REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE INFORMATIQUE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. MATHÉMATIQUE

M. COURTILLOT

Deux algorithmes de programmation mathématique

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, tome 7, nº R1 (1973), p. 23-33

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_1_23_0>

R.A.I.R.O.
(7e année, avril 1973, R-1, p. 23-33)

DEUX ALGORITHMES DE PROGRAMMATION MATHEMATIQUE (1)

par M. COURTILLOT (2)

Résumé. — *Cet exposé présente deux algorithmes permettant de ramener un programme mathématique de maximisation d'une fonction numérique concave ou quasi concave dans un convexe C de R^n à une suite de programmes linéaires enchaînés de format constant (abandon d'une contrainte, remplacée par une autre à chaque étape).*

Au point I est établi un théorème général de convergence valable en particulier pour ces deux algorithmes. Ce théorème est voisin de celui de E. Polack [1] *mais utilise une procédure lexicographique.*

— Le premier algorithme s'adresse à des programmes où la fonction à optimiser est linéaire (on peut toujours se ramener à ce cas) et où le convexe C est défini par des inégalités numériques différentiables sur la frontière de C. La concavité ou la semi-concavité des fonctions n'est pas exigée. La méthode de Kelley [2] *rentre dans ce type d'algorithme, mais suppose que le convexe C est défini à l'aide de fonctions numériques concaves. Elle impose aussi une suite de programmes linéaires de format croissant.*

— Le deuxième algorithme s'adresse à des programmes où la fonction à optimiser et où les contraintes sont concaves. La méthode proposée peut être considérée comme duale de celle de G. B. Dantzig [3], *mais ne nécessite pas, comme cette dernière, une suite de programmes linéaires de format croissant, mais constant, la convergence est assurée sans faire l'hypothèse de non dégénérescence des programmes linéaires.*

1. THEOREME DE CONVERGENCE

1.1. Ordre lexicographique

— Soit $y = (y_1 \dots y_n) \in R^n$. y est dit lexicographiquement positif si la première composante non nulle de y est positive ou si toutes ses composantes sont nulles. On notera : $y \mathrel{\mathsf{L}} o$.

— La relation binaire sur R^n : $y_1 R y_2 \Leftrightarrow y_1 - y_2 \mathrel{\mathsf{L}} 0$ est un ordre total noté $y_1 \mathrel{\mathsf{L}} y_2$.

— Soit $1 = (l_1 \dots l_n)$ un n-uple de formes linéaires indépendantes sur R^n. l peut donc être considéré comme un automorphisme de R^n.

(1) Communication présentée à l'European Meeting of the Econometric Society, Budapest, *Sept. 72.*

(2) Université Paris Sud.

La relation binaire :

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow l(x_1) - l(x_2) \mathrel{\mathsf{L}} 0$$

est un ordre total sur R^n que l'on appellera ordre associé à l et que l'on notera : $x_1 \geqslant\!|\!\geqslant_l x_2$.

Si l est bien spécifié, on notera : $x_1 \geqslant\!|\!\geqslant x_2$.

La relation stricte $x_1 \not> x_2$ est définie par :

$$x_1 \geqslant\!|\!\geqslant x_2 \quad \text{et} \quad x_1 \neq x_2.$$

1.2. Théorème de convergence

— Soit $B = \{ x \mid \| x \| \leqslant A, A > 0 \}$ une boule fermée de centre 0 et de rayon A définie par une norme quelconque sur R^n.

— Soit $\hat{x} \in B$ un élément appelé point distingué dans B.

— Soit $\geqslant\!|\!\geqslant$ l'ordre associé à $l = (l_1 \dots l_n)$.

Hypothèse : Pour tout $x \in B$ tel que $x \not> \hat{x}$, il existe

a) une boule fermée $B(x, \eta)$ ce centre x et de rayon $\eta > 0$,

b) un vecteur $\varepsilon(x) \not> 0$,

c) une application f_x de $B(x, \eta)$ dans B

tels que :

$$\forall y \in B(x, \eta) : y - f_x(y) \geqslant\!|\!\geqslant \varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad f_x(y) \geqslant\!|\!\geqslant \hat{x}.$$

Théorème : Dans les conditions de l'hypothèse la suite $(x_0, x_1 \dots x_i \dots)$ où $x_{i+1} = f_{xi}(xi)$ est telle que :

a) ou bien elle est finie et son dernier élément est le point distingué $\hat{x}$,

b) ou bien elle est infinie, elle admet alors une limite qui est $\hat{x}$.

