta_2 > 1$ d'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. ALT, Thèse 3e cycle, Université Paris VI, 1971, (mention Analyse Numérique).

[2] F. CESCHINO et J. KUNTZMANN, *Problèmes différentiels de conditions initiales*, Dunod, Paris, 1963.

[3] G. DAHLQUIST, *Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations*, Math. Scand., vol. 4, 1956.

[4] G. DAHLQUIST, *A special stability problem for linear multistep methods*, B. I. T., vol. 3, 1963.