REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE INFORMATIQUE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. MATHÉMATIQUE

JEAN-PIERRE CROUZEIX

Brève communication. Continuité des applications linéaires multivoques

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, tome 7, n° R1 (1973), p. 62-67

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_1_62_0>

R.A.I.R.O.
(7e année, avril 1973, R-1, p. 62-67)

CONTINUITE DES APPLICATIONS LINEAIRES MULTIVOQUES

par Jean-Pierre CROUZEIX (1)

Résumé. — *On étudie la continuité des applications linéaires multivoques à partir des définitions introduites par Berge. La sci-continuité se ramène à la continuité d'une application linéaire univoque associée, et l'on étudie la relation entre sci continuité et fermeture, ainsi qu'avec la distance d'Haussdorff.*

Les notations et définitions sur les multiapplications et leur continuité sont celles de Berge [1].

I. DEFINITION ET RAPPELS

On dira que Γ est une multiapplication de $X \to Y$ si Γ est une application de $X \to \mathcal{P}(Y)$.

Par définition dom $\Gamma = \{ x \in X / \Gamma(x) \neq \emptyset \}$;

$$\text{graphe } (\Gamma) = \{ (x, y) / y \in \Gamma(x) \}$$

Γ^- est l'application de $Y \to X$ de même graphe que Γ.

Si Γ_1 est une multiapplication de $X \to Y$, Γ_2 une multiapplication de $Y \to Z$ alors le produit de composition est défini par :

$$\Gamma_2 \circ \Gamma_1(x) = \{ z / \exists\, y \in Y \text{ avec } (x, y) \in \text{graphe}(\Gamma_1) \text{ et } (y, z) \in \text{graphe } (\Gamma_2) \}.$$

Il en résulte que : $(\Gamma_2 \circ \Gamma_1)^- = \Gamma_1^- \circ \Gamma_2^-$;

Définition :

Soit X, Y deux espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$, Γ *une multiapplication de $X \to Y$* Γ *est dite linéaire si :*

1) $$y \in \Gamma(x),\ y' \in \Gamma(x') \Rightarrow y + y' \in \Gamma(x + x')$$

(1) Université de Clermont-Ferrand, Département de Mathématiques Appliquées.

2) $$y \in \Gamma(x), \lambda \in \mathbf{R} \Rightarrow \lambda y \in \Gamma(\lambda x).$$

Γ sera dite non dégénérée si $\exists\, x \in \operatorname{dom} \Gamma$ avec $x \neq 0$.

On trouvera dans Berge les résultats suivants :

$$1^{\circ}\ \Gamma \text{ linéaire, } \Gamma \not\equiv \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \in \Gamma(0) \\ \forall x \in \operatorname{dom}(\Gamma),\ \lambda \in \mathbf{R}\ \Gamma(\lambda x) = \lambda\Gamma(x), \text{ si } \lambda \neq 0 \\ \forall\, x, x' \in \operatorname{dom}(\Gamma)\Gamma(x, + x') = \Gamma(x) + \Gamma(x'). \end{cases}$$

2° Le produit de composition de 2 multiapplications linéaires donne une multiapplication linéaire.

3° Γ linéaire $\Rightarrow \Gamma^{-}$ linéaire.

4° Γ linéaire, $\Gamma(0) = \{0\} \Leftrightarrow \Gamma$ linéaire univoque.

5° Si A est convexe $\subset X$, Γ linéaire de $X \to Y$ alors $\Gamma(A)$ est convexe dans Y.

En particulier $\Gamma(x)$ est convexe $\forall\, x \in X$.

II. CARACTERISATION DES MULTIAPPLICATIONS LINEAIRES

Proposition 1

Soit Γ une multiapplication de $X \to Y$ avec $\Gamma \not\equiv \emptyset$ (c a d dom $\Gamma \neq \emptyset$ *alors Γ linéaire $\Leftrightarrow$ graphe* (Γ) *est un sous espace vectoriel de $X \times Y$.*

Démonstration :

$\Rightarrow$ Soit (x_1, y_1) et $(x_2, y_2) \in$ graphe (Γ) alors $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$ on a

$$\lambda y_1 + \mu y_2 \in \lambda\Gamma(x_1) + \mu\Gamma(x_2) = \Gamma(\lambda x_1 + \mu y_2)$$

donc, $$(\lambda x_1 + \mu_{x_2}, \lambda y_1 + \mu y_2) \in \text{graphe } (\Gamma).$$

$\Leftarrow$ Soit $G =$ graphe (Γ), $(x, y) \in G \Rightarrow (\lambda x, \lambda y) \in G$.