Démonstration :

a) Supposons la suite finie et soit x_p son dernier élément.

On a, d'après l'hypothèse

$$x_0 \not> x_1 \not> \dots \not> x_p \geqslant\!|\!\geqslant \hat{x}$$

$x_p \neq \hat{x} \Rightarrow x_p \not> \hat{x}$. Donc d'après l'hypothèse, il existe $x_{p+1} = f_{xp}(x_p)$ tel que $x_{p+1} \geqslant\!|\!\geqslant \hat{x}$, ce qui contredit le fait que x_p est le dernier élément de la suite finie.

b) Si la suite est infinie, elle admet dans B compact une valeur d'adhérence $\bar{x}$.

b_1) Si $\bar{x} \neq \hat{x}$, soit $B(\bar{x}, \eta)$, $\varepsilon(\bar{x}), f$, les items considérés dans l'hypothèse et soit $(x_k)k \in K$ une sous-suite convergent en $\bar{x}$ et contenue dans $B(\bar{x}, \eta)$.

Considérons x_m, élément de cette sous-suite.

Il existe $x_{m+1} = f_{\bar{x}}(x_m)$ tel que $x_m - x_{m+1} \mathrel{\geqslant\!|\!\geqslant} \varepsilon(\bar{x})$.

Soit x_n, $n \in K$ un suivant de x_m dans la sous-suite (x_k) $k \in K$

$$x_m - x_n = x_m - x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{n-1} - x_n \geqslant (n - m)\varepsilon(\bar{x})$$

et $x_n \mathrel{\geqslant\!|\!\geqslant} \hat{x}$.

Par suite $\forall\, n, m \in K, n > m : x_m - (n - m)\varepsilon(\bar{x}) \mathrel{\geqslant\!|\!\geqslant} x_n \mathrel{\geqslant\!|\!\geqslant} \hat{x}$ ce qui est contradictoire avec le fait que la suite (x_k) appartenant à $B(\bar{x}, \eta)$ est bornée.

La suite décroissante $(x_1, x_2 \ldots)$ admet donc une seule valeur d'adhérence $\hat{x}$ qui est dans B compact sa limite.

b_2) Si $\bar{x} = \hat{x}$, la suite $(x_1, x_2 \ldots)$ décroissante admet $\hat{x}$ pour limite.

Corrolaire : Le théorème précédent s'étend à la relation d'ordre $\mathrel{\leqslant\!|\!\leqslant}$ inverse de la relation $\mathrel{\geqslant\!|\!\geqslant}$.

2. APPLICATION A LA PROGRAMMATION MATHEMATIQUE

2.1. Maximum lexicographique d'un programme

— Soit le programme

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Max}\,(f(x) \mid g(x) \geqslant 0)$$

où f est une fonction numérique définie sur R^n.

g une application de R^n dans R^m à composantes g_i, $i = 1 \ldots m$ définie sur R^n.

Le programme (1) est équivalent au programme :

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{Max}\,(z \mid g(x) \geqslant 0, \quad f(x) - z \geqslant 0$$

en ce sens que si $(\hat{x}, \hat{z})$ est solution optimale de (2), $\hat{x}$ est solution optimale de (1) et que réciproquement si $\hat{x}$ est solution optimale de (1) : $(\hat{x}, \hat{z})$ ou $\hat{z} = f(\hat{x})$ est solution optimale de (2).

On supposera alors en toute généralité que f est linéaire dans (1) et on écrira (1) sous la forme

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{Max}\,(l_1(x) \mid g(x) \geqslant 0).$$

— Soit $l_2 \ldots l_n$, $n - 1$ formes linéaires sur R^n telles que l'endomorphisme $l = (l_1 \ldots l_n)$ soit inversible.

