REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE INFORMATIQUE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. MATHÉMATIQUE

Y. LADEGAILLERIE

Préfermeture sur un ensemble ordonné

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, tome 7, nº R1 (1973), p. 35-43

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_1_35_0>

© AFCET, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

R.A.I.R.O.
(7e année, avril 1973, R-1, p. 35-43)

PREFERMETURE SUR UN ENSEMBLE ORDONNE

par Y. LADEGAILLERIE (1)

Résumé. — *On définit une famille d'applications, (« préfermetures »), d'un ensemble ordonné dans lui-même qui généralise la notion de fermeture. Si E est un treillis complet cela conduit à une représentation des treillis complets extraits de E. On donne deux représentations des « préfermetures » sur un treillis complet. On peut alors montrer que l'ensemble de ces applications est aussi un treillis complet.*

INTRODUCTION

Dans toute la suite nous considérons un ensemble ordonné E; nous noterons sup (x, y), (resp. : inf (x, y)), la borne supérieure (resp. inférieure), de deux éléments x et y de E (lorsqu'elle existe). Pour une partie A et un élément x de E nous noterons :

$$\operatorname*{Inf}_{A}(x) : \text{le plus grand des minorants de } x \text{ dans } A.$$

$$\operatorname*{Sup}_{A}(x) : \text{le plus petit des majorants de } x \text{ dans } A.$$

(Lorsqu'ils existent.)

Nous donnerons le nom de *fermeture* à toute application α de E dans lui-même, isotone et vérifiant l'axiome de *connectivité* :

$$\forall x, \quad (x \in E), \quad \exists s \quad s = \sup(x, \alpha(x)), \exists i \quad i = \inf(x, \quad \alpha(x)) \quad \text{et} \quad \alpha(s) = \alpha(i).$$

REMARQUE : ces hypothèses entraînent l'idempotence de α ainsi que $\alpha(x) = \alpha(s) = \alpha(i)$.

Nous appellerons *fermeture supérieure* toute fermeture α vérifiant de plus : $\forall x$, $(x \in E)$, $\alpha(x) \geqslant x$. La notion de fermeture inférieure est obtenue par dualité sur E.

(1) Département de Mathématiques, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, France.

Nous appellerons réseau toute partie R de E qui est l'ensemble des invariants d'une fermeture α. C'est aussi l'image de E par α; R est dit supérieur (resp. inférieur), lorsque α est une fermeture supérieure (resp. inférieure).

On connaît les propriétés de ces applications, cf. [1], [2], et notamment :

— à tout réseau supérieur est associée une et une seule fermeture supérieure dont il est l'image;

— par dualité sur E, on démontre la propriété analogue pour un réseau inférieur;

— l'application qui à tout x, élément de E, associe sup $(x, \alpha(x))$, (resp. inf $(x, \alpha(x))$), est une fermeture supérieure $\hat{\alpha}$ (resp. inférieure $\underset{\vee}{\alpha}$), et on a :

$$\underset{\vee}{\alpha} \circ \hat{\alpha} = \hat{\alpha} \circ \underset{\vee}{\alpha} = \alpha \qquad \text{et} \qquad \alpha(E) = \underset{\vee}{\alpha}(E) \cap \hat{\alpha}(E).$$

Tout réseau est donc l'intersection d'un réseau supérieur et d'un réseau inférieur (réciproque fausse en général).

On connaît aussi les deux résultats suivants cf. [2], [3] :

Théorème

« Pour une partie R d'un treillis complet E, il y a équivalence entre :

1° R est un réseau supérieur.

2° R est un sous-inf demi treillis complet contenant l'élément universel de E. »

Théorème

« Pour une partie R d'un treillis complet E, il y a équivalence entre :

1° R est un treillis complet pour l'ordre induit.

2° R est l'image d'une application de E dans E isotone et idempotente. »

En particulier ce dernier théorème donne une représentation des treillis complets de E par l'image d'un certain type d'applications. On peut en fait, imposer à ces applications des propriétés plus fortes.

