

M. COURTILLOT

**Deux algorithmes de programmation mathématique**

*Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique*, tome 7, n° R1 (1973), p. 23-33

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1973\\_\\_7\\_1\\_23\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_1_23_0)

© AFCET, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## DEUX ALGORITHMES DE PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE (1)

par M. COURTILOT (2)

Résumé. — Cet exposé présente deux algorithmes permettant de ramener un programme mathématique de maximisation d'une fonction numérique concave ou quasi concave dans un convexe  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  à une suite de programmes linéaires enchaînés de format constant (abandon d'une contrainte, remplacée par une autre à chaque étape).

Au point I est établi un théorème général de convergence valable en particulier pour ces deux algorithmes. Ce théorème est voisin de celui de E. Polack [1] mais utilise une procédure lexicographique.

— Le premier algorithme s'adresse à des programmes où la fonction à optimiser est linéaire (on peut toujours se ramener à ce cas) et où le convexe  $C$  est défini par des inégalités numériques différentiables sur la frontière de  $C$ . La concavité ou la semi-concavité des fonctions n'est pas exigée. La méthode de Kelley [2] rentre dans ce type d'algorithme, mais suppose que le convexe  $C$  est défini à l'aide de fonctions numériques concaves. Elle impose aussi une suite de programmes linéaires de format croissant.

— Le deuxième algorithme s'adresse à des programmes où la fonction à optimiser et où les contraintes sont concaves. La méthode proposée peut être considérée comme duale de celle de G. B. Dantzig [3], mais ne nécessite pas, comme cette dernière, une suite de programmes linéaires de format croissant, mais constant, la convergence est assurée sans faire l'hypothèse de non dégénérescence des programmes linéaires.

### 1. THEOREME DE CONVERGENCE

#### 1.1. Ordre lexicographique

— Soit  $y = (y_1 \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$ .  $y$  est dit lexicographiquement positif si la première composante non nulle de  $y$  est positive ou si toutes ses composantes sont nulles. On notera :  $y \text{ L } 0$ .

— La relation binaire sur  $\mathbb{R}^n$  :  $y_1 \text{ R } y_2 \Leftrightarrow y_1 - y_2 \text{ L } 0$  est un ordre total noté  $y_1 \text{ L } y_2$ .

— Soit  $l = (l_1 \dots l_n)$  un  $n$ -uplet de formes linéaires indépendantes sur  $\mathbb{R}^n$ .  $l$  peut donc être considéré comme un automorphisme de  $\mathbb{R}^n$ .

(1) Communication présentée à l'European Meeting of the Econometric Society, Budapest, Sept. 72.

(2) Université Paris Sud.

La relation binaire :

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow l(x_1) - l(x_2) \geq 0$$

est un ordre total sur  $R^n$  que l'on appellera ordre associé à  $l$  et que l'on notera :  $x_1 \geq_l x_2$ .

Si  $l$  est bien spécifié, on notera :  $x_1 \geq x_2$ .

La relation stricte  $x_1 \succ x_2$  est définie par :

$$x_1 \geq x_2 \quad \text{et} \quad x_1 \neq x_2.$$

## 1.2. Théorème de convergence

— Soit  $B = \{ x \mid \|x\| \leq A, A > 0 \}$  une boule fermée de centre 0 et de rayon  $A$  définie par une norme quelconque sur  $R^n$ .

— Soit  $\hat{x} \in B$  un élément appelé point distingué dans  $B$ .

— Soit  $\geq_l$  l'ordre associé à  $l = (l_1 \dots l_n)$ .

**Hypothèse :** Pour tout  $x \in B$  tel que  $x \succ \hat{x}$ , il existe

a) une boule fermée  $B(x, \eta)$  de centre  $x$  et de rayon  $\eta > 0$ ,

b) un vecteur  $\varepsilon(x) \succ 0$ ,

c) une application  $f_x$  de  $B(x, \eta)$  dans  $B$

tels que :

$$\forall y \in B(x, \eta) : y - f_x(y) \geq \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad f_x(y) \geq \hat{x}.$$

**Théorème :** Dans les conditions de l'hypothèse la suite  $(x_0, x_1 \dots x_i \dots)$  où  $x_{i+1} = f_{x_i}(x_i)$  est telle que :

a) ou bien elle est finie et son dernier élément est le point distingué  $\hat{x}$ ,

b) ou bien elle est infinie, elle admet alors une limite qui est  $\hat{x}$ .