Dans ces conditions, soit $C = \{ x \mid g(x) \geqslant 0 \}$ et $L_1, L_2, ..., L_k, ..., L_n$ les plans de R^n considéré comme espace affine sur lui-même et définis par :

$$L_k = \{ x \mid l_k(x) = \max \left(l_k(x) \mid x \in C \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} L_i \right) \right) \}.$$

On suppose que les maxima intervenant dans cette définition sont finis.

L'indépendance linéaire de formes $l_1 \dots l_n$ entraîne que l'intersection $\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{L}_k$ se réduit à un seul élément $\hat{x}$ qui appartient à C d'après la définition des variétés L_k, $k = 1 \dots n$.

Cet élément $\hat{x}$ sera appelé *maximum lexicographique* de l dans C, — ou solution optimale du programme

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{Max} (l(x) \mid x \in C)$$

qui sera appelé *programme lexicographique.*

2.2. Méthode de résolution du programme lexicographique

$$\operatorname{Max} (l(\mathrm{x}) \mid g(x) \geqslant 0)$$

Hypothèse H : On suppose que

a) $C = \{ x \mid g(x) \geqslant 0 \}$ est un convexe borné fermé non vide de R^n.

b) On connaît a priori un polyèdre convexe fermé borné P de R^n contenant C.

c) $\forall x^* \in P - C$ et tel que $x^* \not> \hat{x}$; on peut construire un plan de séparation semi-strict de x^* et de C (c'est-à-dire un plan

$\pi = \{ x \mid h(x) + \alpha = 0 \}$ tel que $h(x^*) + \alpha < 0$ et $\forall x \in C : h(x) + \alpha \geqslant 0$.

Dans ces conditions, soit $\bar{x}$ et $\hat{x}$ les maxima lexicographiques de l dans P et C respectivement. Deux cas exclusifs sont possibles :

— ou bien $\bar{x} \in C$ et alors $\bar{x} = \hat{x}$,

— ou bien $\bar{x} \notin C$ et alors $\bar{x} \not> \hat{x}$.

Dans cette éventualité, il existe un plan de séparation semi-strict de $\bar{x}$ et C fermé. Soit H le demi-espace fermé par le plan de séparation et contenant C, le polyèdre convexe fermé borné $P' = P \cap H$ contient C sans contenir $\bar{x}$, et il existe une boule fermée $B(\bar{x}, \eta)$ de centre $\bar{x}$ et de rayon $\eta > 0$ qui ne rencontre pas P'.

Soit $\bar{x}'$ le maximum lexicographique de l dans P'. $\bar{x}'$ n'appartient pas à $B(\bar{x}, \eta)$, il existe donc $\varepsilon(\bar{x})$ tel que : $\forall y \in B(\bar{x}, \eta) : y - \bar{x}' \geqslant \varepsilon(\bar{x}) \not> 0$ et en posant

$$f_{\bar{x}}(y) = \bar{x}' \; \forall y \in B(\bar{x}, \eta)$$

on voit que l'hypothèse relative au théorème de convergence est vérifiée.

Par conséquent, à partir d'un polyèdre P_0 convexe fermé borné contenant C et x_0 tel que $l(x_0) = \max(l(x) \mid x \in P_0, x_0 \not> \hat{x})$ on construit une suite :

$$(x_0, x_1, \ldots, x_k \ldots)$$

où $l(\bar{x}_k) = \max\left(l(x) \mid x \in P_0 \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} H_i\right)\right)$

$Hi =$ demi espace fermé par un plan de séparation semi strict de x_{i-1} et de C.

Cette suite est soit finie et son dernier élément est $\hat{x}$, soit infinie et sa limite est $\hat{x}$.

2.3. Discussion de l'hypothèse H et remarques pratiques

2.3.1. Convexité de C

Une condition suffisante pour que $C = \{ x \mid g(x) \geqslant 0 \}$ soit un convexe de R^n est que g soit à composantes concaves ou semi-concaves.

2.3.2. C est borné

On peut toujours, en pratique, se ramener au cas où C est borné en ajoutant au besoin les contraintes $|x_i| < A \; \forall_i : 1 \ldots n, A > 0$.

2.3.3. C est non vide

Si C est défini par des contraintes concaves ou quasi concaves, on peut toujours ramener le problème $\text{Max}(l_1(x) \mid x \in C)$ à un problème équivalent dans un convexe C dont on connaît un point intérieur.