PROPRIETES ELEMENTAIRES DES PREFERMETURES

Nous introduisons la notion plus générale de préfermeture :

Définition 1

« Etant un ensemble ordonné on appelle *préfermeture* sur E toute application α de E dans E isotone et idempotente. De plus α est dite *supérieure* si elle vérifie :

$$\forall\, x, (x \in E), \exists\, s \quad s = \sup (x, \alpha(x)) \quad \text{et} \quad \alpha(s) = \alpha(x).$$

Par dualité on obtient la notion de *préfermeture inférieure*. Une préfermeture à la fois supérieure et inférieure est une fermeture (cf. ci-dessus). L'image d'une préfermeture est appelée un *préréseau.* »

Comme pour les fermetures, on démontre sans peine :

Proposition 1

« Soit α une préfermeture supérieure sur E, alors l'application $\hat{\alpha}$ qui à tout x, $(x \in E)$, associe $\sup(x, \alpha(x))$ est une fermeture supérieure. On a :

$$\alpha(E) \subset \hat{\alpha}(E)$$

$$\hat{\alpha}(E) = \{ x, x \in E \quad \text{et} \quad \alpha(x) \leqslant x \}$$

($\hat{\alpha}(E)$ est nu réseau supérieur).

Enfin :

$$\hat{\alpha}\alpha = \alpha\hat{\alpha} = \alpha. \text{ »}$$

Proposition 2

« α étant une préfermeture supérieure, $\alpha(E)$ est un réseau inférieur de l'ensemble ordonné $\hat{\alpha}(E)$.

$$(\text{On a : } \forall x, (x \in E), \alpha(x) = \inf_{\alpha(E)} \hat{\alpha}(x)). \text{ »}$$

Dans le cas d'un treillis, on peut démontrer une réciproque :

Théorème 1

« Soit E un treillis, R une partie de E, il y a équivalence entre :

1) R est un préréseau supérieur.

2) Il existe un réseau supérieur $\bar{R}$ de E dont R est un réseau inférieur. »

Démonstration

Vu la proposition 2, il suffit de montrer que 2) entraîne 1). Soit $\bar{\alpha}$ la fermeture supérieure associée à $\bar{R}$ et ρ la fermeture inférieure de $\bar{R}$ associée à R. Soit $\alpha = \rho\bar{\alpha}$, c'est une application isotone de E dans R, idempotente et d'image R (immédiat). Il faut montrer :

$$\forall x, (x \in E), \exists s, \quad s = \sup(x, \alpha(x)) \quad \text{et} \quad \alpha(s) = \alpha(x);$$

s existe car E est un treillis.

On a : $s \geqslant x$, donc $\alpha(s) \geqslant \alpha(x)$.

Mais $\bar{\alpha}(x) \geqslant x$ et $\bar{\alpha}(x) \geqslant \rho(\bar{\alpha}(x)) = \alpha(x)$($\bar{\alpha}$ étant supérieure et ρ inférieure).

Donc : $\bar{\alpha}(x) \geqslant \sup(x, \alpha(x)) : \bar{\alpha}(x) \geqslant s$
par suite :

$$\alpha(x) = \alpha(\bar{\alpha}(x)) \geqslant \alpha(s) \qquad \text{et} \qquad \alpha(s) = \alpha(x) \qquad \text{c.q.f.d.}$$

On démontre aussi :

Proposition 3

« L'image R d'un treillis E par une préfermeture α est un treillis. Si E est complet, R aussi ».

Démonstration

Pour la borne supérieure : soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de R ayant une borne supérieure $\sup\limits_E (x_i)$ dans E. Alors, montrons que :

$$\alpha(\sup_E (x_i)) = \sup_R (x_i).$$

En effet :

$$\forall\, i, (i \in I), \sup_E (x_i) \geqslant x_i$$

donc :

$$\forall\, i, (i \in I), \alpha(\sup_E (x_i)) \geqslant \alpha(x_i) = x_i$$

$\alpha(\sup\limits_E (x_i))$ est donc un majorant, (dans R), de la famille.

Soit r, $(r \in R)$ tel que : $\forall\, i, (i \in I), r \geqslant x_i$
alors : $r \geqslant \sup\limits_E (x_i)$
et $r = \alpha(r) \geqslant \alpha(\sup\limits_E (x_i))$, ce qui montre que $\alpha(\sup\limits_E (x_i))$ est le plus petit des majorants de $(x_i)_{i \in I}$ dans R.

La démonstration s'achève par dualité pour la borne inférieure.