En outre, (x, y), $(x', y') \in G \Rightarrow [(x + x'), (y + y')] \in G$ d'où la linéarité de Γ.

Corollaire 1

Soit Γ une multiapplication linéaire de $X \to Y$ avec $\Gamma \not\equiv \emptyset$ alors $\Gamma(0)$ *est un sous espace vectoriel de Y,* $\Gamma(x)$ *est un sous espace affine de Y.*

Démonstration :

$\Gamma(0) \simeq$ graphe $(\Gamma) \cap (\{0\} \times Y)$; $\Gamma(x) \simeq$ graphe $(\Gamma) \cap (\{x\} \times Y)$.

Corollaire 2

Soit Γ *une multiapplication linéaire de* $X \to Y$ *avec* $\Gamma \not\equiv \emptyset$ Π *l'application canonique de* $Y \to Y/\Gamma(0)$ *alors* $\gamma = \Pi \, 0 \, \Gamma$ *de* $X \to Y/\Gamma(0)$ *est une application linéaire univoque et* Γ *est parfaitement défini par la donnée de* γ *et de* $\Gamma(0)$. *En fait* $\Gamma = \Pi^- \circ \gamma$.

Démonstration :

Puisque $\Gamma(0)$ est un sous espace vectoriel, $Y/\Gamma(0)$ est un espace vectoriel, γ est linéaire comme produit de deux multiapplications linéaires. Puisque $\gamma(0) = \Pi(\Gamma(0)) = \{ 0 \}$, γ est univoque.

EXEMPLE :

Soit F un sous espace vectoriel de Y, la multiapplication linéaire de $X \to Y$ constante : $\Gamma(x) = F \; \forall \, x \in X$ a pour application univoque associée

$$\gamma(x) = 0 \qquad \forall \, x \in X.$$

III. S.C.I. ET S.C.S. CONTINUITE

Proposition 2

Soit X, Y *deux e.v.t.,* Γ *une multiapplication linéaire de* $X \to Y$ *avec* dom $\Gamma = X$, γ *l'application linéaire univoque de* $X \to Y/\Gamma(0)$ *associée à* Γ. *On munit* $Y/\Gamma(0)$ *de la topologie quotient, alors* γ *continue* $\Leftrightarrow$ Γ s.c.i. $\Leftarrow$ Γ s.c.s. *en tout point.*

Démonstration :

a) γ continue $\Rightarrow \Gamma$ sci : En effet $\Gamma = \Pi^- \circ \gamma$; Π est ouverte donc Π^- est sci, γ est continue donc sci, im $(\gamma) \subset$ dom $(\Pi^-) = Y$ donc Γ est sci.

b) Γ sci $\Rightarrow \gamma$ continue : en effet $\gamma = \Pi \circ \Gamma$, Π est continue donc sci, Γ est sci par hypothèse et im $(\Gamma) \subset$ dom $(\Pi) = Y$ donc γ est sci, or γ est univoque donc γ est continue.

c) Γ scs en tout point $\Rightarrow \gamma$ continue : soit $\mathring{V}$ un ouvert de $Y/\Gamma(0)$,

$V = \Pi^-(\mathring{V})$ est un ouvert de Y,

$$\text{or } \gamma^-(\mathring{V}) = \Pi^+(V) = \{ x/\Gamma(x) \subset V \} \quad \text{car} \quad \gamma(x) \in \mathring{V} \Leftrightarrow \Gamma(x) \subset V.$$

Puisque Γ est scs en tout point $\Gamma^+ V$ est un ouvert de X donc $\gamma^-(\mathring{V})$ est un ouvert de X.

REMARQUE :

En général, on n'a pas Γ sci $\Rightarrow \Gamma$ scs en tout point comme le prouve le contre exemple suivant :

Soit Γ la multiapplication de $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ définie par :
$\Gamma(x) = \{ x \} \times \mathbf{R}\ \forall\, x \in \mathbf{R}$, Γ est bien linéaire et est sci. Soit

$$V = \{ (x, y)/|xy| < 1 \}$$

c'est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et l'on a $\Gamma^+ V = \{ 0 \}$ qui n'est pas un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

La scs continuité apparaît donc comme une notion trop forte pour étudier la continuité des multiapplications linéaires.