En effet, soit le problème :

$$(\text{Max}(l_1(x) \mid x \in C) \quad , \quad C = \{ x \mid g_i(x) \geqslant 0 \quad i = 1 \ldots m \}$$

g_i concaves ou quasi-concaves.

Soit $x_0 \in R^n$ et $I^- = \{ i \mid g_i(x_0) \leqslant 0 \}$. Alors $|I^-| = p \leqslant n$ et il existe $y_0 = (y_{0i}) \in R^p$ tel que $\forall_i \in I^- : y_{0i} > -g_i(x_0)$.

Soit $z = (x, y) \in R^n \times R^p = R^{n+p}$ et $\bar{g}$ l'explication de R^{n+p} dans R^{m+p} définie par :

$$\bar{g}_i(z) = g_i(x) \qquad \text{pour } i \in I^+ \text{ complémentaire de } I^- \text{ dans } \{ 1 \dots m \}$$

$$\bar{g}_i(z) = g_i(x) + y_i \quad \text{pour } i \in I^-$$

$$\bar{g}_{m+i}(z) = y_i \qquad \text{pour } i \in I^-$$

$\bar{g}$ est à composantes concaves ou quasi-concaves, donc $\bar{C} = \{ z \mid \bar{g}(z) \geqslant 0 \}$ est convexe. L'intérieure $\mathring{\bar{C}}$ de $\bar{C}$ n'est pas vide puisqu'il contient $z_0 = (x_0, y_0)$.

Le convexe C est canoniquement identique au convexe

$$C' = \bar{C} \cap \{ y \mid y_i = 0 \ \forall i \in I^- \}.$$

Soit maintenant : $\bar{l_1}(z) = l_1(x) - A \sum_{i \in I} y_i$, A scalaire, $\bar{l}_1$ est une forme linéaire dans R^{n+p}. Il est clair qu'il existe un scalaire positif A suffisamment grand tel que :

si $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y})$ est solution optimale de Max $(\bar{l}_1(z) \mid z \in \bar{C})$, alors $\hat{x}$ est solution optimale de Max $(l_1(x) \mid x \in C)$ si et seulement si $\hat{y} = 0$.

2.3.4. Choix du polyèdre P_0

Si $l = (l_1 \dots l_k \dots l_n)$, le polyèdre $P_0 = \{ x \mid (l_1 + \dots + l_n)(x) \geqslant a_0, l_k(x) \leqslant a_k, k = 1 \dots n \}$ où a_k est un majorant de $l_k(C)$ et a_0 un minorant de $(l_1 + \dots + l_n)(C)$, contient C et est fermé borné.

$x_0 = l^{-1}(a_1, a_2 \dots a_n)$ est solution optimale du programme

$$\text{Max}\,(l(x) \mid x \in P_0).$$

2.3.5. Plan de séparation de x^* et de C

Soit $x^* \in P - C$ et $\mathring{x} \in \mathring{C}$ intérieur de C.

Soit $[\tilde{x}, \mathring{x}] = C \cap [x^*, \mathring{x}]$, $\tilde{x}$ est point frontière de C et soit $I \subset (1, \dots, m)$ l'ensemble des indices i tels que $g_i(\tilde{x}) = 0$.

Si g_i est dérivable en $\tilde{x} : \pi_{\tilde{x}} = \left\{ x \mid \frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}\tilde{x}}(x - \tilde{x}) = 0 \}, i \in I \right\}$ est un plan de séparation semi strict de x^* et de C.

Il est facile de montrer que si g_i est concave, alors pour tout

$$y \in [x^*, x], \pi_y = \left\{ x \mid g_i(y) + \frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}y}(x - y) = 0 \right\}$$

est un plan de séparation semi strict de x^* et de C (en particulier π_{x^*} qui ne nécessite pas la connaissance de $\mathring{x} \in \mathring{C}$).

2.3.6. Réduction du problème posé à une suite de programmes linéaires enchaînés de format constant

L'élément x_k de la suite $(x_0, x_1 \ldots x_k \ldots)$ convergeant vers $\hat{x}$ s'obtient par résolution du programme linéaire :

$$\mathcal{T}_k : \text{Max}\,(l(x) \mid x \in P_k = P_{k-1} \cap H_k)$$

enchaîné sur le programme $\mathcal{T}_{k-1} : \text{Max}\,(l(x) \mid x \in P_{k-1})$.