PREFERMETURES SUR UN TREILLIS COMPLET

A. Représentation des préréseaux

Théorème 2

« Soit E un treillis complet et R une partie de E, il y a équivalence entre :

1) R est un treillis complet pour l'ordre induit,

2) R est l'image d'une préfermeture supérieure,

3) R est l'image d'une préfermeture inférieure. »

Démonstration

2) entraîne 1) : cela résulte de la proposition 3. Nous démontrons que 1) entraîne 2). L'équivalence avec le 3) se déduit par dualité.

Soit donc R un treillis complet de E et x élément de E. On note

$$S_R(x) = \{ y, y \in R \quad \text{et} \quad y \geqslant x \}$$

et on définit une application α de E dans E en posant $\alpha(x) = \inf_R S_R(x)$. (*Cette* borne inférieure existe car R est iun treillis complet.)

* α est idempotente car si x est élément de R, $\alpha(x) = x$ (il est clair que $\alpha(E) = R$).

* α est isotone car : $x \leqslant y \Rightarrow S_R(x) \supset S_R(y) \Rightarrow \alpha(x) \leqslant \alpha(y)$.

* Enfin, soit x et soit $s = \sup(x, \alpha(x))$. Alors :

$$s \geqslant x \Rightarrow \alpha(s) \geqslant \alpha(x).$$

Mais : $S_R(x) \subset S_R(s)$ (car si y est élément de R et $y \geqslant x$, on a :

$$y = \alpha(y) \geqslant \alpha(x) \quad \text{et} \quad y \geqslant s).$$

Donc : $\alpha(x) \geqslant \alpha(s)$; par suite : $\alpha(x) = \alpha(s)$.

B. Première représentation des préfermetures supérieures

Définition 2 (Notations)

« Soit E un treillis complet et R une partie de E qui est un treillis complet pour l'ordre induit. On considère $L_1(R)$:

$$L_1(R) = \{ x, x \in E \qquad \text{et} \qquad \exists\, y (y = \operatorname*{Inf}_R x) \}$$

R est alors un réseau inférieur de $L_1(R)$, on note ρ la fermeture inférieure de $L_1(R)$ associée. Soit A une partie de E, $R \subset A \subset L_1(R)$; on note pour x élément de E $S_A(x) = \{ y, y \in A \text{ et } y \geqslant x \}$.

On définit alors une application α_A de E dans R en posant pour tout x

$$\alpha_A(x) = \inf_R \rho(S_A(x)). \text{»}$$

Proposition 4

« α_A est une préfermeture supérieure de E d'image R. Avec les notations précédentes, et si B est une autre partie de E, $(R \subset B \subset L_1(R))$ alors $A \subset B \Rightarrow \alpha_A \geqslant \alpha_B$. »

Démonstration

— Si $x \in R$ alors $\alpha_A(x) = x$ car :

$$x \in R \Rightarrow x \in S_A(x) \Rightarrow x \in \rho(S_A(x))$$

et :

$$\forall\, y, y \in \rho(S_A(x)) \Rightarrow y \geqslant x \text{ (immédiat), donc}$$

$$x = \inf_R \rho(S_A(x)).$$

Ceci montre l'idempotence de α.

— α_A est isotone car :

$$x \leqslant y \Rightarrow S_A(y) \subset S_A(x) \Rightarrow \rho(S_A(y)) \subset \rho(S_A(x)) \Rightarrow \alpha_A(x) \leqslant \alpha_A(y)$$

— enfin soit x, $x \in E$, et soit $s = \sup(x, \alpha(x))$, alors :

$$s \geqslant x \Rightarrow \alpha_A(s) \geqslant \alpha_A(x).$$

D'autre part, soit y, $y \in S_A(x)$, alors : $y \geqslant x$, donc :

$$\alpha(y) = y \geqslant \alpha(x), \text{ par suite : } y \geqslant s \text{ et } y \in S_A(s).$$

Nous avons donc l'inclusion : $S_A(x) \subset S_A(s)$, ce qui entraîne $\alpha_A(x) \geqslant \alpha_A(s)$ et par suite l'égalité $\alpha_A(x) = \alpha_A(s)$.

— La démonstration de $\alpha_A \geqslant \alpha_B$ est immédiate.

Théorème 3

« Soit E un treillis complet, α une préfermeture supérieure d'image R, alors :

1) Il existe au moins une partie A de E ($R \subset A \subset L_1(R)$) telle que $\alpha = \alpha_A$ (plus précisément on peut prendre $A = \hat{\alpha}(E)$).