*Démonstration :*

a) Supposons la suite finie et soit  $x_p$  son dernier élément.

On a, d'après l'hypothèse

$$x_0 \succ x_1 \succ \dots \succ x_p \geq \hat{x}$$

$x_p \neq \hat{x} \Rightarrow x_p \succ \hat{x}$ . Donc d'après l'hypothèse, il existe  $x_{p+1} = f_{x_p}(x_p)$  tel que  $x_{p+1} \geq \hat{x}$ , ce qui contredit le fait que  $x_p$  est le dernier élément de la suite finie.

b) Si la suite est infinie, elle admet dans  $B$  compact une valeur d'adhérence  $\bar{x}$ .

$b_1$ ) Si  $\bar{x} \neq \hat{x}$ , soit  $B(\bar{x}, \eta)$ ,  $\varepsilon(\bar{x})$ ,  $f$ , les items considérés dans l'hypothèse et soit  $(x_k)_{k \in K}$  une sous-suite convergente en  $\bar{x}$  et contenue dans  $B(\bar{x}, \eta)$ .

Considérons  $x_m$ , élément de cette sous-suite.

Il existe  $x_{m+1} = f_{\bar{x}}(x_m)$  tel que  $x_m - x_{m+1} \geq \varepsilon(\bar{x})$ .

Soit  $x_n, n \in K$  un suivant de  $x_m$  dans la sous-suite  $(x_k)_{k \in K}$

$$x_m - x_n = x_m - x_{m+1} + x_{m+1} - x_{m+2} + \dots + x_{n-1} - x_n \geq (n - m)\varepsilon(\bar{x})$$

et  $x_n \geq \hat{x}$ .

Par suite  $\forall n, m \in K, n > m : x_m - (n - m)\varepsilon(\bar{x}) \geq x_n \geq \hat{x}$  ce qui est contradictoire avec le fait que la suite  $(x_k)$  appartenant à  $B(\bar{x}, \eta)$  est bornée.

La suite décroissante  $(x_1, x_2 \dots)$  admet donc une seule valeur d'adhérence  $\hat{x}$  qui est dans  $B$  compact sa limite.

$b_2$ ) Si  $\bar{x} = \hat{x}$ , la suite  $(x_1, x_2 \dots)$  décroissante admet  $\hat{x}$  pour limite.

**Corrolaire :** Le théorème précédent s'étend à la relation d'ordre  $\leq$  inverse de la relation  $\geq$ .

## 2. APPLICATION

### A LA PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE

#### 2.1. Maximum lexicographique d'un programme

— Soit le programme

$$(1) \quad \text{Max } (f(x) \mid g(x) \geq 0)$$

où  $f$  est une fonction numérique définie sur  $R^n$ .

$g$  une application de  $R^n$  dans  $R^m$  à composantes  $g_i, i = 1 \dots m$  définie sur  $R^n$ .

Le programme (1) est équivalent au programme :

$$(2) \quad \text{Max } (z \mid g(x) \geq 0, f(x) - z \geq 0)$$

en ce sens que si  $(\hat{x}, \hat{z})$  est solution optimale de (2),  $\hat{x}$  est solution optimale de (1) et que réciproquement si  $\hat{x}$  est solution optimale de (1) :  $(\hat{x}, \hat{z})$  ou  $\hat{z} = f(\hat{x})$  est solution optimale de (2).

On supposera alors en toute généralité que  $f$  est linéaire dans (1) et on écrira (1) sous la forme

$$(3) \quad \text{Max } (l_1(x) \mid g(x) \geq 0).$$

— Soit  $l_2 \dots l_n, n - 1$  formes linéaires sur  $R^n$  telles que l'endomorphisme  $l = (l_1 \dots l_n)$  soit inversible.

Dans ces conditions, soit  $C = \{x \mid g(x) \geq 0\}$  et  $L_1, L_2, \dots, L_k, \dots, L_n$  les plans de  $R^n$  considéré comme espace affine sur lui-même et définis par :

$$L_k = \left\{ x \mid l_k(x) = \max \left( l_k(x) \mid x \in C \cap \left( \bigcap_{i=1}^{k-1} L_i \right) \right) \right\}.$$

On suppose que les maxima intervenant dans cette définition sont finis.