L'algorithme de résolution dual s'impose donc car on ajoute une contrainte à chaque étape.

Ceci conduit à une suite de programmes linéaires de formats croissants ce qui peut être rédibitoire du point de vue pratique. On va voir que l'on peut travailler sur une suite $(\mathcal{T}'_k)$ de programmes linéaires de format constant. En effet, la solution de $\mathcal{T}_{k-1}$, $\bar{x}_{k-1}$ élément de R^n appartient à au plus n plans-frontière linéairement indépendants des demi-espaces $H_1 H_2 \ldots H_{k-1}$ successivement introduits. Soit I_{k-1} l'ensemble des indices de tels plans, on a alors :

$$l(\bar{x}_{k-1}) = \max\,(l(x) \mid x \in P'_{k-1})$$

avec
$$P'_{k-1} = P_0 \cap \left(\bigcap_{i \in I_{k-1}} H_i \right).$$

Si H_k est le demi-espace fermé par le plan de séparation, choisi à l'étape k entre $\bar{x}_{k-1}$ et C, $\bar{x}_k$ tel que : $l(x_k) = \max\,(l(x) \mid x \in P'_{k-1} \cap H_k)$ appartient à au plus n plans-frontière des demi-espaces linéairement indépendants $(H_i) i \in I_{k-1} \cup (H_k\}$.

Soit $I_k \subset I_{k-1} \cup \{k\}$ l'ensemble des indices de tels plans. On a

$$l(\bar{x}_k) = \max\,(l(x) \mid x \in P'_k), \qquad P'_k = P_0 \cap \left(\bigcap_{\in I_k} H_i \right)$$

$$|I_k| \leqslant n, k \in I_k \qquad \text{et} \qquad C \subset P'_k$$

la suite des programmes P'_k : Max $(l(x) \mid x \in P'_k)$ a donc un nombre de contraintes égal à $2n + 1(n + 1$ contraintes relatives au polyèdre P_0, et n contraintes relatives aux demi-espaces H_i, $i \in I_k)$ et s'enchaînent entre eux de façon naturelle par remplacement d'une contrainte par une autre à chaque itération; elle est donc plus économique que la méthode de Kelley (2).

Remarque. — Sur le plan pratique, il semble qu'il y ait intérêt à utiliser les plans de séparation $\pi_{\tilde{x}}$ définis au paragraphe 2.3.5 de préférence aux plans π_y, $y \in]\tilde{x}, x^*]$, car ils sont « plus proches » du convexe C.

3. DEUXIEME METHODE DE RESOLUTION D'UN PROGRAMME CONVEXE

3.1. Rappel de résultats classiques

Le programme

$$\text{Max}\,(f(x) \mid g(x) \geqslant 0) \tag{1}$$

est un programme convexe si f est une fonction numérique concave définie sur R^n et si g est une application de R^n dans R^m à composantes concaves : $g_1 \dots g_n$ définies dans R^n.

Si l'intérieur du convexe $C = \{ x \mid g(x) \geqslant 0 \}$ relativement à la variété linéaire engendrée par C n'est pas vide, les propositions suivantes sont équivalentes :

a) $\bar{x}$ est solution optimale du programme (1).

b) Le Lagrangien $L(x, u) = f(x) + ug(x)$ possède un point-selle $(\bar{x}, \bar{u})$ dans $R^n \times U$ où $U = \{ u \mid u \geqslant 0 \} \subset R^m$, et alors $L(\bar{x}, \bar{u}) = f(\bar{x})$.

c) $\max\limits_{x \in R^n} \min\limits_{u \in U} L(x, u) = \min\limits_{u \in U} \max\limits_{x \in R^n} L(x, u) = L(\bar{x}, \bar{u}) = f(\bar{x})$

Il est clair par ailleurs que :

$$\begin{aligned} &\min\,(u_0 \mid u \geqslant 0,\, u_0 \in R, f(x) + ug(x) \leqslant u_0 \qquad \forall x \in R^n) \\ &= \min_{u \geqslant 0} \max_{x \in R^n} (f(x) + ug(x)) = f(\bar{x}). \end{aligned} \tag{2}$$

3.2. Nouvelle formulation du problème 1

La méthode présentée ici est différente de celle de G. B. Dantzig (3). Elle est en quelque sorte duale.