2) Si $E_\alpha = \{ A,\ A \in \mathcal{T}(E),\ R \subset A \subset L_1(R),\ \alpha_A = \alpha$ on a :

$$\hat{\alpha}(E) = \bigcup_{A \in E_\alpha} A. \text{»}$$

Démonstration

Le 1) se déduira facilement de la proposition 2. Pour démontrer le 2), on remarque que $\hat{\alpha}(E)$ est élément de E_α et que tout élément A de E_α est contenu dans $\hat{\alpha}(E)$. Cette représentation des préfermetures associées à un préréseau permet de démontrer :

Théorème 4

« Si E est un treillis complet, l'ensemble $\mathcal{T}_s(R)$ des préfermetures supérieures d'image R est un treillis complet. (α_R en est l'élément universel et $\alpha_{L_1(R)}$ l'élément nul.) »

Démonstration

— Borne inférieure :

Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ une partie de $\mathcal{T}_s(R)$, alors il existe une famille de parties $(A_i)_{i\in I}$, $(\forall\, i,\ R \subset A_i \subset L_1(R))$ telle que pour tout i, $\alpha_i = \alpha_{A_i}$ (Th. 3). Soit $B = \bigcup_{i\in I} A_i$, alors $\alpha_B \leqslant \alpha_{A_i}$ (pour tout i). De plus, soit α une préfermeture supérieure de $\mathcal{T}_s(R)$ vérifiant : $\forall\, i\ \alpha \leqslant \alpha_i$,

alors : $\forall i\ \hat{\alpha} \leqslant \hat{\alpha}_i$

et :

$$\forall i\ \hat{\alpha}(E) \supset \hat{\alpha}_i(E) \supset A_i \qquad \text{(Th. 3)}$$

donc :

$$\hat{\alpha}(E) \supset B$$

par suite :

$$\alpha = \alpha_{\hat{\alpha}(E)} \leqslant \alpha_B,$$

ce qui montre que α_B est la borne inférieure des α_i.

— Borne supérieure :

Soit $A = \bigcap_{i\in I} \hat{\alpha}_i(E)$, alors $\forall i\ \alpha_A \geqslant \alpha_i = \alpha_{\hat{\alpha}_i(E)}$. De plus, soit α une préfermeture supérieure de $\mathcal{T}_s(R)$ vérifiant

$$\forall\, i\ \alpha \geqslant \alpha_i$$

on en déduit :

$$\hat{\alpha} \geqslant \hat{\alpha}_i$$

$$\hat{\alpha}(E) \subset \hat{\alpha}_i(E)$$

donc :

$$\hat{\alpha}(E) \subset A \qquad \text{et} \qquad \alpha = \alpha_{\hat{\alpha}(E)} \geqslant \alpha_A,$$

ce qui montre que α_A est la borne supérieure des α_i.

REMARQUE : Cette représentation se généralise et permet de donner une nouvelle démonstration du théorème connu : « Sur un treillis complet, l'ensemble des fermetures supérieures est un treillis complet » (voir Morgado, [4]).

C. Représentation en produit des préfermetures supérieures

Proposition 5

« E étant un treillis, φ une fermeture supérieure sur E et ψ une fermeture inférieure, l'application $\psi \circ \varphi$ est une préfermeture supérieure ».

La démonstration de cette propriété est simple : elle se déduit de celle du théorème 1. Lorsque E est un treillis complet, on peut démontrer une réciproque:

Théorème 5

« Soit E un treillis complet, α une application de E dans E, il y a équivalence entre :

1) α est une préfermeture supérieure sur E.

2) Il existe une fermeture supérieure φ et une fermeture inférieure ψ de E telles que $\alpha = \psi \circ \varphi$. »

De plus $R = \psi(E) \cap \varphi(E)$.

Démonstration

Étant donné la proposition 5, il suffit de démontrer que 1) entraîne 2).

Pour φ nous prendrons $\hat{\alpha}$. Soit $R = \alpha(E)$, R est un treillis complet (Prop. 3), mais ce n'est pas, à priori, un sous sup-demi treillis complet de E. Soit $\bar{R}$ l'ensemble obtenu en rajoutant à R l'élément nul de E et tout élément y de E qui est borne supérieure dans E d'une partie de R. (En fait, O_E est borne supérieure de la partie vide de R.)