L'indépendance linéaire de formes  $l_1 \dots l_n$  entraîne que l'intersection  $\bigcap_{k=1}^n L_k$  se réduit à un seul élément  $\hat{x}$  qui appartient à  $C$  d'après la définition des variétés  $L_k$ ,  $k = 1 \dots n$ .

Cet élément  $\hat{x}$  sera appelé *maximum lexicographique* de  $l$  dans  $C$ , — ou solution optimale du programme

$$(4) \quad \text{Max } (l(x) \mid x \in C)$$

qui sera appelé *programme lexicographique*.

## 2.2. Méthode de résolution du programme lexicographique

$$\text{Max } (l(x) \mid g(x) \geq 0)$$

**Hypothèse H :** On suppose que

a)  $C = \{x \mid g(x) \geq 0\}$  est un convexe borné fermé non vide de  $R^n$ .

b) On connaît a priori un polyèdre convexe fermé borné  $P$  de  $R^n$  contenant  $C$ .

c)  $\forall x^* \in P - C$  et tel que  $x^* \not\geq \hat{x}$ , on peut construire un plan de séparation semi-strict de  $x^*$  et de  $C$  (c'est-à-dire un plan

$$\pi = \{x \mid h(x) + \alpha = 0\} \text{ tel que } h(x^*) + \alpha < 0 \text{ et } \forall x \in C : h(x) + \alpha \geq 0.$$

Dans ces conditions, soit  $\bar{x}$  et  $\hat{x}$  les maxima lexicographiques de  $l$  dans  $P$  et  $C$  respectivement. Deux cas exclusifs sont possibles :

— ou bien  $\bar{x} \in C$  et alors  $\bar{x} = \hat{x}$ ,

— ou bien  $\bar{x} \notin C$  et alors  $\bar{x} \not\geq \hat{x}$ .

Dans cette éventualité, il existe un plan de séparation semi-strict de  $\bar{x}$  et  $C$  fermé. Soit  $H$  le demi-espace fermé par le plan de séparation et contenant  $C$ , le polyèdre convexe fermé borné  $P' = P \cap H$  contient  $C$  sans contenir  $\bar{x}$ , et il existe une boule fermée  $B(\bar{x}, \eta)$  de centre  $\bar{x}$  et de rayon  $\eta > 0$  qui ne rencontre pas  $P'$ .

Soit  $\bar{x}'$  le maximum lexicographique de  $l$  dans  $P'$ .  $\bar{x}'$  n'appartient pas à  $B(\bar{x}, \eta)$ , il existe donc  $\varepsilon(\bar{x})$  tel que :  $\forall y \in B(\bar{x}, \eta) : y - \bar{x}' \geq \varepsilon(\bar{x}) \neq 0$  et en posant

$$f_{\bar{x}}(y) = \bar{x}' \forall y \in B(\bar{x}, \eta)$$

on voit que l'hypothèse relative au théorème de convergence est vérifiée.

Par conséquent, à partir d'un polyèdre  $P_0$  convexe fermé borné contenant  $C$  et  $x_0$  tel que  $l(x_0) = \max (l(x) \mid x \in P_0, x_0 \neq \hat{x})$  on construit une suite :

$$(x_0, x_1, \dots, x_k \dots)$$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} l(\bar{x}_k) = \max \left( l(x) \mid x \in P_0 \cap \left( \bigcap_{i=1}^k H_i \right) \right) \\ H_i = \text{demi espace fermé par un plan de séparation semi strict de } x_{i-1} \\ \text{et de } C. \end{array} \right.$$

Cette suite est soit finie et son dernier élément est  $\hat{x}$ , soit infinie et sa limite est  $\hat{x}$ .

### 2.3. Discussion de l'hypothèse H et remarques pratiques

#### 2.3.1. Convexité de C

Une condition suffisante pour que  $C = \{ x \mid g(x) \geq 0 \}$  soit un convexe de  $R^n$  est que  $g$  soit à composantes concaves ou semi-concaves.

#### 2.3.2. C est borné

On peut toujours, en pratique, se ramener au cas où  $C$  est borné en ajoutant au besoin les contraintes  $|x_i| < A \forall i : 1 \dots n, A > 0$ .

#### 2.3.3. C est non vide

Si  $C$  est défini par des contraintes concaves ou quasi concaves, on peut toujours ramener le problème  $\text{Max } (l_1(x) \mid x \in C)$  à un problème équivalent dans un convexe  $C$  dont on connaît un point intérieur.