Elle a l'avantage de ne nécessiter qu'une suite de programme linéaires enchaînés de format constant alors que la méthode présentée par G. B. Dantzig conduit à une suite de programme linéaires de format croissant à chaque étape.

La relation (2) permet de ramener le problème (1) au problème (3).

$$\text{Min}\,(u_0 \mid (u, u_0) \in D) \tag{3}$$

où $D = \{ (u, u_0) \mid u \geqslant 0,\, u_0 \in R, f(x) + ug(x) \leqslant u_0, \forall\, x \in R^n \} \subset R^{m+1}$.

On suppose que D est contenu dans un polyèdre convexe compact D_0 de R^{m+1} et que $D \neq \emptyset$ (voir paragraphe 2.3).

Méthode de résolution du problème (3).

Soit $l_1 \dots l_{m+1}$, $m+1$ formes linéaires indépendantes dans R^{m+1} et on suppose que : (4) $l_1(u, u_0) = u_0$. On pose $l = (l_1 \dots l_{m+1})$.

Si (u, u_0) assure le minimum lexicographique de l dans D, il est clair que c'est aussi une solution optimale de (3).

On considère donc le problème :

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{Min}\left(l(u, u_0) \mid (u, u_0) \in D\right).$$

A toute suite $(x_1 \dots x_k)$ de k éléments de R^n associons le problème

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{Min}(l(u, u_0) \mid (u, u_0) \in D_0 \cap \Delta_{(k)} = D_{(k)})$$

où

$$\text{(7)} \qquad \Delta_{(k)} = \{(u, u_0) \mid u \geqslant 0 \quad , \quad u_0 \in R, f(x_i) + ug(xi) \leqslant u_0, \forall_i \in (1 \dots k)\}$$

$D(k)$ est un polyèdre convexe compact de R^{m+1} contenant D, et par suite si $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k})$ est la solution optimale du programme linéaire (6)

$$\text{(8)} \qquad (\bar{u}_k, \bar{u}_{0k}) \leqslant (\bar{u}, \bar{u}_0) \qquad \text{solution de (5).}$$

Deux éventualités exclusives sont possibles :

Éventualité 1 : Pour tout $x \in R^n$: $f(x) + \bar{u}_k g(x) \leqslant \bar{u}_{0k}$ ce qui est équivalent à :

$$\text{(9)} \qquad \max_{x \in R^n} (f(x) + \bar{u}_k g(x)) \leqslant \bar{u}_{0k}.$$

Éventualité 2 : Il existe x_{k+1} dans R^n tel que :

$$\text{(10)} \qquad f(x_{k+1}) + \bar{u}_k g(x_{k+1}) > \bar{u}_{0k}.$$

3.3. Discussion de l'éventualité 1

Proposition : Dans l'éventualité 1 : $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k})$ est solution optimale du problème (5).

Démonstration : D'après (9) $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k}) \in D$, donc :

$$(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k}) \geqslant (\bar{u}, \bar{u}_0).$$

Ceci entraîne d'après (8) :

$$\text{(11)} \qquad (\bar{u}_k, \bar{u}_{0k}) = (\bar{u}, \bar{u}_0).$$

Considérons maintenant le programme linéaire

$$(12) \quad \text{Max}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g(x_i) \geqslant 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geqslant 0\right)$$

dual du programme linéaire :

$$(13) \quad \text{Min}\,(u_0 \mid u \geqslant 0 \quad , \quad f(x_i) + ug(x_i) \leqslant u_0 \quad , \quad i = 1 \ldots, k).$$

Soit $(\bar{\lambda}_i)$ une solution optimale de (12) et

$$(14) \qquad \bar{x}_k = \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i x_i.$$

Proposition : Dans l'éventualité (1), $\bar{x}_k$ défini par (14) est solution optimale du problème (1).

Démonstration : D'après (12), (14) et par suite de la concavité de g

$$\sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i g(x_i) \geqslant 0$$

entraîne $g(\bar{x}_k) \geqslant 0$ donc $\bar{x}_k \in C$.