Lemme

$$« \bar{R} \cap \hat{\alpha}(E) = R. »$$

En effet, on a $R \subset \bar{R} \cap \alpha(E)$. Réciproquement, soit x élément de $\bar{R} \cap \hat{\alpha}(E)$. Si $x \in R$ c'est terminé. Supposons donc $x \in \bar{R} - R$. Alors: $x \in \hat{\alpha}(E) => \alpha(x) \leqslant x$, mais $x = \sup (r_i)_{i \in I}$ où $(r_i)_{i \in I}$ est une partie de R.

Donc :

$$\forall i \qquad x \geqslant r_i$$

$$\forall i \qquad \alpha(x) \geqslant r_i = \alpha(r_i)$$

Donc :

$$\alpha(x) \geqslant \sup (r_i)_{i \in I} = x$$

et :

$$\alpha(x) = x,$$

par suite x est l'élément de R, ce qui achève la démonstration du lemme.

$\bar{R}$ est un réseau inférieur (c'est un sous sup-demi- treillis complet contenant O_E). Soit ψ la fermeture associée, montrons : $\alpha = \psi \circ \varphi$.

On a

$$\alpha(x) = \operatorname{Inf}_{R} \hat{\alpha}(x) \text{ (Prop. 2)}$$

et

$$\psi \circ \varphi = \operatorname{Inf}_{\bar{R}} \hat{\alpha}(x).$$

Il suffira donc de montrer que pour tout élément y de $\hat{\alpha}(E)$ on a $\operatorname{Inf}_R y = \operatorname{Inf}_{\bar{R}} y$. Soit donc $y \in \hat{\alpha}(E)$, $t = \operatorname{Inf}_R y = \sup I_R(y)$ (où l'on a posé $I_R(y) = \{ z, z \in R$ et $z \leqslant y \})$, $t' = \operatorname{Inf}_{\bar{R}} y = \sup I_{\bar{R}}(y)$ (où l'on a posé $I_{\bar{R}}(y) = \{ z, z \in \bar{R}$ et $z \leqslant y \})$. Il est clair que $I_R(y) \subset I_{\bar{R}}(y)$ et par suite $t \leqslant t'$. Nous allons montrer que pour tout z élément de $I_{\bar{R}}(y)$ on a $t \geqslant z$, cela entraînera $t \geqslant \sup I_{\bar{R}}(y) = t'$ et $t = t'$. Soit donc

$$z, z \in I_{\bar{R}}(y) :$$

Si $z \in R$ alors $z \leqslant y$ entraîne $z \in I_R(y)$ et $z \leqslant t$.

Si $z \in \bar{R} - R$, alors $z = \sup (r_i)_{i \in I}$, $(r_i)_{i \in I}$ étant une partie de R.

Donc :

$$\forall i \quad r_i \leqslant y$$

$$\forall i \quad r_i \in I_R(y)$$

$$\forall i \quad r_i \leqslant t$$

donc :

$$z = \sup (r_i)_{i \in I} \leqslant t$$

c.q.f.d.

CONCLUSION

Ce nouveau type d'application a permis de donner un résultat plus complet pour la représentation des treillis extraits d'un treillis complet par l'image d'applications. Grâce aux diverses représentations des préfermetures on peut ramener leur étude à celle des fermetures, tout au moins en partie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNARD J., *Préfermetures sur un ensemble ordonné.* Thèse de 3e cycle, 1969, Clermont-Ferrand.

[2] BOURBAKI N., *Théorie des Ensembles. Ensembles ordonnés.* Livre I, Chap. III (§ 1, Ex. 13, § 2, Ex. 7).

[3] BOUCHET A., *Étude combinatoire des ordonnés finis. Applications.* Thèse de doctorat d'État, Grenoble, 1971.

[4] MORGADO J., *Some results on closure operators of partially ordered sets*, Portugal. Math., 1960, 19, 101-139.

[5] MORGADO J., *Note on the automorphisms of the lattice of the closure operators of a complete lattice*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 64 : Indag. Math., 1961, 23, 211-218.

[6] DWINGER Ph., *On the lattice of the closure operators of a complete lattice.* Nieuw Arch. wisk. (3) 4, 1956, 112-117.