En effet, soit le problème :

$$(\text{Max } (l_1(x) \mid x \in C) \quad , \quad C = \{ x \mid g_i(x) \geq 0 \quad i = 1 \dots m \}$$

$g_i$  concaves ou quasi-concaves.

Soit  $x_0 \in R^n$  et  $I^- = \{ i \mid g_i(x_0) \leq 0 \}$ . Alors  $|I^-| = p \leq n$  et il existe  $y_0 = (y_{0i}) \in R^p$  tel que  $\forall i \in I^- : y_{0i} > -g_i(x_0)$ .

Soit  $z = (x, y) \in R^n \times R^p = R^{n+p}$  et  $\bar{g}$  l'explication de  $R^{n+p}$  dans  $R^{m+p}$  définie par :

$$\begin{aligned}\bar{g}_i(z) &= g_i(x) && \text{pour } i \in I^+ \text{ complémentaire de } I^- \text{ dans } \{1 \dots m\} \\ \bar{g}_i(z) &= g_i(x) + y_i && \text{pour } i \in I^- \\ \bar{g}_{m+i}(z) &= y_i && \text{pour } i \in I^-\end{aligned}$$

$\bar{g}$  est à composantes concaves ou quasi-concaves, donc  $\bar{C} = \{z \mid \bar{g}(z) \geq 0\}$  est convexe. L'intérieure  $\dot{\bar{C}}$  de  $\bar{C}$  n'est pas vide puisqu'il contient  $z_0 = (x_0, y_0)$ .

Le convexe  $C$  est canoniquement identique au convexe

$$C' = \bar{C} \cap \{y \mid y_i = 0 \forall i \in I^-\}.$$

Soit maintenant :  $\bar{l}_1(z) = l_1(x) - A \sum_{i \in I^-} y_i$ ,  $A$  scalaire,  $\bar{l}_1$  est une forme linéaire dans  $R^{n+p}$ . Il est clair qu'il existe un scalaire positif  $A$  suffisamment grand tel que :

si  $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y})$  est solution optimale de  $\text{Max } (\bar{l}_1(z) \mid z \in \bar{C})$ , alors  $\hat{x}$  est solution optimale de  $\text{Max } (l_1(x) \mid x \in C)$  si et seulement si  $\hat{y} = 0$ .

#### 2.3.4. Choix du polyèdre $P_0$

Si  $l = (l_1 \dots l_k \dots l_n)$ , le polyèdre  $P_0 = \{x \mid (l_1 + \dots + l_n)(x) \geq a_0, l_k(x) \leq a_k, k = 1 \dots n\}$  où  $a_k$  est un majorant de  $l_k(C)$  et  $a_0$  un minorant de  $(l_1 + \dots + l_n)(C)$ , contient  $C$  et est fermé borné.

$x_0 = l^{-1}(a_1, a_2 \dots a_n)$  est solution optimale du programme

$$\text{Max } (l(x) \mid x \in P_0).$$

#### 2.3.5. Plan de séparation de $x^*$ et de $C$

Soit  $x^* \in P - C$  et  $\dot{x} \in \dot{C}$  intérieur de  $C$ .

Soit  $[\tilde{x}, \dot{x}] = C \cap [x^*, \dot{x}]$ ,  $\tilde{x}$  est point frontière de  $C$  et soit  $I \subset \{1, \dots, m\}$  l'ensemble des indices  $i$  tels que  $g_i(\tilde{x}) = 0$ .

Si  $g_i$  est dérivable en  $\tilde{x} : \pi_{\tilde{x}} = \left\{ x \mid \frac{dg_i}{d\tilde{x}}(x - \tilde{x}) = 0 \right\}, i \in I$  est un plan de séparation semi strict de  $x^*$  et de  $C$ .

Il est facile de montrer que si  $g_i$  est concave, alors pour tout

$$y \in [x^*, \dot{x}], \pi_y = \left\{ x \mid g_i(y) + \frac{dg_i}{dy}(x - y) = 0 \right\}$$

est un plan de séparation semi strict de  $x^*$  et de  $C$  (en particulier  $\pi_{x^*}$  qui ne nécessite pas la connaissance de  $\dot{x} \in \dot{C}$ ).