IV. FERMETURE

Une multiapplication est dite fermée (Berge) si son graphe est fermé.

Lemme :

Soit X, Y 2 e.v.t., Γ une multiapplication linéaire de $X \to Y$ si $\Gamma(x_0)$ est fermé pour un $x_0 \in \operatorname{dom} \Gamma$ alors $\Gamma(x)$ est fermé $\forall\, x \in X$.

Démonstration :

— Si $\Gamma(x_0)$ est fermé pour $x \in \operatorname{dom} \Gamma$, alors $\Gamma(0)$ est fermé.

En effet soit $y_0 \in \Gamma(x_0)$ alors $\Gamma(0) = \Gamma(x_0) - y_0$ est fermé.

— Si $\Gamma(0)$ est fermé alors $\Gamma(x)$ est fermé: si $x \notin \operatorname{dom} \Gamma$, $\Gamma(x) = \emptyset$; si $x \in \operatorname{dom} \Gamma$ soit $y \in \Gamma(x)$ alors $\Gamma(x) = \Gamma(0) + y$ est fermé.

Proposition 3

Soit X, Y deux e.v.t., Γ une multiapplication linéaire de $X \to Y$, $\Gamma \not\equiv \emptyset$ γ l'application linéaire univoque associée de $X \to Y/\Gamma(0)$ où $Y/\Gamma(0)$ est muni de la topologie quotient, alors Γ fermée $\Leftrightarrow \gamma$ fermée.

Démonstration :

Soit $F = \{ 0 \} \times \Gamma(0)$; F est un sous-espace vectoriel de $X \times Y$; $(X \times Y/F)$ muni de la topologie quotient est isomorphe topologiquement à $X \times (Y/\Gamma(0))$ muni de la topologie produit de X par $Y/\Gamma(0)$. Soit $G =$ graphe (Γ) et $g =$ graphe (γ) :

a) G fermé $\Rightarrow g$ fermé; G est un fermé F— saturé de $X \times Y$ $(G + F = G)$ donc son image dans $(X \times Y)/F$ est fermée. Cette image correspond à g dans l'isomorphie donc g est fermé.

b) g fermé $\Rightarrow G$ fermé; l'image de G dans $(X \times Y)/F$ est alors fermée, comme G est F— saturé G est fermé dans $X \times Y$.

Corollaire 1

Soit X, Y deux e.v.t., Γ une multiapplication linéaire de $X \to Y$. Si Γ est sci *de* dom $\Gamma \to Y$, *si* dom (Γ) *est fermé dans X et* $\Gamma(0)$ *fermé dans Y alors Γ est fermé.*

$\Gamma(0)$ fermé $\Rightarrow Y/\Gamma(0)$ séparé; γ est continu de dom $\Gamma =$ dom $\gamma \to Y/\Gamma(0)$ donc graphe (γ) fermé dans dom $\Gamma \times Y/\Gamma(0)$ par suite graphe (Γ) fermé dans dom $\Gamma \times Y$. Puisque dom Γ est fermé, Γ est fermé dans $X \times Y$.

Corollaire 2

Soit X, Y deux e.v.t. métrisables complets.

Γ *une multiapplication linéaire de $X \to Y$ alors* dom Γ *fermé et* Γ *fermé* $\Rightarrow \Gamma$ sci *de* dom $\Gamma \to Y$.

Démonstration :

Γ fermé $\Rightarrow \Gamma(0)$ fermé de Y et γ fermée; dom $\Gamma =$ dom γ est un e.v.t. métrisable complet ainsi que $Y/\Gamma(0)$ puisque $\Gamma(0)$ est fermé. L'application linéaire γ : dom $\Gamma \to Y/\Gamma(0)$ est donc continue (théorème du graphe fermé) d'où Γ est sci.

Corollaire 3

Soit X, Y deux e.v.t. métrisables complets.