D'après (12), (14) et par suite de la concavité de f

$$(15) \qquad \bar{u}_{0k} = \sum \bar{\lambda}_i f(x_i) \leqslant f(\bar{x}_k)$$

D'après (11) et (15) : $\max\,(f(x) \mid x \in C) = \bar{u}_0 = \bar{u}_{0k} \leqslant f(\bar{x}_k)$ et comme

$$\bar{x}_k \in C : f(\bar{x}_k) = \max\,(f(x) \mid x \in C).$$

3.4. Discussion de l'éventualité 2

L'éventualité 2 conditionnée par la vérification de la relation (10) montre que $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k}) \notin D(k+1)$ polyèdre construit à partir de la suite

$$(x_1, x_2 \ldots x_k) \cup \{x_{k+1}\}.$$

Comme $D \subset D_{(k+1)} \subset D_{(k)}$

$$(16) \qquad (\bar{u}_k, \bar{u}_{0k}) \nless (\bar{u}_{k+1}, \bar{u}_{0k+1}) \leqslant (\bar{u}, \bar{u}_0).$$

Proposition : Si l'éventualité (1) n'a pas lieu pour k fini :

a) la suite $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k})_{k \in N^*}$ a pour limite $(\bar{u}, \bar{u}_0)$,

b) $f(\bar{x}_k)$ a pour limite $\max\,(f(x) \mid x \in C)$. De plus, la suite $(\bar{x}_k)_{k \in N}$ appartient à C.

Démonstration :

a) D'après (10) et la définition (3) de D, il est clair que :

$$\{ (u, u_0) \mid f(x_{k+1}) + ug(x_{k+1}) = u_0 \}$$

est un plan de séparation semi-strict de $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k})$ et de D (convexe).

Il existe donc une boule fermée $B((\bar{u}_k, \bar{u}_{0k}), \eta)$ de centre $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k})$ et de rayon $\eta > 0$ ne rencontrant pas D_{k+1}. Donc $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k+1})$ assurant le minimum lexicographique de l dans D_{k+1} n'appartient pas à $B((\bar{u}_k, \bar{u}_{0k}), \eta)$ et il existe $\bar{\varepsilon} \in R^{m+1}$ tel que :

$$\forall (\bar{u}, \bar{u}_0) \in B((\bar{u}_k, \bar{u}_{0k}), \eta) : (u, u_0) - (\bar{u}_{k+1}, \bar{u}_{0k+1}) \lessgtr - \bar{\varepsilon}.$$

La suite $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k})k \in N^*$ est contenue dans D_0 compact. Donc l'hypothèse de théorème de convergence du point (1) est vérifiée et cette suite converge vers $(\bar{u}, \bar{u}_0)$.

Reprenant mutatis mutandis ce qui a été vu au paragraphe 2.3.6, on ne retiendra dans les polyèdres $D(k)$ que les demi-espaces dont les plans fermetures correspondent aux plans de séparation linéairement indépendant contenant $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k})$. Ces demi-espaces sont en nombre $m + 1$ au plus, ce qui conduit à des programmes linéaires (6) enchaînés de format constant.

b) Il est clair que $\bar{x}_k = \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i x_i$ appartient à C car

$$g(\bar{x}_k) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i g(x_i) \geqslant 0.$$

De plus, d'après (15) : $\bar{u}_{0k} \leqslant f(\bar{x}_k) \leqslant f(\bar{x}) = \bar{u}_0$.

La suite $f(\bar{x}_k)$ majorant la suite $\bar{u}_{0k}$ strictement croissante, ayant même limite qu'elle, et étant majorée par cette limite n'est pas décroissante et converge vers $f(\bar{x}) = \max(f(x) \mid x \in C)$.

BIBLIOGRAPHIE

(1) Polak E., *On the convergence of optimisation algorithms*, RIRO n° 16, janvier 1969.

(2) Kelley J. E., *The cutting plane method for solving convex programs*, J. Soc. Indu. and Appl. Math., vol. 8, n° 4, décembre 1960.

(3) Dantzig G. B., *Linear programming and extensions*, Princeton University Press, 1963, chap. 24, General Theory.