**2.3.6. Réduction du problème posé à une suite de programmes linéaires enchaînés de format constant**

L'élément  $x_k$  de la suite  $(x_0, x_1 \dots x_k \dots)$  convergeant vers  $\hat{x}$  s'obtient par résolution du programme linéaire :

$$\mathcal{P}_k : \text{Max } (l(x) \mid x \in P_k = P_{k-1} \cap H_k)$$

enchaîné sur le programme  $\mathcal{P}_{k-1} : \text{Max } (l(x) \mid x \in P_{k-1})$ .

L'algorithme de résolution dual s'impose donc car on ajoute une contrainte à chaque étape.

Ceci conduit à une suite de programmes linéaires de formats croissants ce qui peut être réductible du point de vue pratique. On va voir que l'on peut travailler sur une suite  $(\mathcal{P}'_k)$  de programmes linéaires de format constant. En effet, la solution de  $\mathcal{P}_{k-1}$ ,  $\bar{x}_{k-1}$  élément de  $R^n$  appartient à au plus  $n$  plans-frontière linéairement indépendants des demi-espaces  $H_1 H_2 \dots H_{k-1}$  successivement introduits. Soit  $I_{k-1}$  l'ensemble des indices de tels plans, on a alors :

$$l(\bar{x}_{k-1}) = \max (l(x) \mid x \in P'_{k-1})$$

avec

$$P'_{k-1} = P_0 \cap \left( \bigcap_{i \in I_{k-1}} H_i \right).$$

Si  $H_k$  est le demi-espace fermé par le plan de séparation, choisi à l'étape  $k$  entre  $\bar{x}_{k-1}$  et  $C$ ,  $\bar{x}_k$  tel que :  $l(x_k) = \max (l(x) \mid x \in P'_{k-1} \cap H_k)$  appartient à au plus  $n$  plans-frontière des demi-espaces linéairement indépendants  $(H_i)_{i \in I_{k-1} \cup \{k\}}$ .

Soit  $I_k \subset I_{k-1} \cup \{k\}$  l'ensemble des indices de tels plans. On a

$$l(\bar{x}_k) = \max (l(x) \mid x \in P'_k), \quad P'_k = P_0 \cap \left( \bigcap_{i \in I_k} H_i \right)$$

$$|I_k| \leq n, k \in I_k \quad \text{et} \quad C \subset P'_k$$

la suite des programmes  $P'_k : \text{Max } (l(x) \mid x \in P'_k)$  a donc un nombre de contraintes égal à  $2n + 1$  ( $n + 1$  contraintes relatives au polyèdre  $P_0$ , et  $n$  contraintes relatives aux demi-espaces  $H_i, i \in I_k$ ) et s'enchaînent entre eux de façon naturelle par remplacement d'une contrainte par une autre à chaque itération; elle est donc plus économique que la méthode de Kelley (2).

REMARQUE. — Sur le plan pratique, il semble qu'il y ait intérêt à utiliser les plans de séparation  $\pi_{\tilde{x}}$  définis au paragraphe 2.3.5 de préférence aux plans  $\pi_y, y \in ]\tilde{x}, x^*]$ , car ils sont « plus proches » du convexe  $C$ .



### 3. DEUXIEME METHODE DE RESOLUTION D'UN PROGRAMME CONVEXE

#### 3.1. Rappel de résultats classiques

Le programme

$$(1) \quad \text{Max } (f(x) \mid g(x) \geq 0)$$

est un programme convexe si  $f$  est une fonction numérique concave définie sur  $R^n$  et si  $g$  est une application de  $R^n$  dans  $R^m$  à composantes concaves :  $g_1 \dots g_m$  définies dans  $R^n$ .

Si l'intérieur du convexe  $C = \{x \mid g(x) \geq 0\}$  relativement à la variété linéaire engendrée par  $C$  n'est pas vide, les propositions suivantes sont équivalentes :

a)  $\bar{x}$  est solution optimale du programme (1).

b) Le Lagrangien  $L(x, u) = f(x) + ug(x)$  possède un point-selle  $(\bar{x}, \bar{u})$  dans  $R^n \times U$  où  $U = \{u \mid u \geq 0\} \subset R^m$ , et alors  $L(\bar{x}, \bar{u}) = f(\bar{x})$ .

$$c) \quad \max_{x \in R^n} \min_{u \in U} L(x, u) = \min_{u \in U} \max_{x \in R^n} L(x, u) = L(\bar{x}, \bar{u}) = f(\bar{x})$$

Il est clair par ailleurs que :

$$(2) \quad \min (u_0 \mid u \geq 0, u_0 \in R, f(x) + ug(x) \leq u_0 \quad \forall x \in R^n) \\ = \min_{u \geq 0} \max_{x \in R^n} (f(x) + ug(x)) = f(\bar{x}).$$

#### 3.2. Nouvelle formulation du problème 1

La méthode présentée ici est différente de celle de G. B. Dantzig (3). Elle est en quelque sorte duale.