Γ *une multiapplication linéaire de $X \to Y$ alors* Γ *fermée,* Γ sci *de* dom $\Gamma \to Y \Rightarrow$ dom Γ *fermé dans X.*

Démonstration :

Γ fermée $\Rightarrow \gamma$ fermée, Γ sci $\Rightarrow \gamma$ continue de dom $\Gamma \to Y/\Gamma(0)$. Considérons l'application $\hat{p}$: graphe $(\gamma) \to$ dom Γ définie par : $\hat{p}(x, \gamma(x)) = x$; elle est linéaire bijective et bicontinue; graphe (γ) est fermé dans $X \times Y/\Gamma(0)$ qui est complet, donc graphe (γ) est complet; dom Γ et graphe (γ) étant isomorphes topologiquement, dom Γ est complet donc est fermé dans X.

Du point de vue géométrique les corollaires 2 et 3 peuvent s'énoncer comme suit; soit X, Y deux e.v.t. métrisables complets, G un sous-espace vectoriel fermé de $X \times Y$, M sa projection sur X :

Une C.N.S. pour que M soit fermé est que G soit le graphe d'une multiapplication s.c.i. de $M \to Y$.

Corollaire 4

Toute multiapplication linéaire de Γ *de* $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ *est fermée et* s.c.i. *de* dom $\Gamma \to \mathbf{R}^p$.

En effet tout sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ est fermé donc Γ est fermé, comme en outre dom Γ sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ est fermé Γ est sci.

V. RELATIONS AVEC LA DISTANCE D'HAUSSDORFF

Soit Y un e.v.t. métrisable où la distance d est invariante par translation $\Gamma(0)$ un sous-espace vectoriel de Y.

On définit $\tilde{d}$ sur $(Y/\Gamma(0)) \times (Y/\Gamma(0))$ par :

$$\tilde{d}(\mathring{x}, \mathring{y}) = \operatorname{Inf}\,[d(x, y)/x \in \mathring{x}, y \in \mathring{y}].$$

L'invariance par translation de d nous donne :

$$\tilde{d}(\mathring{x}, \mathring{y}) = \operatorname{Inf}\,[d(x, y)/x \in \mathring{x}] \qquad \forall y \in \mathring{y}.$$

Il est facile de voir que $\tilde{d}$ définit un écart sur $Y/\Gamma(0)$, que la topologie induite par cet écart coïncide avec la topologie quotient. Si $\Gamma(0)$ est fermé, la topologie quotient est séparée et l'écart est une distance.

Proposition 4

Soit X un e.v.t., Y un e.v.t. métrisable (distance d) où la distance est invariante par translation.

Γ *une multiapplication linéaire de* $X \to Y$, *avec* $\Gamma(0)$ *fermé.*

$\mathcal{H}$ *l'ensemble des fermés non vides de Y muni de la distance d'Haussdorff* δ *induite par d.*

Γ *peut être considéré (cf. lemme) comme une application de* dom $\Gamma \to \mathcal{H}$, *alors* Γ *continu de* dom $\Gamma \to \mathcal{H} \Leftrightarrow \Gamma$ sci *de* dom $\Gamma \to Y$.

On peut prendre dom $\Gamma = X$. La proposition résulte alors du fait que si $x_1, x_2 \in X$ et si $\mathring{y}_1 = \gamma(x_1)$, $\mathring{y}_2 = \gamma(x_2)$ alors :

$$\tilde{d}(\mathring{y}_1, \mathring{y}_2) = \delta(\Gamma(x_1), \Gamma(x_2)).$$

En effet

$$\tilde{d}(\mathring{y}_1, \mathring{y}_2) = \operatorname{Inf}\,[d(y_1, y_2)/y_2 \in \mathring{y}_2] \qquad \forall y_1 \in \mathring{y}_1$$

donc

$$\tilde{d}(y_1, y_2) = \sup_{y_1 \in \mathring{y}_1} \inf_{y_2 \in \mathring{y}_2} [d(y_1, y_2)]$$

de même

$$\tilde{d}(y_1, y_2) = \sup_{y_2 \in \mathring{y}_2} \inf_{y_1 \in \mathring{y}_1} [d(y_1, y_2)].$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Berge, *Espace topologique, fonctions multivoques* (Dunod, Paris 1959).

[2] Horvath John, *Topological vector spaces and distributions*, (vol. 1, Addison Wesley 1966).