Elle a l'avantage de ne nécessiter qu'une suite de programme linéaires enchaînés de format constant alors que la méthode présentée par G. B. Dantzig conduit à une suite de programme linéaires de format croissant à chaque étape.

La relation (2) permet de ramener le problème (1) au problème (3).

$$(3) \quad \text{Min } (u_0 \mid (u, u_0) \in D)$$

où  $D = \{(u, u_0) \mid u \geq 0, u_0 \in R, f(x) + ug(x) \leq u_0, \forall x \in R^n\} \subset R^{m+1}$ .

On suppose que  $D$  est contenu dans un polyèdre convexe compact  $D_0$  de  $R^{m+1}$  et que  $D \neq \emptyset$  (voir paragraphe 2.3).

*Méthode de résolution du problème (3).*

Soit  $l_1 \dots l_{m+1}$ ,  $m + 1$  formes linéaires indépendantes dans  $R^{m+1}$  et on suppose que : (4)  $l_1(u, u_0) = u_0$ . On pose  $l = (l_1 \dots l_{m+1})$ .

Si  $(u, u_0)$  assure le minimum lexicographique de  $l$  dans  $D$ , il est clair que c'est aussi une solution optimale de (3).

On considère donc le problème :

$$(5) \quad \text{Min}(l(u, u_0) \mid (u, u_0) \in D).$$

A toute suite  $(x_1 \dots x_k)$  de  $k$  éléments de  $R^n$  associons le problème

$$(6) \quad \text{Min}(l(u, u_0) \mid (u, u_0) \in D_0 \cap \Delta_{(k)} = D_{(k)})$$

où

$$(7) \quad \Delta_{(k)} = \{ (u, u_0) \mid u \geq 0, \quad u_0 \in R, f(x_i) + u g(x_i) \leq u_0, \forall i \in (1 \dots k) \}$$

$D_{(k)}$  est un polyèdre convexe compact de  $R^{m+1}$  contenant  $D$ , et par suite si  $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k})$  est la solution optimale du programme linéaire (6)

$$(8) \quad (\bar{u}_k, \bar{u}_{0k}) \leq (\bar{u}, \bar{u}_0) \quad \text{solution de (5)}.$$

Deux éventualités exclusives sont possibles :

*Éventualité 1* : Pour tout  $x \in R^n : f(x) + \bar{u}_k g(x) \leq \bar{u}_{0k}$  ce qui est équivalent à :

$$(9) \quad \max_{x \in R^n} (f(x) + \bar{u}_k g(x)) \leq \bar{u}_{0k}.$$

*Éventualité 2* : Il existe  $x_{k+1}$  dans  $R^n$  tel que :

$$(10) \quad f(x_{k+1}) + \bar{u}_k g(x_{k+1}) > \bar{u}_{0k}.$$

### 3.3. Discussion de l'éventualité 1

**Proposition** : Dans l'éventualité 1 :  $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k})$  est solution optimale du problème (5).

*Démonstration* : D'après (9)  $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k}) \in D$ , donc :

$$(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k}) \geq (\bar{u}, \bar{u}_0).$$

Ceci entraîne d'après (8) :

$$(11) \quad (\bar{u}_k, \bar{u}_{0k}) = (\bar{u}, \bar{u}_0).$$

Considérons maintenant le programme linéaire

$$(12) \quad \text{Max} \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i) \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i g(x_i) \geq 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right)$$

dual du programme linéaire :

$$(13) \quad \text{Min} (u_0 \mid u \geq 0 \quad , \quad f(x_i) + u g(x_i) \leq u_0 \quad , \quad i = 1 \dots, k).$$

Soit  $(\bar{\lambda}_i)$  une solution optimale de (12) et

$$(14) \quad \bar{x}_k = \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i x_i.$$

**Proposition :** Dans l'éventualité (1),  $\bar{x}_k$  défini par (14) est solution optimale du problème (1).

*Démonstration :* D'après (12), (14) et par suite de la concavité de  $g$

$$\sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i g(x_i) \geq 0$$

entraîne  $g(\bar{x}_k) \geq 0$  donc  $\bar{x}_k \in C$ .

D'après (12), (14) et par suite de la concavité de  $f$

$$(15) \quad \bar{u}_{0k} = \sum \bar{\lambda}_i f(x_i) \leq f(\bar{x}_k)$$

D'après (11) et (15) :  $\max (f(x) \mid x \in C) = \bar{u}_0 = \bar{u}_{0k} \leq f(\bar{x}_k)$  et comme

$$\bar{x}_k \in C : f(\bar{x}_k) = \max (f(x) \mid x \in C).$$

### 3.4. Discussion de l'éventualité 2

L'éventualité 2 conditionnée par la vérification de la relation (10) montre que  $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k}) \notin D(k+1)$  polyèdre construit à partir de la suite

$$(x_1, x_2 \dots x_k) \cup \{x_{k+1}\}.$$

Comme  $D \subset D_{(k+1)} \subset D_{(k)}$

$$(16) \quad (\bar{u}_k, \bar{u}_{0k}) \notin (\bar{u}_{k+1}, \bar{u}_{0k+1}) \leq (\bar{u}, \bar{u}_0).$$

**Proposition :** Si l'éventualité (1) n'a pas lieu pour  $k$  fini :

a) la suite  $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  a pour limite  $(\bar{u}, \bar{u}_0)$ ,

b)  $f(\bar{x}_k)$  a pour limite  $\max (f(x) \mid x \in C)$ . De plus, la suite  $(\bar{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  appartient à  $C$ .

*Démonstration :*

a) D'après (10) et la définition (3) de  $D$ , il est clair que :

$$\{ (u, u_0) \mid f(x_{k+1}) + ug(x_{k+1}) = u_0 \}$$

est un plan de séparation semi-strict de  $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k})$  et de  $D$  (convexe).

Il existe donc une boule fermée  $B((\bar{u}_k, \bar{u}_{0k}), \eta)$  de centre  $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k})$  et de rayon  $\eta > 0$  ne rencontrant pas  $D_{k+1}$ . Donc  $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k+1})$  assurant le minimum lexicographique de  $l$  dans  $D_{k+1}$  n'appartient pas à  $B((\bar{u}_k, \bar{u}_{0k}), \eta)$  et il existe  $\bar{\varepsilon} \in R^{m+1}$  tel que :

$$\forall (\bar{u}, \bar{u}_0) \in B((\bar{u}_k, \bar{u}_{0k}), \eta) : (u, u_0) - (\bar{u}_{k+1}, \bar{u}_{0k+1}) \leq -\bar{\varepsilon}.$$

La suite  $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k})_{k \in N^*}$  est contenue dans  $D_0$  compact. Donc l'hypothèse de théorème de convergence du point (1) est vérifiée et cette suite converge vers  $(\bar{u}, \bar{u}_0)$ .

Reprenant mutatis mutandis ce qui a été vu au paragraphe 2.3.6, on ne retiendra dans les polyèdres  $D(k)$  que les demi-espaces dont les plans fermés correspondent aux plans de séparation linéairement indépendant contenant  $(\bar{u}_k, \bar{u}_{0k})$ . Ces demi-espaces sont en nombre  $m + 1$  au plus, ce qui conduit à des programmes linéaires (6) enchaînés de format constant.

b) Il est clair que  $\bar{x}_k = \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i x_i$  appartient à  $C$  car

$$g(\bar{x}_k) \geq \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i g(x_i) \geq 0.$$

De plus, d'après (15) :  $\bar{u}_{0k} \leq f(\bar{x}_k) \leq f(\bar{x}) = \bar{u}_0$ .

La suite  $f(\bar{x}_k)$  majorant la suite  $\bar{u}_{0k}$  strictement croissante, ayant même limite qu'elle, et étant majorée par cette limite n'est pas décroissante et converge vers  $f(\bar{x}) = \max (f(x) \mid x \in C)$ .

### BIBLIOGRAPHIE

- (1) POLAK E., *On the convergence of optimisation algorithms*, RIRO n° 16, janvier 1969.
- (2) KELLEY J. E., *The cutting plane method for solving convex programs*, J. Soc. Indu. and Appl. Math., vol. 8, n° 4, décembre 1960.
- (3) DANTZIG G. B., *Linear programming and extensions*, Princeton University Press, 1963, chap. 24, General Theory.